

Liber Abaci

(Manuscrito de 1202)

Liber Abaci (o Livro do Ábaco ou do Cálculo) foi escrito por Fibonacci em 1202, e foi baseado na aritmética e "Álgebra" que Fibonacci apreendeu durante as suas viagens pelo Mediterrâneo. Em 1228 o livro foi de novo publicado após uma revisão.

Foi muitas vezes imitado, ou mesmo copiado, servindo de modelo a praticamente todas as aritméticas comerciais da época medieval e renascentista. Foi um dos primeiros a introduzir os numerais indo-árabes na Europa. O livro tem uma forte influência árabe.

O livro contém não apenas as regras para cálculo com os numerais indo-árabes, mas também diversos problemas, que incluem questões, certamente muito úteis aos mercadores, como o cálculo de juros, conversões monetárias, medidas, e outro tipo de problemas que Fibonacci resolve recorrendo a diversos algoritmos e métodos, entre eles o método da falsa posição e a resolução de equações quadráticas.

Está dividido em 15 capítulos:

Cap. 1	<i>De cognitione novem figurarum indorum et qualiter cum eis omnis numerus scribatur; et qui numeri, et qualiter retineri debeant in manibus, et de introductionibus abbaci</i>	Leitura e escrita dos números no sistema indo-árabe
Cap. 2	<i>De multiplicatione integrorum numerorum</i>	Multiplicação de números inteiros
Cap. 3	<i>De additione ipsorum</i>	Adição de números inteiros
Cap. 4	<i>De extractione minorum numerum ex maioribus</i>	Extracção do menor número pelo maior (subtracção).
Cap. 5	<i>De divisione integrarum numerorum per integros</i>	Divisão de números inteiros
Cap. 6	<i>De multiplicatione integrarum numerorum cum ruptis atque ruptorum sine sanis</i>	Multiplicação de números inteiros por fracções
Cap. 7	<i>De additione ac extractione et divisione numerorum integrarum cum ruptis atque partium numerorum in singulis partis reductione</i>	Adição, subtracção e divisão de fracções
Cap. 8	<i>De emptione et venditione rerum venalium et similium</i>	Aquisição e venda de mercadorias e similares
Cap. 9	<i>De baractis rerum venalium et de emptione bolsonalie et quibusdam regulis similibus</i>	Comércio
Cap. 10	<i>De societatis factis inter consocios</i>	Regra das companhias
Cap. 11	<i>De consolamine monetarum atque eorum regulis que ad consolamen pertinent</i>	Liga de moedas
Cap. 12	<i>De solutionibus multarum positarum questionum quas erraticas appellamus</i>	A solução de problemas diversos
Cap. 13	<i>De regula elcatayam qualiter per ipsam fere omnes erraticas questiones solvantur</i>	A regra da falsa posição.
Cap. 14	<i>De reperiendi radicibus quadratis et cubitis ex multiplicatione et divisione seu extractione earum in se et de tractatu binomiorum et recisorum et eorum radicum</i>	Raízes quadradas e raízes cúbicas
Cap. 15	<i>De regulis proportionibus geometrie pertinentibus: de questionibus aliebre et</i>	A regra da proporção geométrica e questões de

O livro divide-se naturalmente em três partes. A primeira trata da aritmética que envolve os sete primeiros capítulos. Fibonacci inicia o primeiro capítulo introduzindo os numerais indo-árabes:

As nove figuras dos hindus são 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 1. Com estas nove, e com o símbolo 0, que os árabes chamam zephirum, podem se escrever todos os números, como demonstraremos abaixo.

Nos capítulos seguintes, como se pode ver acima, pelos títulos de cada um deles, Fibonacci trata dos quatro algoritmos elementares tanto para números inteiros como para frações.

Os quatro capítulos seguintes constituem uma segunda parte do livro, sobre a matemática comercial.

No capítulo que se segue, Fibonacci apresenta diversos problemas, o problema mais conhecido é sobre um par de coelhos, que é colocado numa cerca, querendo-se saber quantos coelhos se reproduzem num ano a partir desse par. A solução dá origem à sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 (Fibonacci omitiu o primeiro termo), na qual cada número, da sequência, é igual à soma dos dois que o precedem. Esta sequência foi denominada de sequência de Fibonacci no século XIX, pelo matemático francês Edouard Lucas, e a partir daí encontraram-se inúmeras relações destes números com a natureza, levando os matemáticos e cientistas a investigá-la.

São aqui traduzidos alguns problemas dos capítulos referentes à aritmética comercial.

Problema

Se 3 fossem 4, quantos seriam 5?

(citado em http://www2.math.unifi.it/~archimede/archimede/fibonacci/immagini_mostra/virtuale.php?id=15)

Problema

Se 1 *Solidus imperial*, que vale 12 *deniers imperiais* é vendido por 31 *deniers pisanos*, quanto *deniers pisanos* se devem obter em troca de 11 *deniers imperiais*?

(citado em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/fibonacci/web3.htm>)

Capítulo 10 - Regra das companhias

Problema

Dois homens juntos fazem uma companhia na qual o primeiro põe, na dita sociedade, 18 dinheiros, e o outro põe, nessa mesma companhia, 25 dinheiros, e a companhia faz um lucro de 7 dinheiros, e procura-se quanto é que, cada um dos dois, terá dos 7 dinheiros.

(a partir da tradução de Sigler)

Capítulo 11 - Liga de moedas

Problema - Sobre uma vendedora que compra maçãs e pêras

Uma vendedora compra 7 maçãs por 1 denário, e vende 6 por 1 denário, e compra 8 pêras por 1

denário, e vende 9 por 1 denário. Investiu 10 denários, e o lucro é 1 denário. Procura-se, quanto é que ela investiu em maçãs e em pêras.

Problema - Sobre o trabalho de um homem numa certa tarefa

Um certo homem recebe 7 besantes num mês pelo seu trabalho, e se alguma parte do tempo ele não trabalhar, paga de volta 4 besantes por mês; fica durante um mês, uns dias trabalha, outros dias não; assim ele tem 1 besantes de quando trabalha, descontando o que não trabalha. Procura-se, quantos dias do mês trabalhou, e quantos não trabalhou.

Nota: O mês é considerado de 30 dias.

(a partir da tradução de Sigler)

Problema - Um homem compra trinta pássaros de três tipos por 30 denários

Como comprar 30 pássaros com 30 moedas, se cada perdiz custar 3 moedas, cada pombo 2 moedas, e dois pardais uma moeda?

(citado por Victor Katz)

Capítulo 12 - Problemas diversos

- Parte 1** Soma de séries de números, e alguns outros problemas similares
- Parte 2** Sobre proporções numéricas pela regra das quatro proporções
- Parte 3** Problemas de árvores, e outros problemas similares que têm solução
- Parte 4** Descobrimo bolsas
- Parte 5** Compra de cavalos entre membros de uma sociedade, de acordo com proporções dadas
- Parte 6** Viajantes, e outros problemas que têm semelhanças
- Parte 7** Regra da falsa posição e variações da regra
- Parte 8** Certos problemas de adivinhação
- Parte 9** Duplicando quadrados e outros determinados problemas

Os diferentes problemas não são numerados no original, mas por uma questão de organização serão numerados de acordo com a sequência do livro.

Parte 1 - Soma de séries de números

Problema 3

Há dois homens que tencionam fazer uma longa viagem, e um irá a 20 milhas por dia. O outro irá, respeitosamente, 1 milha no primeiro dia, 2 no segundo, 3 no terceiro, e sempre assim, mais uma milha por dia até que se encontrem. Procura-se, durante quantos dias o primeiro é perseguido.

Problema 4

Também é proposto que um homem vá por dia 21 milhas, e o outro vá, respeitosamente, aumentando um número ímpar de milhas, começando por um, e com números ímpares consecutivos.

Problema 5

É proposto que um homem vá diariamente 20 milhas, e o outro vá, respeitosamente, aumentando um número par de milhas.

Problema 6

É proposto que um homem vá diariamente um número de milhas, que pode ser integralmente dividido pelo número de milhas que o outro que o segue aumenta, as quais podem aumentar por três, ou por quatro, ou por cinco ou por outro qualquer número. [...]

Por exemplo: se um vai diariamente 60 milhas e o outro vai com um aumento de 3, isto é, no primeiro dia 3 milhas, no segundo 6, no terceiro 9, e assim por diante...

(a partir da tradução de Sigler)

Parte 3 - Problemas com árvores e outros problemas ...**Problema 1**

Há uma árvore, cuja $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ estão debaixo do solo; e são 21 *palmi*: perguntamos pela altura da árvore.

(citado por John Fauvel et al.)

Problema 2

Também há uma árvore, cuja $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ estão debaixo do solo. O resto, que está acima do solo, são 21 *palmi*.

Problema 3

Também se te disserem que quando $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ de uma árvore é adicionado ao comprimento da árvore o resultado é 38 ...

Problema 11 - sobre descobrir a vida de um jovem

Um certo jovem viveu alguns anos; se viver tanto como já viveu, e de novo a mesma quantidade de anos, e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ dos anos que já viveu, e mais um ano, ele terá vivido 100 anos.

(a partir da tradução de Sigler)

Problema 12 - sobre o leão que estava num buraco

Um buraco tem 50 *mãos* de profundidade. Um leão sobe o buraco todos os dias $\frac{1}{7}$ de uma *mão* e escorrega $\frac{1}{9}$ de uma *mão*. Quanto tempo demorará a sair do buraco?

(citado por Victor Katz)

Problema 13 - sobre duas serpentes

Também há uma serpente na base de uma torre que tem 100 palmos de altura, e sobe por dia $\frac{1}{3}$ de um palmo, e desce diariamente $\frac{1}{4}$. No topo da torre está outra serpente que desce por dia $\frac{1}{5}$ de palmo, e sobe por dia $\frac{1}{6}$ de palmo. Procura-se, em quantos dias se encontrarão na torre.

Problema 16 - sobre ovos

Um certo homem compra 7 ovos por um denário, e vende 5 ovos por um denário, e o seu lucro é 19 denários. Procura-se, quanto é que investiu em ovos.

Problema 19 - sobre um cão e uma raposa

Também uma raposa em fuga, que está 50 passos à frente de um cão, dá 6 passos por cada 9 passos do cão que a persegue ...

(a partir da tradução de Sigler)

Problema 26 - sobre um leão, um leopardo e um urso

Um leão come uma ovelha em 4 horas; um leopardo comê-lo-á em 5 horas e um urso de 6 horas. Se se der uma ovelha aos três, quanto tempo demorará a devorarem-na?

(citado por John Fauvel et al.)

Problema 27 - sobre duas formigas, uma das quais segue a outra

Duas formigas estão no chão, 100 passos afastadas, e movem-se na mesma direcção, para o mesmo ponto; a primeira avança diariamente $\frac{1}{3}$ de um passo e recua $\frac{1}{4}$; a outra avança $\frac{1}{5}$ e recua $\frac{1}{6}$. Procura-se, em quantos dias é que se encontrarão.

Problema 28 - sobre dois navios que se encontram

Dois navios estão afastados, cada viagem o primeiro consegue fazer em 5 dias, o outro em 7 dias. Procura-se, em quantos dias é que se encontrarão, se iniciarem a viagem ao mesmo tempo.

Problema 29 - sobre um tanque que tem quatro buracos no fundo

Há um tanque que tem quatro buracos, e pelo primeiro buraco o tanque fica vazio num dia, pelo segundo em 2, pelo terceiro em 3, e pelo quarto em 4. Procura-se, em quantas horas o tanque ficará vazio se se abrirem os quatro buracos ao mesmo tempo.

Problema 34 - sobre quatro homens num navio

Quatro homens tomaram um navio para carregar cereal, e cada um carregou um quarto do navio. O primeiro deu ao capitão $\frac{1}{3}$ do seu cereal pela viagem, o segundo $\frac{1}{4}$, o terceiro $\frac{1}{5}$, o quarto $\frac{1}{6}$. O capitão do navio recebeu pela viagem 1000 modia, tu vês o carregamento total do navio ...

Problema 40 - sobre uma taça ...

A base de uma certa taça pesa um terço da taça inteira; o cimo pesa um quarto, o resto pesa 15 *pounds*. Procura-se, qual é o peso de toda a taça.

Problema 44 - sobre dois homens que têm denários ...

Dois homens têm alguns denários, e um diz para o outro, Se me deres um dos teus denários, então os meus igualarão os teus. O outro responde, e se tu me deres um dos teus, então eu terei dez vezes tanto como tu.

Problema 45 - um problema sobre a mesma coisa que nos foi proposto por um mestre perto de Constantinopla

Também é proposto que um homem tire 7 denários ao outro, e terá cinco vezes [os denários do] segundo homem. E o segundo tira do primeiro 5 denários, e terá sete vezes os denários do primeiro.

(a partir da tradução de Sigler)

Capítulo 12 - Problemas diversos

Parte 4 - Descobrindo bolsas

Problema 1

Dois homens, que tinham denários, encontram uma bolsa com denários. O primeiro homem diz para o segundo: "Se ficar com os denários da bolsa, então com os denários que tenho terei três vezes tanto como tu". O outro homem responde, "E se ficar com os denários da bolsa com os meus denários, então terei quatro vezes tanto como tu". Procura-se, quantos denários tem cada homem, e quantos denários havia na bolsa.

(a partir da tradução de Sigler)

Problema 3

Três homens, cada um tendo denários, encontram uma bolsa contendo 23 denários. O primeiro homem diz para o segundo: "Se ficar com esta bolsa, terei duas vezes o que tens". O segundo diz ao terceiro, "Se ficar com esta bolsa, terei três vezes o que tens". O terceiro diz ao primeiro: "Se ficar com esta bolsa, terei quatro vezes o que tens". Quantos denários tem cada homem?

(citado por Burton)

Parte 5 - Compra de cavalos

Problema 1

Dois homens tendo besantes encontraram um cavalo para vender; como queriam comprá-lo, o primeiro disse para o segundo: "Se tu me deres $\frac{1}{3}$ dos teus besantes, então eu terei o dinheiro para comprar o cavalo. E o outro homem propôs que teria igualmente o dinheiro do cavalo se tirasse $\frac{1}{4}$ dos besantes do primeiro. Procura-se, o preço do cavalo e os besantes de cada homem.

(a partir da tradução de Sigler)

Parte 6 - Viajantes e outros problemas semelhantes

Problema 1

Um certo mercador negociando em Lucca dobro o seu dinheiro, e depois gastou 12 denários. Em seguida, saiu e foi para Florença; aí também dobro o seu dinheiro e gastou 12 denários. Regressando a Pisa, aí dobro o seu dinheiro e de novo gastou 12 denários, nada sobrando. Quanto dinheiro tinha no início?

(citado por Burton)

Capítulo 12 - Problemas diversos

Parte 7 - Regra da falsa posição

Problema 3 - sobre dois homens com peixes e o agente da alfândega

Um de dois homens tinha 12 peixes, e o outro tinha 13 peixes, e todos os peixes tinham o mesmo preço. O agente da alfândega cobrou-lhe um peixe e 12 denários. E ao outro cobrou-lhe 2 peixes e deu-lhe 7 denários. Procura-se, os honorários da alfândega e o preço de cada peixe.

(a partir da tradução de Sigler)

Problema 5

Um homem foi a um pomar que tinha sete portões; aí colheu um certo número de maçãs. Quando deixou o pomar deu ao primeiro guarda metade das maçãs que tinha e mais uma maçã. Ao segundo deu metade das maçãs que lhe sobraram e mais uma maçã. Fez o mesmo em cada um dos cinco guardas que sobravam e deixou o pomar com uma maçã. Quantas maçãs recolheu no pomar?

(citado por King)

Problema 7

Um homem cujo fim se aproximava chamou os seus filhos e disse: "Dividam o meu dinheiro como

ordeno.” Ao mais velho disse: “Deverás ter 1 besante e um sétimo do que sobrar”. Ao segundo filho disse, “Tira 2 besantes e um sétimo do que sobrar”. Ao terceiro filho, “Deverás tirar 3 besantes e um sétimo do que sobrar”. Assim, deu a cada filho mais 1 besante do que ao filho anterior e um sétimo do que sobrava, e ao último filho o que sobrou. Após seguirem as instruções do pai com cuidado, os filhos descobriram que partilharam igualmente a sua herança: Quanto filhos eram, e qual era o montante da herança?

(citado em <http://cedar.evansville.edu/~ck6/bstud/fibo.html>)

Problema 12 - sobre descobrir um número que é múltiplo de 7

Há um número que quando dividido por 2, ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, tem sempre resto 1, e é inteiramente dividido por 7. Procura-se, qual é o número.

Problema 14 - sobre o mesmo

E de novo, há um número que quando dividido por 2, tem resto 1, e quando dividido por 3, tem resto 2, quando dividido por 4, tem resto 3, quando dividido por 5, tem resto 4, quando dividido por 6, tem resto 5, e é inteiramente dividido por 7. Procura-se, qual é o número.

Problema 16 - sobre dois homens que têm pão

Há dois homens, o primeiro dos quais tem 3 pães e o outro 2 pães, deram um passeio até uma certa fonte, e um soldado passou por eles; convidaram-no a juntar-se a eles, e ele sentou-se e comeu com eles, e quando acabaram de comer o pão todo o soldado partiu deixando, pela sua parte, 5 besantes. Deste o primeiro tirou 3 besantes, pois tinha 3 pães; o outro tirou os outros dois besantes, pois tinha 2 pães. Procura-se saber se a divisão foi ou não justa.

Problema 18 - quantos pares de coelhos são criados por um par num ano

Um certo homem tem um par de coelhos numa determinado local cercado, e quer-se saber quantos são criados por esse par num ano, quando é natural que eles gerem num mês outro par, e no segundo mês, os que nasceram, geram também.

Problema 19 - sobre quatro homens com dinares

Há quatro homens; o primeiro, o segundo e o terceiro têm 27 dinares. Além disso, o segundo, o terceiro e o quarto têm 31 dinares; o terceiro, o quarto e o primeiro têm 34 dinares; o quarto, o primeiro e o segundo têm 37 dinares. Procura-se, quanto é que tem cada homem.

Problema 29 - sobre quatro pesos pesando quarenta *pounds*

Um certo homem no seu negócio tinha 4 pesos com os quais conseguia pesar *pounds* inteiros de um a 40. Procura-se, quantos *pounds* tinha cada peso.

Problema 30 - sobre um homem que tinha quatro vasos de prata

Um certo homem deu a outro homem pelo seu trabalho diário 1 marco de prata que pagou com cinco vasos que tinha de tal maneira que nenhum deles foi partido, e isto ele fez durante 30 dias.

Problema 31 - sobre dois homens que tinham pêras

Um de dois homens tinha 10 pêras, o outro 30, e quando estavam juntos num mercado cada um vendeu das suas pêras não sei quantas. Mas elas tinham o mesmo preço, e quando foram a outro mercado eles venderam, igualmente, ao mesmo preço. E o que o primeiro fez com as suas 10 pêras foi tanto quanto o outro fez. Procura-se qual é o preço das maçãs em cada mercado, e quantas maçãs cada um vendeu em cada mercado.

(a partir da tradução de Sigler)

Parte 9 - Duplicando quadrados

Problema 1 - sobre a séries de potências de dois no tabuleiro de xadrez e outros métodos

De facto é proposto que se some a sequência de potências de dois num tabuleiro de xadrez usando o método da duplicação ...

Problema 2 - sobre duplicando grãos de cereal

E queres duplicar, começando por um grão de cereal no primeiro quadrado, e queres saber quantos navios são necessários para transportar o cereal. Cada navio carregará 500 *modias* pisanas, cada uma das quais são 24 *sestari*, cada um dos quais pesa 140 pounds, cada um dos quais pesa 12 onças, cada uma das quais pesa 25 *péni*, cada péni pesa 6 *carobs* cada um *carob* pesa 4 grão de cereal.

(a partir da tradução de Sigler)

Problema 3

Um certo homem pôs um denário a uma razão tal que em cinco anos ele tem dois denários e em cada cinco anos subsequentes o dinheiro duplica. Quantos denários lucra a partir deste denário em 100 anos?

Problema 4

Há sete velhas mulheres na estrada para Roma;
cada mulher tem sete mulas;
cada mula carrega sete sacos;
cada saco contém sete pães;
e com cada pão estavam sete facas;
e cada faca está colocada em sete bainhas;
quantos há ao todo na estrada para Roma?

(citados por King)

Problema 5

Existe uma árvore com 100 ramos, cada ramo tem 100 ninhos, cada ninho 100 ovos, cada ovo 100 pássaros. Quantos ramos, árvores, ovos e pássaros existem?

(citado por John Fauvel et al.)

Problemas dos capítulos 13 e 15

Capítulo 13 - sobre o método *elchataim* [dupla falsa posição] e como com ele quase todos os problemas são resolvidos

Neste capítulo Leonardo de Pisa resolve um grande número de problemas, alguns já resolvidos, por outros métodos, em capítulos anteriores, pelo método da falsa posição.

Problema 13 - sobre dois pássaros

Dois pássaros começam a voar do topo de duas torres a 50 “pés” de distância, uma tem 30 “pés” de altura, a outra “40 pés” de altura, começando ao mesmo tempo e voando à mesma velocidade. Chegam ao centro de uma fonte entre as duas torres ao mesmo tempo. A que distância está a fonte de cada uma das torres?

(citado por Burton)

Capítulo 15 - sobre regras geométricas e sobre problemas de álgebra e *almuchabala*

Este capítulo está dividido em três partes:

Primeira parte - sobre proporções de três e quatro quantidades;
Segunda parte - sobre a solução de certos problemas geométricos;
Terceira parte - sobre o método de álgebra e *almuchabala*. É nesta terceira parte que Leonardo de Pisa discute a resolução de "equações do segundo grau".

Parte 2 - Problemas pertinentes da geometria

Problema 1

Há um poste inclinado de encontro a uma certa torre, tendo 20 «pés» de comprimento; a base do poste está separado da torre em 12 «pés». Procura-se, quantos pés o fim do poste está abaixo do topo da torre.

Problema 2

Num determinado chão estão dois postes, que estão afastados, apenas, 12 «pés». O poste mais pequeno tem de altura 35 «pés», e o maior 40 «pés». Procura-se, se o poste maior cair sobre o mais pequeno, então em que parte dele [do poste maior] tocará no mais pequeno.

O problema 3 é o mesmo que o problema 13 do capítulo 13.

Problema 10

Um certo homem tem uma peça de material que tem 100 cúbitos de comprimento e 30 cúbitos de largura, do qual quer fazer panos de linho, cada um dos quais tem de comprimento 12 cúbitos e de largura 5 cúbitos. Donde se procura quantos panos de linho é que ele pode fazer.

Problema 11

Um certo homem recebe num câmbio uma certa caixa cheia de cereal que tinha de cada lado, nomeadamente, largura, comprimento e altura, 16 palmos; aconteceu que a caixa ardeu completamente com fogo; não podemos com esta caixa pagar de volta o cereal; quando o depositante volta para lhe reembolsar o cereal, o homem diz: "Eu tenho uma caixa que tem em cada lado 4 palmos, levas o teu cereal nela." Procura-se, quantas caixas pequenas de cereal deve-lhe pagar.

Problema 12

Há uma cisterna cheia de água que leva 1000 barris, e que tem 20 pés de largura, 24 pés de comprimento e 30 pés de altura. Procura-se que quantidade de água se desloca se uma pedra cúbica, tendo de lado 6 pés, for lançada na água.

Problema 13

Também há uma coluna que tem 11 pés de comprimento e 22 pés de perímetro [de forma cilíndrica] que é lançada para a referida cisterna, ...

Problema 17

Também na mesma cisterna é lançada uma pedra [esférica] com um perímetro de 44 pés ...

Problema 18

Um certo homem construiu um palácio, e para proteger a sua riqueza construiu um armário com 4 triângulos. Cada lado tinha de comprimento 36 palmos, e a sua base tinha 36 palmos, e deu a três mestres a pintura do armário. O primeiro dos quais pintou a sua parte, nomeadamente a terceira parte, começando pela parte de cima do armário e acabando numa linha paralela à base do armário; o segundo empenhou-se na pintura da sua terça parte depois do primeiro; o terceiro pintou o restante. Procura-se, quanto cada um pintou da linha ascendente do triângulo, quando é proposto que cada um pinte a terça parte do triângulo.

(a partir da tradução de Sigler)