COLECÇÃO **JOGOS COM HISTÓRIA**

Fibonacci

SUCESSÃO DE FIBONACCI

+

Puzzle 'Missing square'

Fibonacci

Biografia do Matemático: Itália, séc. XII-XIII.
Celebrizado pelo romance de Dan Browne.

Breve explicação do Principio Matemático: Algumas das suas contribuições têm aplicação universal, como a sucessão que leva o seu nome (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...) e o número de ouro (1.618...), nomeadamente no crescimento animal e vegetal, na disposição das espirais de sementes nas flores, etc.

10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se

Fibonacci + Missing Square (12/07/07)
Pitágoras + Pentalfa (19/07/07)
John Conway + Ouri (26/07/07)
Leibniz + GO 9x9 (02/08/07)
Mandelbrot + Torres de Hanói (09/08/07)
Arquimedes + Stomachion (16/08/07)
Pacioli + Anéis Chineses (23/08/07)
Galois + Puzzle 15 (30/08/07)
Al-Karizmi + Alquerque (06/09/07)
Euler + Hexágono Mágico (13/09/07)

FICHA EDITORIAL

TITULO: sucessão de Fibonacci + 'Missing Square' **AUTOR:** Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva **CAPA:** Vasco Ferreira **GRAFISMO:** Vasco ferreira **PAGINAÇÃO:** ??? **REVISÃO:** Rui Carvalho **ASSISTENTE EDITORIAL:** ??? **IMPRESSÃO E ACABAMENTO:** ???? **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007 **DEPÓSITO LEGAL:** ???? **ISBN:** ????

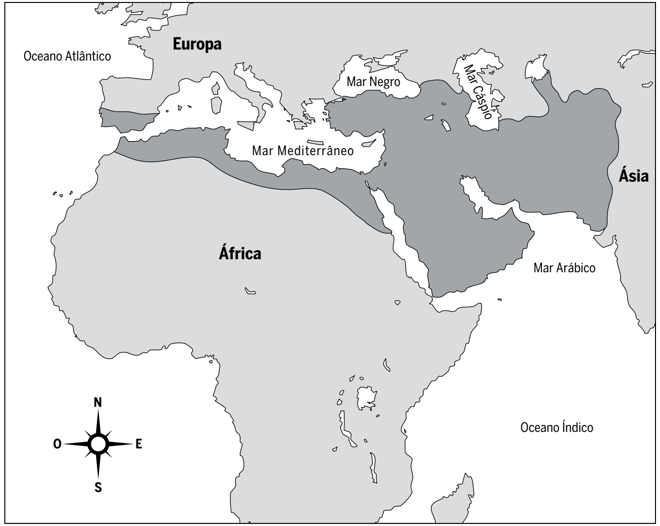
JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

Dez matemáticos, dez quebra-cabeças, dez livros de bolso. De Tales a Conway, cada livro contém informação sobre a vida e obra de um dos maiores matemáticos da humanidade, bem como a descrição e análise de um puzzle, que é reproduzido em madeira e faz parte desta colecção.

Veremos que Arquimedes inventou um puzzle diabólico há mais de dois mil anos (Stomachion) ou que o Pentagrama, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou ainda que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a puzzles, como as Torres de Hanói, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o percursor do Sudoku. E para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico.
Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

Fibonacci

Entre os séculos VII e XII a civilização árabe expande-se à volta do Mediterrâneo. Culturalmente, uma consequência consiste na transmissão e assimilação dos saberes das civilizações mais antigas, nomeadamente da Babilónia, da Índia e da Grécia.



O MUNDO ÁRABE MEDIEVAL

No que diz respeito à Matemática, chegou do Oriente a notação posicional e o zero, enquanto da Grécia se obteve a Geometria bem como a Filosofia e a preocupação com os fundamentos.

Seguindo os preceitos do Profeta Maomé, do século VII, que encorajava a procura do saber, nasceu em Bagdade a Casa da Sabedoria, como que uma segunda Biblioteca de Alexandria, onde os mais notáveis sábios se reuniam para investigar. Harun al-Rashid, imortalizado nas páginas das Mil e Uma Noites, foi um dos seus grandes apoiantes.

A Matemática começou a perder o seu cariz eminentemente prático, passando a ser abordada de forma especulativa e abstracta. O corpo de conhecimentos cresceu consideravelmente.

As traduções do árabe para latim, muitas das quais efectuadas na Península Ibérica, permitiram que o Ocidente tomasse contacto com importantíssimos manuscritos, quer de autores árabes, quer gregos, como Euclides e Arquimedes, que, desde a queda do Império Romano do Ocidente, no século V, eram inacessíveis. Por exemplo, os célebres Elementos de Euclides entram na Europa somente no século XII, por via de uma tradução do árabe.

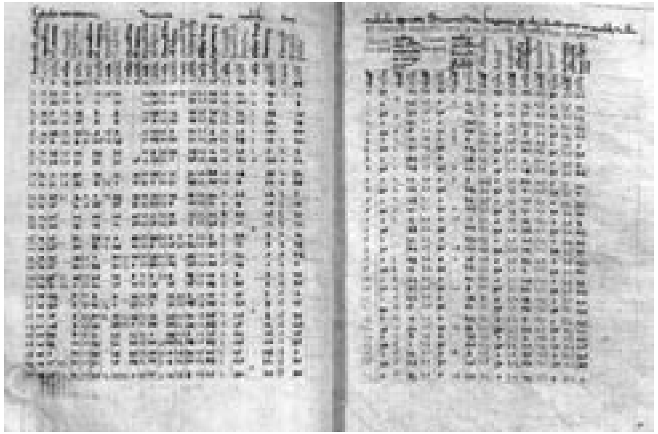
Em Espanha e Portugal concentraram-se muitos estudiosos, incluindo árabes e judeus, responsáveis por traduções muito importantes. Estas eram tipicamente realizadas em duas etapas: primeiro de árabe para espanhol e depois de espanhol para latim. O futuro papa Silvestre II foi um dos matemáticos deste movimento.

Silvestre II

O rei Afonso X, de Castela, foi também um grande impulsionador da cultura no século XIII.

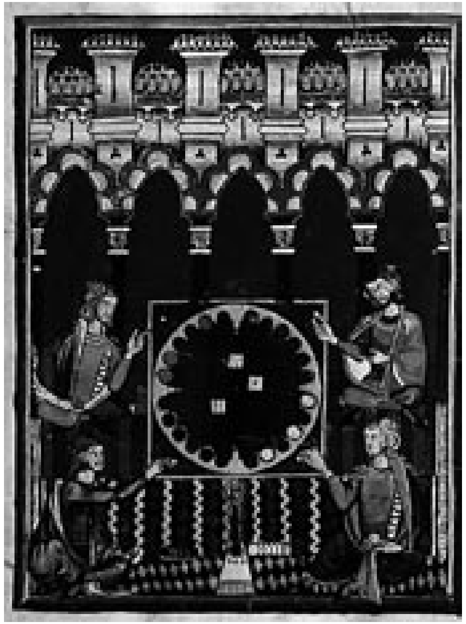
Afonso X, o Sábio

As suas tabelas astronómicas ficaram célebres na Europa por muito tempo, as Tabelas Afonsinas.



Tabelas Afonsinas

Afonso X, o Sábio, encomendou também um livro sobre os jogos que se praticavam na altura, Los libros de acedrex dados e tablas. O único exemplar deste lindíssimo manuscrito, do final do século XIII, encontra-se no Escorial, nos arredores de Madrid e constitui sem dúvida uma fonte incontornável no estudo da história lúdica da Europa medieval.



Livro de Jogos de Afonso X

Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci (filho de Bonacci) foi responsável, no começo do século XIII, pela introdução da Aritmética e Álgebra árabes no Ocidente.

Fibonacci

Leonardo de Pisa,

Fibonacci

Fibonacci (c.1175 - c.1240) nasceu em Pisa, Itália, filho de um funcionário alfandegário que foi colocado no norte de África. Leonardo passou ali muita da sua juventude aprendendo árabe e estudando matemática com professores islâmicos. Mais tarde, viajou ao longo do Mediterrâneo, provavelmente trabalhando para o seu pai como comerciante. Em cada localidade encontrou-se com estudiosos islâmicos e absorveu o conhecimento matemático do mundo islâmico. Depois do seu regresso a Pisa, cerca de 1200, passou os 25 anos seguintes a escrever obras nas quais incorporou o que tinha aprendido. O mais importante desses trabalhos é Liber Abbaci (1202) de que daremos alguns pormenores.

Esta obra, dividida em 15 capítulos, dedica os sete primeiros à introdução dos algarismos hindo-árabes e sua notação posicional e ao cálculo – soma, subtracção, multiplicação e divisão – recorrendo a algoritmos semelhantes aos que usamos nos nossos dias. Os seguintes tratam de conversão de moeda e questões típicas em sociedades comerciais. Por fim aparecem a resolução de equações, extracção de raízes, e problemas diversos, o que hoje se poderia classificar como matemática recreativa.

Ao introduzir a numeração hindo-árabe, Fibonacci realça a simplicidade dos respectivos cálculos, que contrastava com a dificuldade inerente à numeração romana. Para nos convencermos das suas razões basta tentar encontrar o produto de 234 por 102 usando o método romano, isto é, multiplicar CCXXXIV por CII.

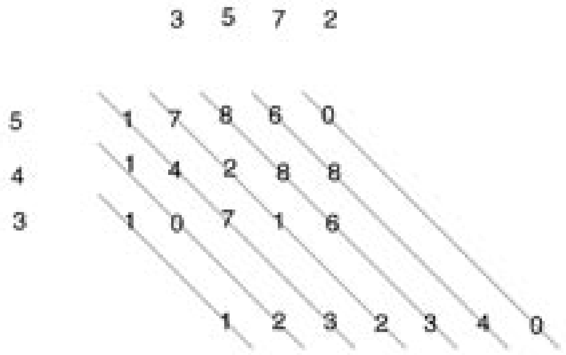
Na notação posicional, o significado dos símbolos depende da sua posição relativa, por exemplo 234 significa 2x100 + 3x10 + 4, o que permite manobrar os múltiplos de potências de 10 em que cada número se decompõe com grande simplicidade. Para efectuar uma soma basta associar os coeficientes respeitantes às mesmas potências de 10, e simplificar no fim:

$$234 + 124 = 2\text{x}100 + 3\text{x}10 + 4 + 1\text{x}100 + 2\text{x}10 + 4 =$$
$$= (2+1)\text{x}100 + (3+2)\text{x}10 + (4 + 4) = 358$$

Pode acontecer a soma de dois coeficientes homólogos exceder 9, o que obriga a um ajuste (o conhecido "e vai um"). Por exemplo:

$$465 + 281 = 4\text{x}100 + 6\text{x}10 + 5 + 2\text{x}100 + 8\text{x}10 + 1=$$
$$= (4+2)\text{x}100 + (6+8)\text{x}10 + 5 + 1 =$$
$$= 6\text{x}100 + 14\text{x}10 + 6=6\text{x}100 + 100 + 4\text{x}10 + 6 =$$
$$= 7\text{x}100 + 4\text{x}10 + 6 = 746$$

Para a multiplicação Leonardo aconselha um algoritmo parecido com o nosso, mas em disposição de tabuleiro de xadrez. Para multiplicar 345 por 3572 multiplica-se cada um de 3, 4 e 5 por 3572 e somam-se os resultados em diagonal:



Fibonacci trata também da divisão, fornecendo algumas tabelas auxiliares, bem como de fracções. A tradição mediterrânica mais forte era a das fracções unitárias, também ditas egípcias por serem utilizadas no Egipto antigo há mais de 25 séculos. Cada número fraccionário, com excepção de 2/3, era expresso como soma de fracções diferentes de numerador unitário, por exemplo:

$4/13 = 1/4 + 1/26 + 1/52$

Leonardo forneceu formas alternativas para lidar com fracções, enfatizando que a maneira tradicional não ajuda a estimar a ordem de grandeza dos números.

As raízes remotas do Liber Abbaci não se esgotam nas fracções egípcias. Um dos seus problemas aparece também ao lado das fracções unitárias no papiro de Rhind, que data de 1650 a.C. Aqui surge um problema, relativo a casas, ratos e grão de trigo, cuja resolução consiste em determinar a soma de uma progressão geométrica de razão 7

$7 + 7x7 + 7x7x7 + 7x7x7x7 + 7x7x7x7x7 =$

$7 + 49 + 343 + 2301 + 16807 = 19607$

Papiro de Rhind (1650 a.C.)

No Liber Abbaci o cenário é diferente, mas a essência é a mesma. Trata-se do seguinte: *Sete velhas vão a Roma, cada uma tem sete mulas, cada mula tem sete sacos, cada saco tem sete pães, cada pão tem sete facas, cada faca tem sete bainhas. Qual é o total de mulas, sacos, pães, facas e bainhas?*

Fibonacci

Ainda hoje há cantilenas folclóricas com o mesmo conteúdo, como a irlandesa *Going to St. Ives:*

As I was going to St. Ives
I met a man with seven wives,
Each wife had seven sacks,
Each sack had seven cats,
Each cat had seven kits.
Kits, cats, sacks and wives,
How many were going to St. Ives?

[Quando ia para St. Ives / Encontrei um homem com sete mulheres, / Cada mulher tinha sete sacos, / Cada saco tinha sete gatos, / Cada gato tinha sete gatinhos. Quantos gatinhos, gatos, sacos e mulheres se dirigiam a St. Ives?]

Outra instância de uma soma de uma progressão geométrica está relacionada com a história do xadrez. Conta a lenda que o seu inventor agradou tanto ao seu príncipe com a criação deste jogo, que este lhe ofereceu qualquer recompensa à escolha. O pedido parecia fácil de satisfazer: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 pela segunda, 4 pela terceira, 8 pela quarta e assim sucessivamente, duplicando sempre até à 64a casa. Fibonacci mostrou que esta soma representa um total de 18 446 744 073 709 551 615.

Este número de grão de trigo transcende em muito as capacidades produtivas de todo o planeta!

Outro problema típico, com raízes muito antigas, já conhecido na China mil anos antes, tem a ver com aves. Leonardo dá várias versões, eis uma delas:

Como comprar 30 aves com 30 moedas se cada perdiz custa 3, cada pombo 2 e os pardais são dois por uma moeda?

O seu método de resolução é o seguinte. Nota que pode obter 5 pássaros com 5 moedas comprando uma perdiz e 4 pardais e 3 pássaros com 3 moedas adquirindo um pombo e 2 pardais. Assim, multiplicando a primeira transacção por 3 e a segunda

por 5, consegue adquirir 3 perdizes e 12 pardais por 15 moedas e, pelo mesmo preço, 5 pombos e 10 pardais. Somando os dois negócios obtemos 30 aves por 30 moedas.

O leão no poço é um exemplo de problema recreativo ainda hoje popular e que Fibonacci resolveu... erradamente!

Um poço tem 50 metros de profundidade. Um leão, que está no fundo, começa a subir, sendo que, em cada dia, sobe 1/7 de metro mas escorrega para baixo 1/9 de metro em cada noite. Quantos dias demorará o leão a escapar?

Fibonacci, usando uma técnica de resolução de equações que popularizou na Europa medieval – o método da falsa posição que consiste em tentar uma solução e, se esta for incorrecta, corrigi-la de seguida, conclui que a resposta é 1575 dias. Contudo, após 1571 dias, a distância a que o leão está do cimo é

$50 - 1571 \times (1/7 - 1/9) = 0.126...$

Como 1/7=0.142... no próximo dia o leão encontrará a liberdade.

Os problemas e as técnicas relativos a questões comerciais, como conversões de divisas e juros revelaram-se muito úteis no mundo de então. Fibonacci viu o seu trabalho reconhecido em vida, tendo o Imperador Frederico II estabelecido um estipêndio anual a Leonardo em reconhecimento dos seus serviços.

FREDERICO II

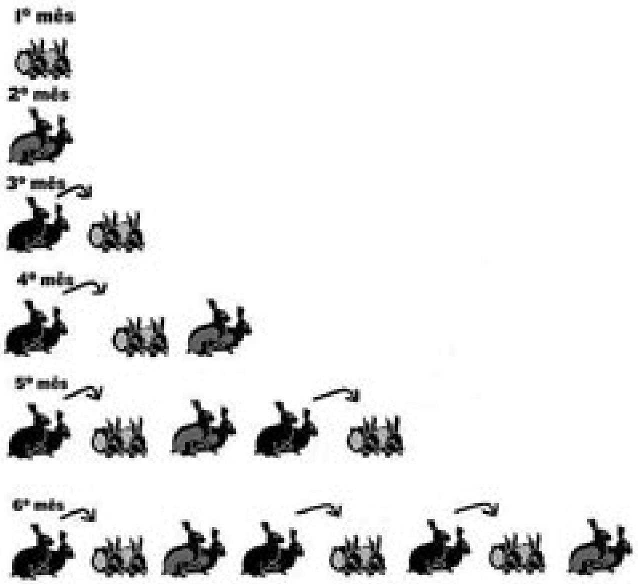
Fibonacci

Sucessão De Fibonacci

A sucessão de Fibonacci aparece no Liber Abbaci sob a forma de um problema:

Um homem colocou um par de coelhos num local cercado por todos os lados por uma parede. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par ao fim de um ano, sabendo que, por mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo no segundo mês de vida?

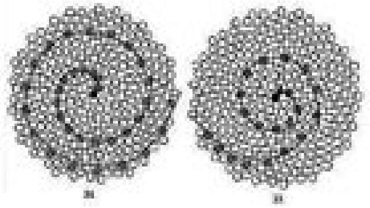
Este problema tem uma resolução simples. No primeiro mês, existe apenas o par inicial. No segundo mês, este ficou mais maduro mas sem estar ainda na fase reprodutiva. No terceiro mês, nasceu outro par. No quarto mês, o par inicial teve outro par, enquanto os seus primeiros filhos cresciam. No quinto mês, tanto o par inicial como os seus primeiros filhos, já em fase reprodutiva, tiveram dois novos pares de coelhos, etc. A sucessão que se origina é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Esta sucessão, denominada sucessão de Fibonacci, está relacionada com estudos de crescimentos populacionais de várias espécies da natureza. O leitor que queira saber mais sobre o assunto poderá procurar na literatura relações com crescimentos populacionais de abelhas, com crescimento de galhos nas plantas, etc. Na figura seguinte pode ver-se a situação relativa ao crescimento populacional dos coelhos (admitindo não haver mortes) – os pares de coelhos pequenos com dorso cinzento claro acabaram de nascer, os pares de coelhos maiores de dorso cinzento-escuro têm um mês de vida e ainda não estão prontos para procriar e os de dorso preto já têm 2 meses ou mais e podem procriar.



Crescimento Populacional dos Coelhos

Temos, portanto, um padrão: cada termo é obtido somando os dois anteriores.

A sucessão de Fibonacci não aparece na natureza apenas relacionada com fenómenos deste tipo. Está também relacionada, por exemplo, com a organização de sementes nas coroas das flores. Marcando o centro de uma flor com um ponto, pode ver-se que as sementes formam espirais tanto no sentido directo como no retrógrado. Contando as sementes dessas espirais nos dois sentidos opostos veremos que os valores são termos consecutivos da sucessão de Fibonacci.

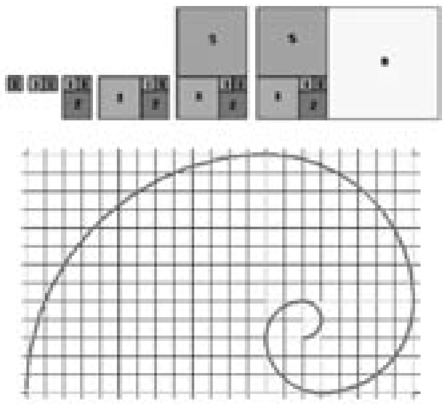


Sucessão de Fibonacci na Coroa de Flores

Há registos de casos conhecidos em que se encontrou os pares 89-55, 144-89 e até 233-144.

Outro objecto matemático relacionado com esta sucessão é a denominada Espiral de Fibonacci.

Anexando dois quadrados de lado igual a uma unidade, obteremos um rectângulo 2x1. Se anexarmos em seguida outro quadrado de lado igual a duas unidades vamos obter um rectângulo 3x2. Repetindo este método, a sucessão das medidas dos lados dos quadrados envolvidos é 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... Utilizando esta construção, podemos desenhar uma bonita espiral, tal como se ilustra na figura seguinte:

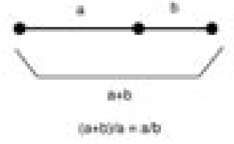


Espiral de Fibonacci

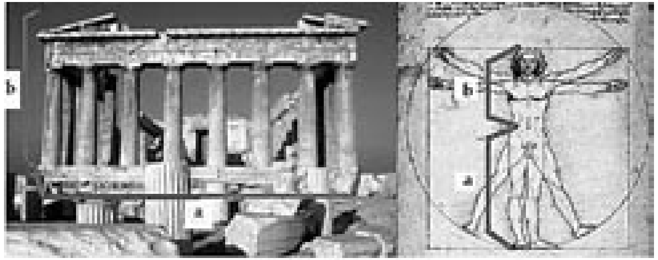
Este tipo de espiral aparece muitas vezes na natureza em flores, nas pinhas, nas garras de animais, nos cornos dos animais, em algumas galáxias, etc.

Muito mais se poderia dizer sobre a sucessão de Fibonacci, mas não podemos terminar esta secção sem abordar a relação que a sucessão tem com outro tema matemático muito interessante – *o rácio dourado*.

O rácio dourado, ou proporção divina, despertou sempre muito interesse ao longo da História. Segundo o grande matemático grego Euclides trata-se da divisão de um segmento em duas partes tais que a razão entre o segmento inteiro e a parte maior seja igual à razão entre a parte maior e menor. Consegue justificar-se matematicamente que o rácio envolvido nesta construção toma o valor (5 +1)/2 = 1,61803398..., denominado número de ouro.



Dimensões de acordo com este rácio têm sido consideradas ao longo da história como as mais belas, apesar de toda a carga subjectiva que esta asserção possa ter. Muitos estudiosos defenderam a ocorrência destas dimensões em obras como o Pártenon, desenhos de Leonardo da Vinci, etc.



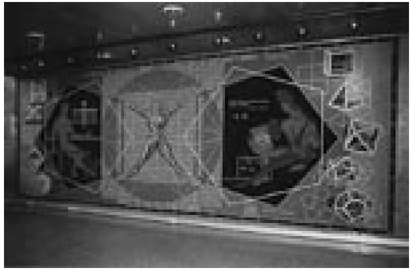
a/b - Número de Ouro

Rácio Dourado no *Pártenon* e nas Proporções Humanas

Facto interessante é a relação existente entre a sucessão de Fibonacci e o número de ouro. Os matemáticos demonstraram que os quocientes de

dois termos consecutivos da sucessão de Fibonacci se aproximam do número de ouro:
1/1=1 2/1=2 3/2=1,5 5/3=1,666... 8/5=1,6
13/5=1,625 etc.

Sendo assim, estes dois assuntos estão relacionados e sempre atraíram matemáticos, cientistas, artistas, etc. Em Portugal não se fugiu à regra. Vasco Graça Moura, na sua obra Camões e a Divina Proporção (1994), defendeu a utilização do rácio dourado por Luís de Camões. Na arte portuguesa, ao visitar o Tribunal de Contas de Lisboa, o leitor poderá ver um painel de Almada Negreiros dedicado a estes temas – "O Número".

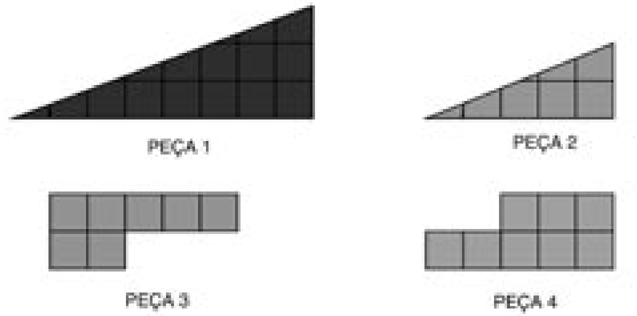


"O Número"

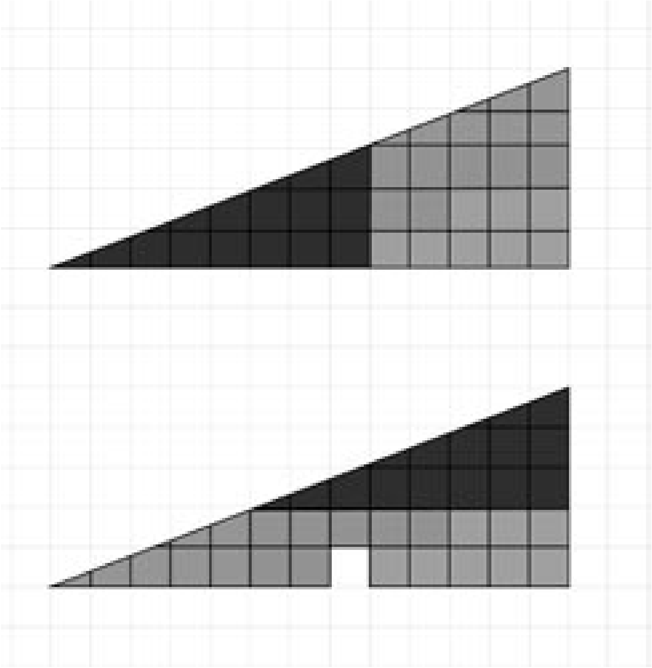
Fibonacci

DESCRIÇÃO DO PUZZLE MISSING SQUARE

O puzzle missing square consiste numa charada geométrica baseada na apresentação de duas arrumações distintas feitas com 4 figuras geométricas planas. Neste quebra-cabeças são utilizadas as quatro peças ilustradas na figura que se segue:



Para se perceber o objectivo do puzzle comece-se por considerar duas disposições diferentes das quatro peças.



Repare-se que ambas as arrumações parecem ajustar-se ao triângulo rectângulo de dimensões 13X5. No entanto, na arrumação de cima, as peças parecem sobrepor exactamente o dito triângulo, enquanto na arrumação de baixo parece faltar um quadrado. Isto é absolutamente paradoxal, uma vez que as peças são as mesmas e, consequentemente, têm de ocupar a mesma área.

O objectivo do puzzle consiste em explicar este fenómeno. Muitas vezes questiona-se a razão de faltar um quadrado numa das arrumações e daí a denominação missing square. Tomando para unidade de área o quadrado pequeno, o leitor pode constatar facilmente que a distribuição das medidas das áreas das peças é a seguinte:

Peça 1 – 12
Peça 2 – 5
Peça 3 – 7
Peça 4 – 8

Somando, constatamos que as peças ocupam uma área total de 32 quadrados pequenos, ao contrário do triângulo rectângulo de 13X5 que tem uma área igual a 32,5 quadrados. Esta observação já indica o caminho para a explicação pretendida.

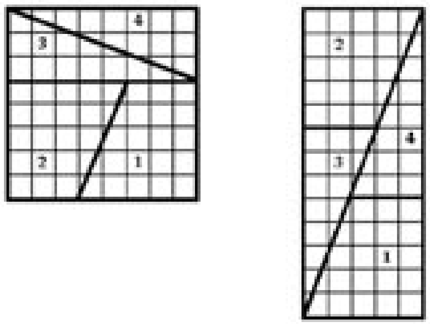
O puzzle missing square pode ser apresentado através de um bloco de madeira com uma saliência triangular, sendo solicitado ao solucionador que recoloque nessa saliência todas as quatro peças e ainda mais um quadrado pequeno (ver próxima figura). Como veremos mais à frente, quem constrói o bloco de madeira terá de perceber o fenómeno.

Missing Square Puzzle

Fibonacci

Quanto à origem do puzzle, devemos dizer que há muito tempo que se conhecem embustes geométricos baseados em erróneas decomposições de figuras geométricas planas. Um puzzle mais antigo muito semelhante ao descrito pode ser enunciado da seguinte forma:

Tome-se um quadrado de 8X8, recortem-se 4 polígonos como se ilustra na figura seguinte e reagrupe-se esse conjunto numa forma rectangular. A área do quadrado original é igual a 64 e a do rectângulo é 65. Como é isso possível?



Este puzzle foi proposto por Lewis Carroll, professor de matemática e autor das célebres obras Alice no País das Maravilhas e Alice do Outro lado do Espelho. Carroll é uma referência obrigatória quando se fala em jogos e puzzles, tendo sido um excelente inventor.

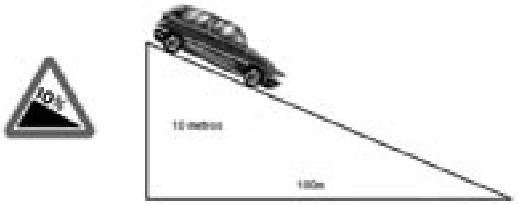
LEWIS CARROLL

Quanto ao puzzle missing square, foi proposto em 1953 pelo mágico nova iorquino Paul Curry. Não se pode dizer que Curry tenha sido verdadeiramente o inventor do puzzle, uma vez que o conceito que o suporta há muito que se conhecia. No entanto, Curry deu-lhe um aspecto tridimensional e uma vertente manipulável que o torna ainda mais atractivo.

Fibonacci

SOLUÇÃO DO PUZZLE

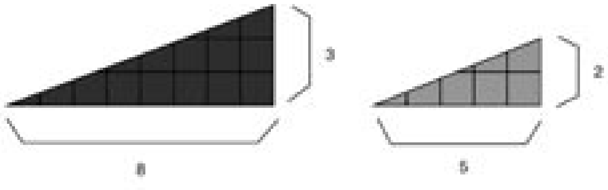
Como foi dito anteriormente, a área total relativa às quatro peças totaliza 32, o que constitui um valor diferente do relativo à área do triângulo rectângulo que é igual a 32,5. Sendo assim, as quatro peças não podem cobrir todo o triângulo, ficando a faltar meio quadrado. Mas é importante reparar que fica a faltar meio quadrado e não um quadrado inteiro. Ambas as arrumações necessitam de uma interpretação cuidada. Para se fazer esse trabalho o melhor é recorrer ao conceito de declive de uma recta. O leitor estará familiarizado com os sinais de trânsito indicativos de uma subida ou descida acentuada.



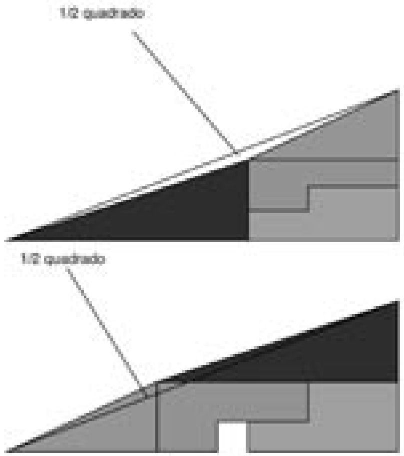
Noção de Declive

Por exemplo, um condutor ao ver o sinal exposto fica a saber que pode esperar descer 10 metros por cada 100 metros percorridos. Repare-se que esses 100 metros não correspondem a 100 metros percorridos pelo carro, mas sim à medida da base do triângulo imaginário. Ou seja, o declive corresponde a uma taxa de variação que indica o quão acentuada é a inclinação da recta.

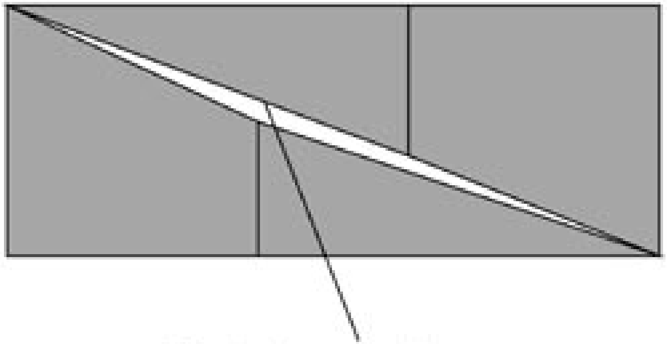
Voltando ao puzzle, vamos começar por analisar as peças 1 e 2 que são triângulos rectângulos (dois dos seus lados formam um ângulo recto). Todos os triângulos rectângulos têm um lado maior chamado hipotenusa. A hipotenusa da peça 1 tem um declive igual a 3/8 ao passo que o declive da hipotenusa da peça 2 é de 2/5.



Esta diferença nos rácios constitui a chave para a compreensão do problema: em nenhuma das duas arrumações as hipotenusas se encontram alinhadas. No entanto, para os nossos olhos humanos parecem estar. A figura seguinte apresenta uma ilustração do fenómeno sem respeitar a escala, permitindo dessa maneira os nossos olhos observarem o que se passa.



A diferença entre os declives é igual a 1/40 – muito pequena para ser detectada à vista desarmada. Puzzles deste género podem ser utilizados pelos professores de matemática para explicar a importante noção de declive de uma recta. O que se passa no puzzle missing square é que as arrumações em causa são "pseudotriangulares". Aos nossos olhos parecem-nos triângulos, mas de facto as "hipotenusas" não são segmentos de recta, mas sim linhas quebradas constituídas por dois segmentos com declives diferentes. Agora podemos perceber que a saliência do bloco de madeira tem de ser construída cuidadosamente. Esta saliência não pode ter a forma exacta de um triângulo rectângulo 13X5. Tem de se deixar uma folga na hipotenusa para que o utilizador possa conseguir montar as duas construções. Podemos observar também que o puzzle de Carroll tem uma justificação semelhante. Na arrumação rectangular a diagonal é na realidade uma "falsa" diagonal. O leitor pode novamente ter em conta a diferença de declives.



Área igual a um quadrado pequeno

Uma tarefa tão interessante como resolver estes puzzles consiste em pensar na forma como são construídos. Por exemplo, o puzzle de Carroll envolve o quadrado de 8X8 e o rectângulo de 5X13. O leitor atento recordará que o terno (5, 8, 13) é constituído por três termos consecutivos da sucessão de Fibonacci. Será este facto uma mera coincidência?

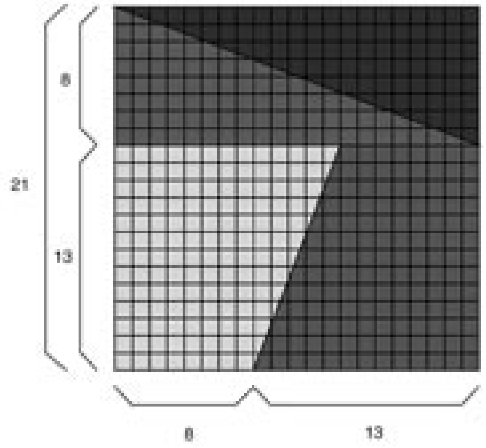
A resposta é negativa. Listemos novamente a sucessão de Fibonacci:

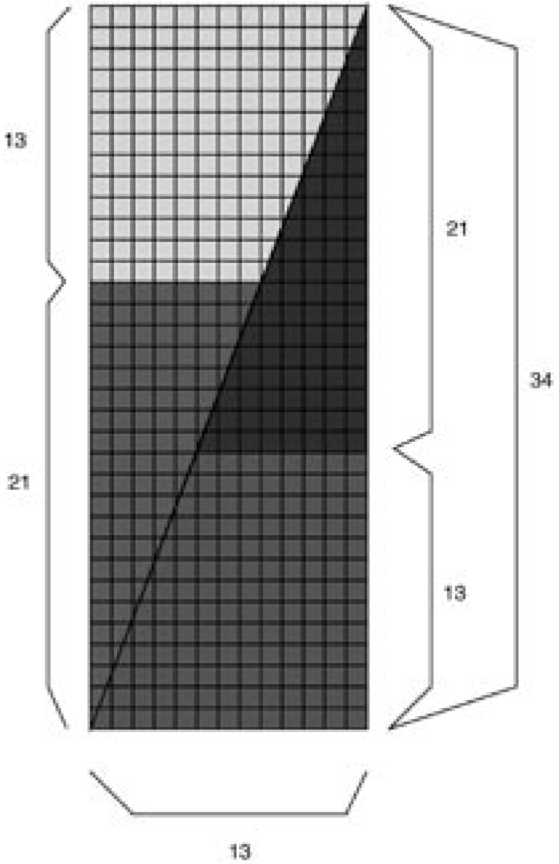
2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, …

Um facto facilmente constatável é que o produto de dois termos alternados da sucessão de Fibonacci difere de uma unidade do quadrado do termo intermédio. Exemplificando:

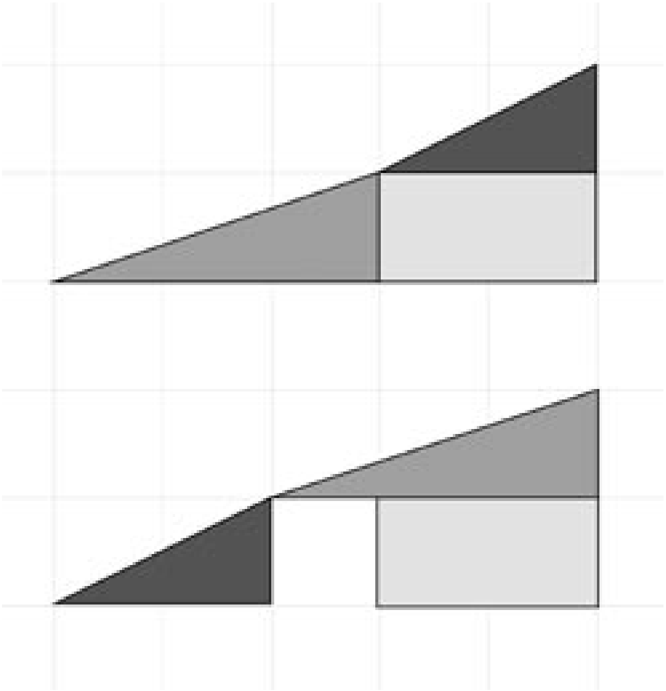
2 X 5 = 10 e 32=9
3 X 8 = 24 e 52=25
5 X 13 = 65 e 82=64
(…)

O leitor familiarizado com a matemática poderá tentar provar esta propriedade pelo método de indução matemática. Quer isto dizer que se se utilizar ternos de Fibonacci para construir puzzles de dimensões maiores, teremos na mesma um quadrado em falta, sendo praticamente impossível ao olho humano detectar a diferença de declives. Observe-se um exemplo de um puzzle de Carroll que utiliza o terno (13, 21, 34) e o facto de 13X34=442 e 212=441 (diferença apenas de uma unidade).


8
21
13
8
13


13
21
21
34
13
13

Voltando ao nosso quebra-cabeças, o triângulo rectângulo onde se arrumam as peças tem base de medida igual a 13 e altura de medida igual a 5. Os números 5 e 13 são mais uma vez dois termos alternados da sucessão de Fibonacci. Uma vez que já sabemos que os puzzles deste género são construídos com recurso a esta sucessão, podemos usar um método simples que os matemáticos usam para compreender ideias por detrás dos problemas: o recurso a um caso extremo. Vejamos como ficaria o puzzle missing square utilizando o par de termos alternados de Fibonacci de menor grandeza, ou seja, utilizando o triângulo de 5X2.



Este puzzle já não apresentaria nenhuma dúvida, uma vez que o nosso olhar detectaria imediatamente o problema.

Fibonacci