

# Histórias de Fracções

António Pereira Rosa

*E. S. Maria Amália Vaz de Carvalho*

Jorge Nuno Silva

*Dep. de Matemática da Faculdade de  
Ciências da Universidade de Lisboa*

## 1. Introdução

No Módulo Inicial do programa de Matemática A do 10º ano surge uma lista de problemas que têm o objectivo de “... consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais adquiridos no 3º ciclo de modo tanto a detectar dificuldades em questões básicas como a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o Ensino Secundário.” ([PA], pág. 23). Os problemas são apresentados a título exemplificativo, podendo ser substituídos por outros que o professor ache convenientes para os fins em vista. Dos cinco problemas da lista, três são de carácter geométrico (obtenção de um paralelogramo quando se unem os pontos médios dos lados de um quadrilátero, existência de apenas cinco sólidos platónicos e uma questão de semelhanças aplicadas a um problema da “vida real”, com garrafas) e os restantes dois são mais “algébricos”, estando um relacionado com a história da Matemática (métodos usados por Pedro Nunes para a resolução de equações do primeiro e segundo grau) e o último com fracções. Foi precisamente este que chamou particularmente a nossa atenção, pois pareceu-nos levantar questões interessantes e nada triviais, muito para além do que seria de esperar num problema proposto a nível de 10º ano. O seu enunciado completo é o seguinte:

“Que números racionais são representáveis por dízimas finitas? Qual a dimensão do período de uma dízima infinita periódica?”

Sucede que, enquanto a primeira questão pode ser tratada facilmente a nível do Ensino Secundário, é muito mais difícil dar uma resposta satisfatória à segunda; na verdade, a primeira está relacionada com os primos que surgem na factorização do denominador da fracção em causa, ao passo que no estudo da segunda há necessidade de utilizar conceitos e processos mais avançados, como a ordem de um elemento num grupo ou o Teorema de Fermat-Euler, que são normalmente estudados no Ensino Superior, em Álgebra ou Teoria de Números.

Começaremos por analisar as abordagens do assunto por parte de alguns manuais do Ensino Secundário existentes no mercado e procuraremos em seguida responder às duas questões do problema.

## 2. Algumas abordagens do problema

Para facilitar a análise, vamos chamar questão A à pergunta “Que números racionais são representáveis por dízimas finitas?” e questão B a “Qual a dimensão do

período de uma dízima infinita periódica?”. Pelo mesmo motivo, vamos referenciar na tabela 1 a seguir os diversos manuais da disciplina de Matemática A por nós consultados.

[StAubyn]	Aubyn, M. St., Brito, C. e Martins, C. (2003) – <i>Mat 10</i> , parte 1, Lisboa Editora, Lisboa
[Bernardes]	Bernardes, A., Loureiro, C., Viana, J. P. e Bastos, R. (2003) – <i>Matemática 10</i> , vol. 1 ( <i>Resolução de Problemas/Geometria</i> ), Edições Contraponto, Porto.
[Costa]	Costa, B., Rodrigues, M. E. e Resende, (2003) – <i>Espaço 10</i> , Edições ASA, Porto.
[Gomes]	Gomes, F., Viegas, C. e Lima, Y. (2003) – <i>XeqMat 10º ano</i> , vol. 1, Editorial O Livro, Lisboa.
[Jorge]	Jorge, A., Alves, C., Fonseca, G., Barbedo, J. (2003) – <i>Infinito 10A</i> , parte 1 (livro do professor), Areal Editores, Perafita.
[Mendes]	Mendes, E., Santos, L. e Inácio, S. (2003) – <i>Matemática A 10º ano</i> , Constância Editora, Carnaxide.
[Neves]	Neves, M. e Guerreiro, L. (2003) – <i>Matemática A 10º ano (Geometria I)</i> , Porto Editora, Porto.
[Soveral]	Soveral, A. e Silva, Carmen (2003) – <i>Matemática 10º ano</i> , vol. 1, Texto Editora, Lisboa.

Tabela 1

Em alguns destes manuais ([StAubyn], [Neves], [Soveral] e [Mendes]), os autores optaram por não abordar explicitamente os problemas A e B, o que é perfeitamente legítimo, como já referimos, limitando-se a algumas referências a fracções, dízimas finitas e infinitas, números racionais e irracionais. Quanto aos restantes:

- [Gomes] aborda brevemente o problema A, essencialmente à base de exemplos, deixando como exercício provar que as fracções cujo denominador é produto de potências de base 2 ou 5 originam sempre dízimas finitas;
- a abordagem feita em [Costa] é também sucinta mas muito interessante, especialmente no que se refere ao problema B: dada uma fracção irredutível  $a/b$ , correspondente a uma dízima infinita periódica, procura levar os alunos a uma majoração do comprimento do período, considerando os restos possíveis da divisão de  $a$  por  $b$ ; trata-se, em nossa opinião, de um bom exemplo de uma situação em que, não sendo capazes de obter a solução exacta de um problema, somos no entanto capazes de a limitar, o que é muito instrutivo;
- em [Bernardes], dedica-se bastante atenção ao problema A, por meio de exemplos, chegando-se a conclusões semelhantes às de [Gomes]; refira-se, no entanto, que, para simplificar, só se consideram fracções de numerador 1 (o que evita problemas com fracções não irredutíveis...). O problema B apenas é aflorado, dando-se exemplos de casos em que o período tem comprimento máximo ( $1/7$ ) e casos em que não tem ( $1/11$ ); num dos exercícios, pede-se para estimar o comprimento máximo da dízima de algumas fracções. O que distingue esta obra das anteriores é uma maior insistência no uso das calculadoras, bem

como uma grande atenção ao problema da passagem de dízima a fracção, quer por via algébrica (a título de exemplo, seja  $x = 0,(\overline{5})$ ; então  $10x = 5,(\overline{5})$  e, subtraindo ordenadamente a primeira igualdade da segunda, vem  $9x = 5$ , donde  $x = 5/9$ ), quer usando a instrução [MATH] **Frac** das calculadoras da Texas Instruments. Recomenda-se, no entanto, alguma cautela no uso desta opção<sup>1</sup>.

- finalmente, consideremos o manual [Jorge]. Nele surge aquela que é, de longe, a abordagem mais completa do problema das fracções. Na forma de um diálogo entre dois alunos, um dos quais “tem um segredo: gosta de fracções”, são considerados os problemas A e B e a passagem de dízima a fracção. Depois de algumas revisões sobre a correspondência “número racional  $\leftrightarrow$  dízima finita ou infinita periódica” e “número irracional  $\leftrightarrow$  dízima infinita não periódica”, estabelece-se a propriedade de que as dízimas finitas são equivalentes a fracções com denominadores do tipo  $2^\alpha \times 5^\beta$  e considera-se em seguida o seu recíproco. Assinala-se a conveniência de trabalhar com fracções irredutíveis e aborda-se em seguida o problema B, chegando-se a conclusões análogas às de 2. Trata-se também do problema da passagem de dízima a fracção, por via algébrica. Ao longo do texto, tocam-se assuntos menos vulgares, como a noção de “cauda de noves”, que permite reduzir as dízimas finitas a dízimas infinitas periódicas (por exemplo,  $0,5 = 0,499999999\dots$ ), a de *anteperíodo* (sequência de algarismos começando imediatamente a seguir à vírgula decimal e terminando imediatamente antes do início do período; por exemplo, em  $0,8(3)$ , 8 é o anteperíodo). Dá-se ainda um exemplo de números cíclicos (embora sem usar o nome), um tópico importante em Matemática Recreativa, a propósito do estudo de  $1/7$  (veja-se [GM]). Todo o diálogo é acompanhado de observações e sugestões pertinentes e não falta uma referência à dificuldade de usar as máquinas de calcular habituais para o estudo dos períodos das dízimas.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> A título de exemplo de resultados absurdos originados por um uso menos cuidadoso, vamos mostrar como se pode representar um número irracional por uma fracção (!!!) usando uma TI-83: se na calculadora, procurarmos o valor de  $\sqrt{\underbrace{0,2500000000000001}_{\text{onze zeros entre o 5 e o 1}}}$  obtemos 0.5, que é transformado em  $1/2$  pela instrução [MATH] **Frac**; porém  $\sqrt{0,2500000000000001}$  é irracional, como se pode ver reparando que  $\sqrt{0,2500000000000001} = \frac{\sqrt{2500000000000001}}{10^7}$  e que este último radicando é igual

ao produto dos factores primos 13, 41 e 46904315197.

<sup>2</sup> O facto de as máquinas de calcular usuais apresentarem os resultados com um máximo de apenas 10 casas decimais pode levar os alunos a concluir erradamente que há fracções às quais correspondem dízimas infinitas não periódicas. Isso pode acontecer com fracções tão simples como  $1/17 = 0,(0588235294117647)$ , obtendo-se na TI-83  $1/17 = 0,0588235294$ , sugerindo a inexistência de período; veremos mais adiante como se pode resolver este problema.

### 3. Representação de números reais por dízimas

No estudo das dízimas como é habitualmente feito no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário, há uma certa ambiguidade, relacionada com as chamadas “caudas de noves”. A título de exemplo, consideremos o número  $1/2$ . Tem-se por um lado  $1/2 = 0,5$  (dízima finita) e por outro lado  $1/2 = 0,499999999\dots$  (dízima infinita periódica). Assim, a um mesmo número podem corresponder duas dízimas, que são *distintas*, no sentido de que as sucessões de dígitos que as formam são diferentes. Seria naturalmente conveniente tentar evitar este tipo de problemas, de forma a existir uma correspondência biunívoca entre os números reais e as dízimas. Com este fim em vista, vamos analisar com algum pormenor em que consiste a representação de números reais por dízimas.

No que se segue, vamos representar por  $\lfloor \alpha \rfloor$  a *parte inteira* (também conhecida por *característica*) do número real  $\alpha$ ; trata-se de uma notação usual em Teoria de Números e parece-nos ser melhor que o  $C(\alpha)$  ou o  $I(\alpha)$  vulgarmente utilizados no Ensino Secundário (para não falar no  $\text{Int}(\alpha)$  das máquinas CASIO ou o  $\text{iPart}(\alpha)$  das TEXAS...)

Seja então  $\alpha$  um número real positivo; ele pode obviamente ser escrito na forma  $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor + x$ , com  $0 \leq x < 1$ . Supondo que  $\lfloor \alpha \rfloor > 0$ , existirá certamente um inteiro não negativo  $n$  tal que  $10^n \leq \lfloor \alpha \rfloor < 10^{n+1}$  e então, dividindo por  $10^n$ , segue-se que  $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 10^n + X_1$ , com  $0 < A_1 = \lfloor 10^{-n} \alpha \rfloor < 10$  e  $0 \leq X_1 < 10^n$ . Por aplicação sucessiva do algoritmo da divisão, vamos obter

$$\begin{aligned} X_1 &= A_2 10^{n-1} + X_2, & 0 \leq A_2 < 10, & 0 \leq X_2 < 10^{n-1} \\ X_2 &= A_3 10^{n-2} + X_3, & 0 \leq A_3 < 10, & 0 \leq X_3 < 10^{n-1} \\ & & \vdots & \\ X_{n-1} &= A_n 10 + X_n, & 0 \leq A_n < 10, & 0 \leq X_n < 10 \\ X_n &= A_{n+1}, & 0 \leq A_{n+1} < 10. & \end{aligned}$$

Tem-se assim a representação  $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 10^n + A_2 10^{n-1} + \dots + A_n 10 + A_{n+1}$ , que se costuma abreviar para  $\lfloor \alpha \rfloor = A_1 A_2 \dots A_n A_{n+1}$ , com  $A_1 \neq 0$ ,  $0 \leq A_i < 10$ ; isto é apenas a representação habitual de um número inteiro em base 10.

Passemos ao tratamento da *parte fraccionária* (ou *mantissa*),  $x$ . O processo é muito semelhante ao anterior, embora mais complexo. As justificações das considerações um pouco mais delicadas sobre convergência e correspondência entre dízimas e números reais que vamos fazer em seguida poderão ser omitidas numa primeira leitura.

Sejam  $x = f_1$  e  $a_1 = \lfloor 10 f_1 \rfloor$ ;  $a_1$  é um número inteiro não negativo inferior a 10, pelo que podemos escrever  $10 f_1 = a_1 + f_2$ , sendo  $0 \leq f_2 < 1$ . Repetindo o processo, tem-se

$a_2 = \lfloor 10f_2 \rfloor$ ,  $10f_2 = a_2 + f_3$ , sendo  $0 \leq f_2 < 1$  e  $a_2$  um número inteiro não negativo inferior a 10.

$a_3 = \lfloor 10f_3 \rfloor$ ,  $10f_3 = a_3 + f_4$ , sendo  $0 \leq f_3 < 1$  e  $a_3$  um número inteiro não negativo inferior a 10.

e assim sucessivamente.

Se representarmos por  $x_m$  a soma  $\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m}$ , podemos escrever

$$x = x_m + g_{m+1}$$

com

$$0 \leq g_{m+1} = \frac{f_{m+1}}{10^m} < \frac{1}{10^m}.$$

Associámos assim ao número  $x$  a dízima  $0, a_1 a_2 \dots$ . Como se tem  $0 \leq a_i \leq 9$  para todo o  $i$  e  $\lim_{m \rightarrow +\infty} g_{m+1} = 0$ , a série

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i}$$

converge para  $x$ . Escreve-se então  $x = 0, a_1 a_2 \dots$ , como é usual. Qualquer dízima deste género representa um número real entre 0 e 1, mas há um tipo de dízima que o processo descrito não pode gerar, a saber, as dízimas que contêm uma “cauda de noves”. Com efeito, tem-se

$$g_{m+1} = \sum_{i \geq m+1} \frac{a_i}{10^i} < \frac{1}{10^m} = \sum_{i \geq m+1} \frac{9}{10^i}$$

e portanto não podemos ter uma infinidade de dígitos 9 consecutivos a partir de nenhuma ordem. Desta observação vai decorrer que a dízimas diferentes correspondem números diferentes: suponhamos, com vista a um absurdo, que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{10^i}$$

e que existia um índice  $n$  para o qual se tinha  $a_n \neq b_n$ . Seja  $N$  o menor índice para o qual  $a_N \neq b_N$ . Então  $|a_N - b_N| \geq 1$  e vem

$$0 = \left| \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a_i}{10^i} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{b_i}{10^i} \right| \geq \frac{1}{10^N} - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{|a_i - b_i|}{10^i} \geq \frac{1}{10^N} - \sum_{i=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^i} = 0,$$

o que implica a existência de uma “cauda de noves” ( $a_n - b_n = 9$  ou  $a_n - b_n = -9$ , para  $n \geq N$ ), o que já vimos ser impossível.

Combinando as expressões obtidas anteriormente para as partes inteira e fraccionária, podemos resumir as nossas conclusões no seguinte teorema:

### **Teorema 1**

Qualquer número real positivo  $\alpha$  pode ser escrito na forma de uma dízima

$$A_1 A_2 \dots A_{n+1}, a_1 a_2 \dots,$$

com  $0 \leq A_i < 10$ , ( $1 \leq i \leq n+1$ ) e  $0 \leq a_i < 10$ , para todo o natural  $i$ . Existe pelo menos um  $A_i$  não nulo e uma infinidade dos  $a_i$  é diferente de 9. A correspondência acima obtida entre os números reais positivos e as dízimas é biunívoca<sup>3</sup>.

Vejamos a título de exemplo a representação de  $\alpha = \frac{23}{20}$ . Extraíndo a parte inteira,

$$\alpha = \frac{23}{20} = 1 + \frac{3}{20}; \quad A_1 = 1 \text{ e } x = \frac{3}{20}. \text{ Segue-se que } 10x = 1,5, \text{ donde } a_1 = 1, f_1 = 0,5.$$

Agora  $10f_1 = 5$ , logo  $a_2 = 5$  e  $f_2 = 0$ . Tem-se finalmente  $\alpha = \frac{23}{20} = 1,15$ . Voltamos a salientar que, tendo em conta o processo de representação que descrevemos, seria *incorrecto* escrever  $\alpha = \frac{23}{20} = 1,149999999\dots$ <sup>4</sup>.

## **4. Período de uma fracção**

Comecemos por reparar que, no estudo do período de uma fracção  $p/q$ , podemos sempre supor que  $p/q$  é uma fracção própria irredutível, isto é, que  $0 < p < q$ , com  $p$  e  $q$  primos entre si, por redução à infíma espécie e extração da parte inteira. Por exemplo,

$$\frac{442}{88} = \frac{221}{44} = 5 + \frac{1}{44}.$$

Vamos referir brevemente algumas definições e resultados de Teoria dos Números que serão necessários no seguimento.

<sup>3</sup> A título de curiosidade, referimos que esta correspondência, que pode ser feita em outras bases além da base 10, pode ser usada para definir funções sobre os números reais operando sobre os dígitos das dízimas que os representam, permitindo a construção de certos “monstros” da Análise, como funções contínuas em  $\mathbb{R}$  sem derivada finita em nenhum ponto e linhas contínuas que preenchem um quadrado. Veja-se [GN] para mais detalhes.

<sup>4</sup> A discussão do problema das “caudas de noves” que apresentámos é demasiado complicada para ser feita a nível do Ensino Secundário; assim, se se pretender abordar este assunto, somos da opinião que a não consideração de “caudas de noves” deverá ser apresentada como uma *convenção* destinada a assegurar que a cada fracção corresponde uma única dízima.

Dado um número natural  $n$ , representa-se por  $\varphi(n)$  a quantidade de números naturais menores que  $n$  primos com  $n$ . Simbolicamente,

$$\varphi(n) = \#\{m \in \mathbb{N} : m < n \wedge \text{mdc}(m, n) = 1\}.$$

Define-se assim uma função natural de variável natural que goza das seguintes propriedades:

1.  $\varphi(1) = 1$
2. Se  $n > 1$ ,  $\varphi(n) \leq n - 1$ , tendo-se a igualdade se e só se  $n$  é primo.
3. Se  $\text{mdc}(a, n) = 1$ , então  $a^{\varphi(n)}$  dá resto 1 na divisão por  $n$  (teorema de Fermat-Euler).
4. Se  $v$  é o menor número natural tal que  $a^v$  dá resto 1 na divisão por  $n$ , então  $v$  divide  $\varphi(n)$ ;  $v$  diz-se a *ordem* de  $a$  módulo  $n$ .
5. Se  $n$  é um número natural maior que 1, e  $p_1, \dots, p_r$  os seus factores primos, então

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

As justificações das propriedades 1. e 2. são muito simples e ficam ao cuidado do leitor; quanto ao teorema de Fermat-Euler e à propriedade 5., a sua demonstração pode ser vista em qualquer tratado de Teoria de Números<sup>5</sup>. Provaremos apenas a propriedade 4.

#### **Demonstração da propriedade 4.**

Pelo algoritmo da divisão, existem  $q$  e  $r$  naturais tais que  $\varphi(n) = q \times v + r$ , com  $0 \leq r < v$ . Vem então  $a^r = a^{\varphi(n) - q \times v} = a^{\varphi(n)} : (a^v)^q = 1 : 1^q = 1$  e como  $v$  é o menor número natural tal que  $a^v$  dá resto 1 na divisão por  $n$ , tem de ser  $r = 0$ , e portanto  $v$  divide  $\varphi(n)$ , como queríamos.

O resultado principal desta secção é o seguinte:

#### **Teorema 2**

Seja  $x = p/q$  uma fracção própria irredutível. Então:

1. a dízima correspondente é finita se e só se  $q$  não admite outros factores primos para além de 2 e 5; mais precisamente, se  $q = 2^\alpha 5^\beta$ , então a dízima termina após  $c$  dígitos, sendo  $c = \max(\alpha, \beta)$ .

---

<sup>5</sup> Sugerimos em particular a leitura do artigo [OP], que aborda também uma generalização do teorema de Fermat-Euler devida ao matemático português Daniel Augusto da Silva.

2. se  $\text{mdc}(q, 10) = 1$ , a dízima é infinita periódica com período  $v$ , sendo  $v$  o menor número natural tal que o resto de  $10^v$  na divisão por  $q$  é igual a 1;  $v$  é pois a ordem de 10 módulo  $q$ , na terminologia<sup>6</sup> da propriedade 4.
3. se  $q = 2^\alpha 5^\beta Q$ , sendo  $Q$  um número natural maior que 1 e primo com 10, a dízima é periódica mista, com um período de  $v$  algarismos e um anteperíodo de  $c$  algarismos, onde  $v$  e  $c$  têm os mesmos significado que em 2. e 1.

### Demonstração

1.

É óbvio que a dízima correspondente a  $x = p/q$  termina se e só se existir um número natural  $n$  tal que  $10^n x$  seja um número inteiro. Então, se  $q = 2^\alpha 5^\beta$ , basta considerar  $n = \max(\alpha, \beta)$  para se obter o resultado. Reciprocamente, se na decomposição em factores de  $q$  surgir um primo  $p_1$  distinto de 2 e 5, a dízima não pode ser finita; com efeito, se existisse um natural  $n$  tal que  $10^n \frac{p}{q} = k \in \mathbb{N}$ , viria  $10^n p = k \times q$  e  $p_1$  divide

o segundo membro sem dividir o primeiro (não esquecer que supomos  $\text{mdc}(p, q) = 1$ ), o que é absurdo.

Deixamos ao cuidado do leitor a justificação da observação relativa ao comprimento da dízima.

2.

Suponhamos agora que  $\text{mdc}(q, 10) = 1$ . Seja  $v$  a ordem de 10 módulo  $q$  (cuja existência é garantida pelo Teorema de Fermat-Euler). Pondo de novo  $x = p/q$ , vem, para um certo inteiro  $m$ ,  $10^v = mq + 1$  e então,

$$10^v x = 10^v \frac{p}{q} = \frac{(mq+1)p}{q} = mp + \frac{p}{q} = mp + x;$$

porém, na notação usada na secção anterior, tem-se

$$10^v x = 10^v (x_v + g_{v+1}) = 10^v x_v + 10^v g_{v+1} = 10^v x_v + f_{v+1}.$$

Como  $0 < x < 1$ , segue-se que  $f_{v+1} = x$  e o processo de obtenção da dízima de  $x$  repete-se a partir de  $f_{v+1} = x$ . A dízima de  $x$  é pois periódica, com período no máximo de comprimento  $v$ .

Por outro lado, dada uma dízima infinita periódica  $0, (a_1 \dots a_k)$ , tem-se que

---

<sup>6</sup> Na linguagem da Álgebra Moderna, trata-se da ordem do elemento 10 no grupo das unidades do semigrupo multiplicativo do anel  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, +, \times)$ , com as operações usuais entre classes de congruências; faz sentido considerar esta ordem já que  $\text{mdc}(q, 10) = 1$ .



$$\begin{aligned}
0,(a_1 \dots a_k) &= \left( \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_k}{10^k} \right) \left( 1 + \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \dots \right) \\
&= \frac{a_1 10^{k-1} + a_2 10^{k-2} + \dots + a_k}{10^k - 1} \\
&= \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

para certos números naturais  $p$  e  $q$ , primos entre si.

Como  $q$  divide  $10^k - 1$ , segue-se que  $q \geq v$ , já que  $v$  é, por definição, o menor natural com esta propriedade. Portanto, a dízima é periódica com comprimento igual à ordem de 10 módulo  $q$ .

3.

Para terminar, examinemos o caso em que  $x = p/q$ , com  $q = 2^\alpha 5^\beta Q$ , sendo  $Q$  um número natural maior que 1 e primo com 10.

Seja  $v$  a ordem de 10 módulo  $q$  e  $c = \max(\alpha, \beta)$ . Então

$$10^c x = \frac{10^c p}{2^\alpha 5^\beta Q} = X + \frac{p'}{Q}$$

com  $X$  inteiro,  $0 \leq X < 10^v$ ,  $0 < p' < Q$  e  $\text{mdc}(p', Q) = 1$ .

Supondo que  $X > 0$ ,  $X$  pode representar-se na base 10, digamos  $X = A_1 A_2 \dots A_{n+1}$ ; atendendo ao caso 2., a fracção  $p'/Q$  é periódica de período  $v$  e portanto podemos escrever

$$10^v x = A_1 A_2 \dots A_{n+1}, (a_1 \dots a_v)$$

donde  $x = 0, b_1 b_2 \dots b_c, (a_1 \dots a_v)$ , sendo  $b_c = A_{n+1}$ ,  $b_{c-1} = A_n$ , etc.

A recíproca, isto é, que uma dízima desta forma representa uma fracção com denominador da forma  $2^\alpha 5^\beta Q$ , é evidente, concluindo-se assim a demonstração do Teorema 2.

A título de exemplo deste terceiro caso, seja  $x = 3/140$ . Como  $140 = 2^2 \times 5^1 \times 7$ , tem-se  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$ ,  $Q = 7$ ; vem  $c = \max(\alpha, \beta) = 2$ . Então,  $10^2 x = 15/7 = 2 + 1/7$  e dividindo por 100 e tendo em conta que  $1/7 = 0,(142857)$ , obtemos  $3/140 = 0,02(142857)$ .

### Observações

1. A hipótese de a fracção ser irredutível é imprescindível: por exemplo, o denominador de  $3/30$  admite o factor primo 3 e a dízima correspondente é finita.

2. As conclusões elementares sobre o comprimento do período referidas nos livros analisados na secção 2. são consequências imediatas do Teorema 2.

3. De acordo com o Teorema 2, o tipo de dízima, bem como o *comprimento do período*, quando este existe, depende apenas do denominador da fracção; o numerador não tem qualquer influência. Para vermos que o período, *entendido como sequência de algarismos*, depende também do numerador, basta considerar os períodos das fracções próprias de denominador 7, que exibem uma notável regularidade (permutação cíclica):

$$1/7 = 0,(142857)$$

$$2/7 = 0,(285714)$$

$$3/7 = 0,(428571)$$

$$4/7 = 0,(571428)$$

$$5/7 = 0,(714285)$$

$$6/7 = 0,(857142)$$

O caso geral (Qual a relação entre as sequências de algarismos que formam os períodos das fracções do tipo  $p/q$ , com  $1 \leq p \leq q-1$  e  $\text{mdc}(10, q) = \text{mdc}(p, q) = 1$ ?) é um problema mais complicado e muito interessante, que não vamos abordar aqui; o leitor interessado pode consultar [Ore].

## 5. Alguns aspectos computacionais

Nesta secção, vamos abordar alguns problemas de cálculo decorrentes do estudo da dízima correspondente a uma fracção dada; mais concretamente, veremos como calcular o comprimento do período e obter a sequência de algarismos que o formam, quando se verifica a segunda ou a terceira hipótese do Teorema 2 da secção anterior.

O primeiro problema a considerar é o da simplificação da fracção, se tal for necessário; para tanto basta determinar o máximo divisor comum dos termos da fracção, o que não oferece dificuldades de maior<sup>7</sup>. Também é muito fácil ver se o denominador tem ou não outros factores primos além de 2 e 5 (repare-se que para “extrair” os factores 2 e 5 não é, de modo nenhum, necessário proceder à decomposição em factores primos, um problema muito mais difícil). Assim, podemos concentrar-nos na segunda hipótese do Teorema 2, vendo como calcular a ordem de 10 com o denominador como módulo. Seja pois  $q$  um número natural primo com 10; pretendemos determinar o menor natural  $v$  tal que  $10^v$  dá resto 1 ao ser dividido por  $q$ . Recorrendo à linguagem das congruências,  $v = \min\{n \in \mathbb{N} : 10^n \equiv 1 \pmod{q}\}$ . Começemos por observar que a ideia “natural” de ir calculando as sucessivas potências de 10 e dividindo-as por  $q$  até obter resto 1 é computacionalmente desastrosa. Por exemplo, para determinar a ordem de 10 (mod 17) (que é igual a 16) por este processo, seria necessário ver os restos que dão na divisão por 17 os números  $10^1 = 10$ ,  $10^2 = 100$ , ...,  $10^{16} = 10000000000000000$  ! O problema pode ser resolvido com facilidade reparando que se  $10^n \equiv a \pmod{q}$ , então

---

<sup>7</sup> As calculadoras TI – 83 permitem calcular o máximo divisor comum de dois números (função **gcd** do submenu **NUM** do Menu **MATH**). Caso se pretenda fazer a simplificação sem recurso à calculadora, os alunos terão de proceder por tentativas ou determinar o máximo divisor comum dos termos da fracção por decomposição em factores primos, já que desconhecem o algoritmo de Euclides, um processo muito mais “económico” em termo de cálculos.

$10^{n+1} \equiv 10a \pmod{q}$  e reduzindo  $\pmod{q}$  o segundo membro da congruência antes de efectuar a próxima multiplicação por 10. Por exemplo, para calcular a ordem de 10  $\pmod{7}$ , basta reparar que:

$$\begin{aligned} 10^1 &\equiv 3 \pmod{7} \\ 10^2 &\equiv 30 \equiv 2 \pmod{7} \\ 10^3 &\equiv 20 \equiv 6 \pmod{7} \\ 10^4 &\equiv 60 \equiv 4 \pmod{7} \\ 10^5 &\equiv 40 \equiv 5 \pmod{7} \\ 10^6 &\equiv 50 \equiv 1 \pmod{7}, \end{aligned}$$

concluindo-se que a ordem é 6.

O programa seguinte, escrito para a TI – 83, implementa o algoritmo anteriormente descrito.

```
PROGRAM:ORDEM
:ClrHome
:Input "VALOR DE Q?",Q
:1→J
:For(I,1,Q-1)
:10*J-iPart((10*J)/Q)*Q→J
:If J=1
:Then
:Disp"ORDEM=",I
:Stop
:End
:End
```

O programa é muito simples: a partir do valor de  $Q$  (suposto<sup>8</sup> primo com 10), retorna o valor da ordem de 10  $\pmod{Q}$ . O resto da divisão inteira de  $10*J$  por  $Q$  é calculado na linha

$$:10*J-iPart((10*J)/Q)*Q→J$$

e é armazenado na variável  $J$ .

Repare-se que, ao contrário do que poderia parecer natural, não utilizámos  $\varphi(Q)$  como limite superior do ciclo, mas sim  $Q-1$ : de um modo geral, é mais fácil e económico executar mais algumas vezes as instruções do ciclo `For` do que proceder ao cálculo de  $\varphi(Q)$ , um problema que pode ser difícil quando  $Q$  é grande.

---

<sup>8</sup> O programa *não* verifica se  $\text{mdc}(10, Q) = 1$ ; o leitor pode facilmente adaptá-lo de forma a proceder a esta verificação, se assim o desejar.

Resolvido o problema do cálculo do comprimento, vejamos como determinar a sequência de algarismos que forma o período. Tal como anteriormente, a abordagem simples (efectuar a divisão do numerador pelo denominador e ir acrescentando zeros à direita da vírgula) é impraticável, a não ser nos casos mais simples (experimente-se dividir “à mão” 1 por 97...). Mesmo com calculadora, não conseguimos ir muito mais longe por esta via; veja-se o exemplo de  $1/17$ , já referido na nota 2. Apresentamos a seguir, por meio de um exemplo, um artifício que resolve o problema para períodos de comprimento “moderado”.

**Exemplo 1:**

Determinar o período de  $1/17$ .

Usando a TI – 83, tem-se a seguinte aproximação por defeito

$$1/17 \approx 0,0588235294. \tag{1}$$

É fácil ver que o comprimento do período é 16, recorrendo ao programa ORDEM ou então reparando que os possíveis comprimentos são 1, 2, 4, 8 ou 16, os divisores de  $\varphi(17) = 16$ , e que a aproximação acima indicada exclui imediatamente as quatro primeiras possibilidades.

Podemos escrever a igualdade  $1/17 = 0,0588235294 + r$ , com  $r \geq 0$ , donde se conclui que  $r = \frac{1 - 17 \times 0,058833594}{17} = \frac{2 \times 10^{-10}}{17} = \frac{2}{17} \times 10^{-10}$ . Recorrendo de novo à calculadora,

$$2/17 \approx 0,1176470588. \tag{2}$$

Multiplicando ambos os membros de (2) por  $10^{-10}$  e tendo em conta (1), vem que  $1/17 = 0,05882352941176470588\dots$ , ou, atendendo a que o comprimento do período é 16,  $1/17 = 0,(0588235294117647)$ .

Sugerimos ao leitor que determine por este método<sup>9</sup> o período de mais algumas fracções como, por exemplo  $1/29$ ,  $1/31$  ou  $1/97$ .

---

<sup>9</sup> O leitor que queira ver um exemplo dos métodos (frequentemente muito engenhosos) usados para este tipo de cálculos quando não havia meios de cálculo automático pode ler a determinação do período de  $1/97$  em [BA]. A título de curiosidade, refira-se que no século XIX o famoso calculador William Shanks determinou o período de  $1/17389$ , que tem 17388 (!) algarismos e calculou o comprimento dos períodos de todas as fracções do tipo  $1/p$ , para  $p$  primo menor que 120000 (!!).

Se se pretende levar mais além este tipo de estudos, é conveniente dispor de software de computação algébrica, como o **Mathematica**, **Maple** ou **Derive**, que permitem trabalhar com um número (quase) ilimitado de casas decimais. Dado que as nossas Escolas Secundárias não têm, em geral, estes programas, sugerimos em alternativa o programa **Maxima** (ver [TD]), que pode ser obtido *gratuitamente* em <http://maxima.sourceforge.net>. Apresentamos em seguida a determinação do período de  $1/97$  usando o **Maxima**.

```
(C1) fpprec:200;
(D1)                               200
(C2) bfloat(1/97);
(D2) 1.03092783505154639175257731958762886597938144329896907216494845360824742#

26804123711340206185567■0103092783505154639175257731958762886597938144329896907#

21649484536082474226804123711340206185567■010309278B-2
```

(os símbolos ■ foram por nós inseridos para delimitar o período)

A instrução da linha (C1) `fpprec:200;` faz com que o **Maxima** apresente os resultados com 200 algarismos significativos (por defeito, são 16) e a instrução da linha (C2) `bfloat(1/97);` leva a que o resultado da divisão de 1 por 97 seja apresentado em notação científica (os símbolos finais da linha (D2), “B-2”, correspondem ao  $\epsilon-2$  da TI-83).

Como alternativa ao software de computação algébrica geral, podem-se apontar os programas concebidos explicitamente para Teoria de Números, como, por exemplo, o PARI/GP (disponível em <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>). Este é, no entanto, um programa muito sofisticado, destinado essencialmente à investigação, pelo que a sua utilidade no Ensino Secundário é discutível. Apresentamos a seguir o cálculo da ordem de 10 (mod 17389) no PARI.

```
GP/PARI CALCULATOR Version 2.2.8 (development CHANGES-1.887)
i686 running cygwin (ix86 kernel) 32-bit version
compiled: Jan 13 2004, gcc-3.3.1 (cygming special)
(readline v4.3 enabled, extended help available)

Copyright (C) 2003 The PARI Group

PARI/GP is free software, covered by the GNU General Public License, and
comes WITHOUT ANY WARRANTY WHATSOEVER.

Type ? for help, \q to quit.
Type ?12 for how to get moral (and possibly technical) support.

realprecision = 28 significant digits
seriesprecision = 16 significant terms
format = g0.28

parisize = 4000000, primelimit = 500000
(12:59) gp > znorder(Mod(10,17389))
%1 = 17388
(13:00) gp >
```

No exemplo anterior,  $\text{Mod}(10, 17389)$  faz com que o programa considere 10 como elemento do grupo das unidades do semigrupo multiplicativo do anel  $(\mathbb{Z}/17389\mathbb{Z}, +, \times)$ , e  $\text{znorder}$  calcula a ordem deste elemento (veja-se a nota 6). Repare-se que o cálculo, feito num Pentium 4 a 3.0 Ghz é praticamente instantâneo; a TI-83, com o programa ORDEM, leva cerca de 15 minutos para o fazer.

Para terminar, gostaríamos de referir um programa muito interessante, escrito para alunos de um curso básico de Teoria de Números e que possibilita a realização dos vários tipos de cálculos apresentados neste trabalho: o programa **Numbers**, disponível em <http://archives.math.utk.edu/software/msdos/number.theory>. Trata-se de um programa de utilização muito simples, mas que implementa a generalidade dos algoritmos básicos da Teoria de Números, pelo que o aconselhamos vivamente. Tem no entanto um problema: como foi escrito para MSDOS, pode não correr em Windows XP, pelo que o leitor interessado na sua utilização deverá primeiro instalar um emulador de DOS: sugerimos o **DOSBox** com o *frontend* **D-Fend**, disponíveis em <http://dosbox.sourceforge.net/> e <http://members.home.nl/mabus/>, respectivamente.

## 6. Referências

Para além dos vários manuais referidos na tabela 1., as principais obras consultadas foram:

- [BA] Beiler, A. H. (1964) – *Recreations in the Theory of Numbers*, New York, Dover Publications Inc.
- [GM] Gardner, M. (1990) – *Mathematical Circus*, Penguin Books, London.
- [GN] Garcia, N. (1997) – *Do Zero ao Infinito – Tratado Básico de Matemática Aplicada*, Lisboa, Escolar Editora.
- [HW] Hardy, G. H. e Wright, E. M. (1980) - *An Introduction to the Theory of Numbers* (5<sup>th</sup> edition), Oxford University Press, Oxford.
- [OP] Oliveira, P. A. J. (2001) – O teorema de Fermat-Euler-Silva, *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática* n.º. 45, 65-72.
- [Ore] Ore, O. (1948) – *Number Theory and its History*, New York, Dover Publications Inc.
- [PA] Carvalho e Silva, J. (Coord.) et al. (s/d) – *Matemática A 10º ano*, Lisboa, Ministério da Educação - Departamento do Ensino Secundário (disponível em [www.mat-no-sec.org](http://www.mat-no-sec.org))
- [RA] Rosa, A. (2003) – Matemática 10º ano (Programa Ajustado) e Matemática A 10º ano: que diferenças? *Gazeta de Matemática* n.º. 145, 18-21.
- [TD] Torres, D. (2004) – Números Felizes e Sucessões Associadas: Digressões com o **Maple**, *Educação e Matemática* n.º. 77, 35-38.
- [TI] Texas Instruments Inc. (1996) – *Guia da calculadora gráfica TI-83*, Van Gorcum, Assen, the Netherlands.