

Desfechos  
(outcomes)

|  |  |                                       |
|--|--|---------------------------------------|
|  |  | O próximo ganha,<br>quer seja L ou R. |
|  |  | O prévio ganha, quer<br>seja L ou R.  |
|  |  | L ganha (não importa<br>quem começa)  |
|  |  | R ganha (não importa<br>quem começa)  |

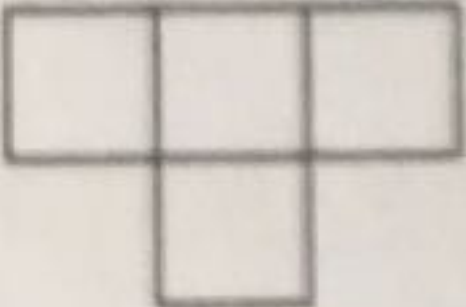
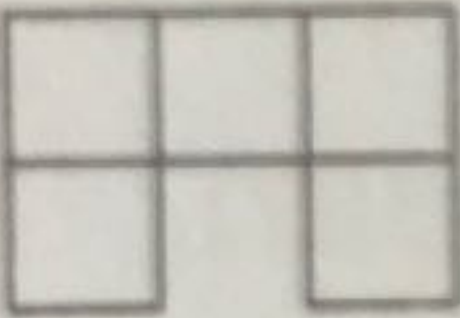
|               |  |                                       |
|---------------|--|---------------------------------------|
| $\mathcal{N}$ |  | O próximo ganha,<br>quer seja L ou R. |
| $\mathcal{P}$ |  | O prévio ganha, quer<br>seja L ou R.  |
| $\mathcal{L}$ |  | L ganha (não importa<br>quem começa)  |
| $\mathcal{R}$ |  | R ganha (não importa<br>quem começa)  |

|               |                    |                                                                     |
|---------------|--------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{N}$ | Confuso<br>(fuzzy) | O próximo ( <b>n</b> ext)<br>ganha, quer seja L ou<br>R.            |
| $\mathcal{P}$ | Zero               | O <b>p</b> révio ( <b>p</b> revious)<br>ganha, quer seja L ou<br>R. |
| $\mathcal{L}$ | Positivo<br>>0     | <b>L</b> ganha (não importa<br>quem começa)                         |
| $\mathcal{R}$ | Negativo<br><0     | <b>R</b> ganha (não importa<br>quem começa)                         |

$$G \geq 0 \quad \text{Left ganha em } 2^\circ$$

$$G \leq 0 \quad \text{Right ganha em } 2^\circ$$

## Exemplos dos quatro desfechos em DOMINÓRIO

| $\mathcal{N}$                                                                       | $\mathcal{P}$                                                                        | $\mathcal{L}$                                                                         | $\mathcal{R}$                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |

**R primeiro**

**R ganha**

**L ganha**

**L primeiro**

L ganha

$\mathcal{N}$

$\mathcal{L}$

**L primeiro**

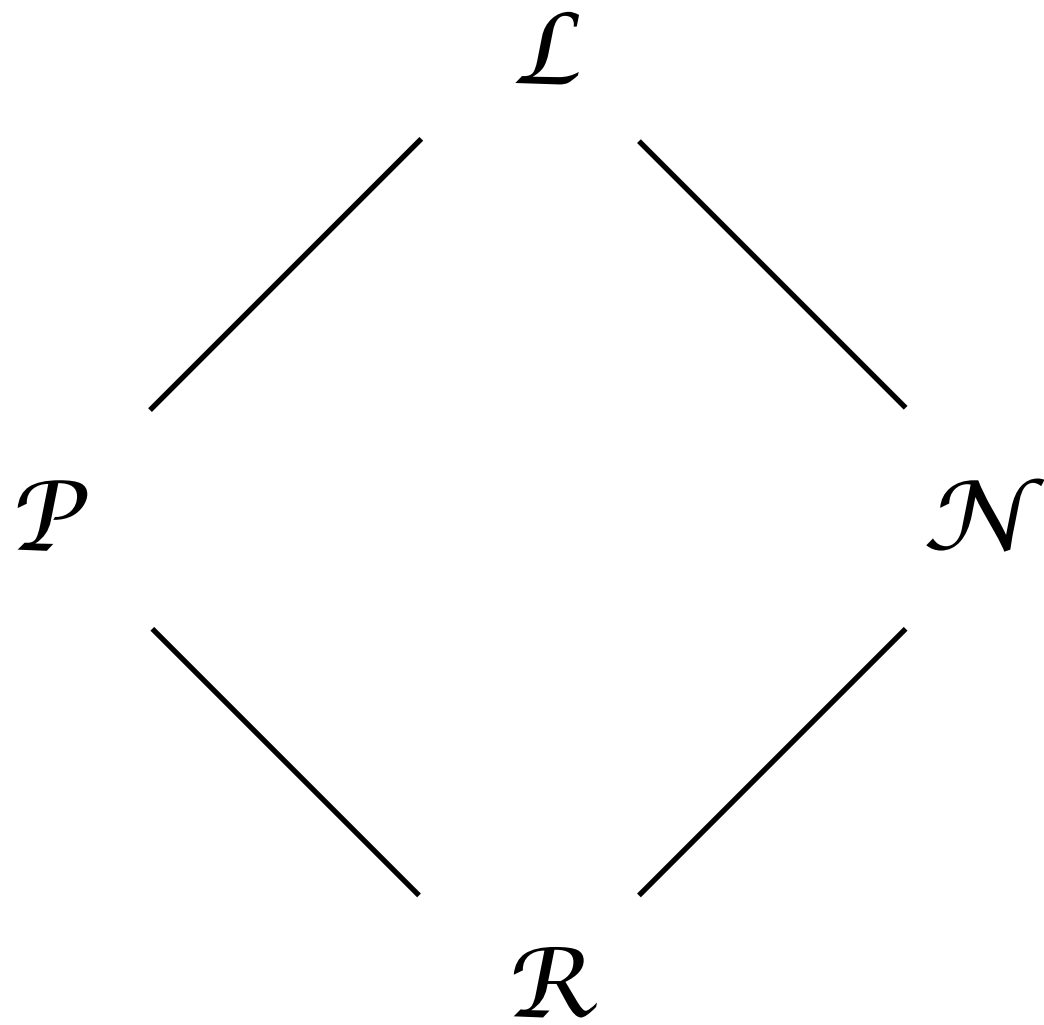
R ganha

$\mathcal{R}$

$\mathcal{P}$



A ordem





$$\{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\}$$

$\mathcal{G}^L$  é o conjunto das opções de L

$\mathcal{G}^R$  é o conjunto das opções de R

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{I} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathbf{I} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{I} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathbf{I} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \mathbf{I} & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

Algumas, ou todas, as opções, podem ser representadas como jogos

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} & \text{White} & \text{Black} \\ \hline \end{array} \right] = \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} & \text{Black} \\ \hline \end{array} \right] \mid \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} \\ \hline \end{array} \right] \right\} \\
 & = \left\{ \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{Black} \\ \hline \end{array} \right] \mid \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} \\ \hline \end{array} \right] \right\} \mid \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} \\ \hline \end{array} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

A notação das barras

$$\left[ \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} & \text{White} & \text{Black} \\ \hline \end{array} \right] = \left\{ \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{Black} \\ \hline \end{array} \right] \mid \left[ \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} \\ \hline \end{array} \right] \parallel \left[ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{Black} & \text{White} & \text{White} \\ \hline \end{array} \right] \right\}$$

O desfecho de um jogo pode ser determinado a partir dos desfechos das opções

|                                                                          |                                                                                                                                                       |               |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
|                                                                          | $\exists \mathcal{G}^R : \mathcal{G}^R \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P} \quad \forall \mathcal{G}^R : \mathcal{G}^R \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ |               |
| $\exists \mathcal{G}^L : \mathcal{G}^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ | $\mathcal{N}$                                                                                                                                         | $\mathcal{L}$ |
| $\forall \mathcal{G}^L : \mathcal{G}^L \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ | $\mathcal{R}$                                                                                                                                         | $\mathcal{P}$ |

Dem. Canto superior direito.

Se L tem uma opção em  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{P}$ , então L tem lance vencedor. Se todas as opções de R estão em  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{N}$ , R não pode vencer.

Logo G está em  $\mathcal{L}$ .

Se G está em  $\mathcal{L}$ , então L ganha jogando 1°. Este lance vitorioso é para um H no qual L ganha em 2°. Logo H está em  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{P}$ . Como L ganha em G em 2°, R não tem lance bom, pelo que todas as suas opções estão em  $\mathcal{L}$  ou  $\mathcal{N}$ .

Nota: as folhas (posições terminais) das árvores dos jogos estão em  $\mathcal{P}$ .

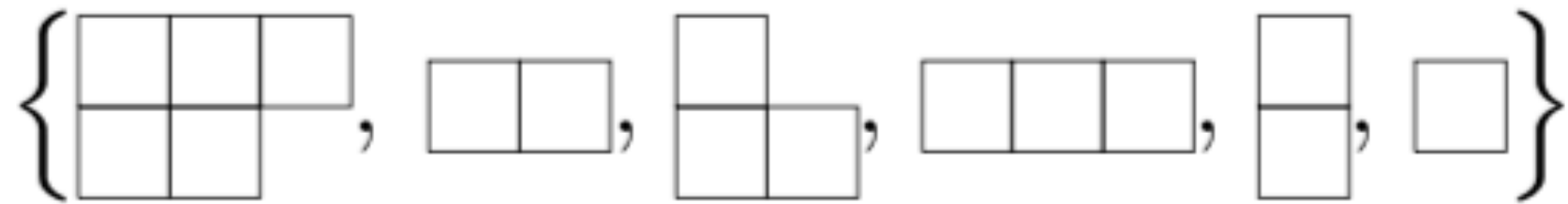
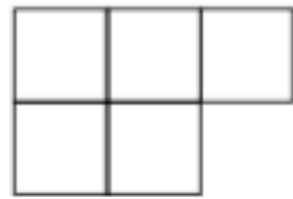
(as opções, que não existem, verificam tudo)

Def: As *posições* de um jogo são ele mesmo e todas as opções possíveis de atingir em 1 ou mais lances (mesmo sem alternância)

As posições de 

$\left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{---} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{---} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \text{---} & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{I} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \\ \hline \text{---} & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \text{---} & \\ \hline \text{---} & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{II} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{I} & \text{---} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right\}$

As posições de

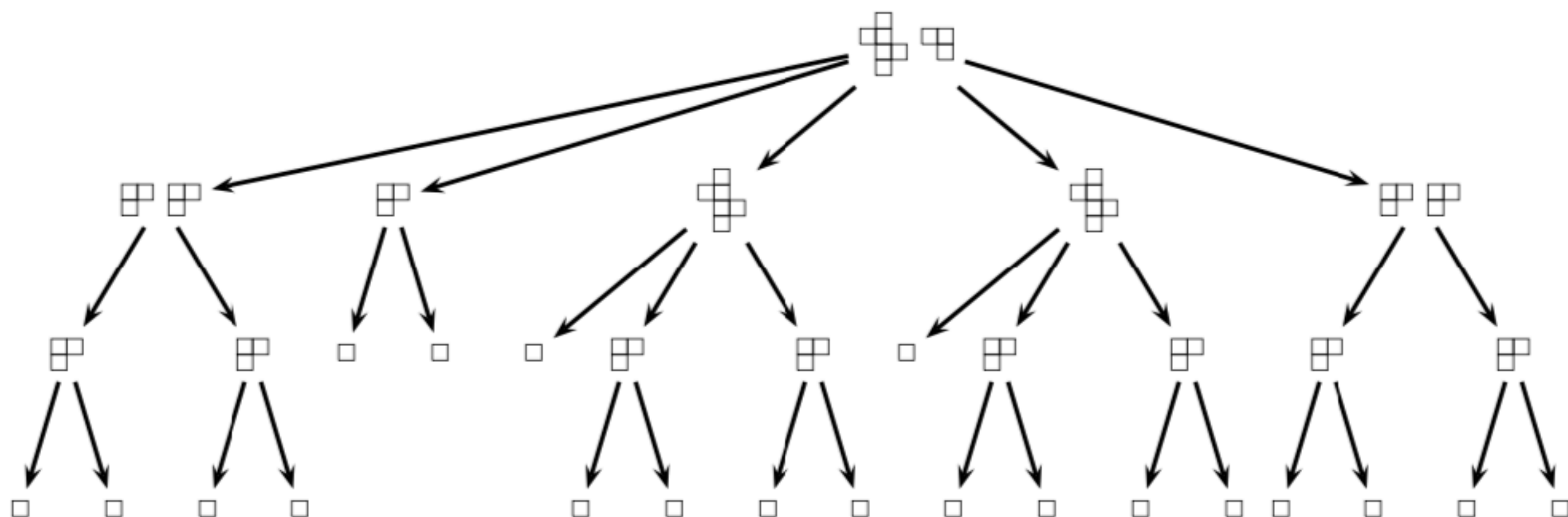


Vejam os agora uma árvore

# Desfechos numa árvore



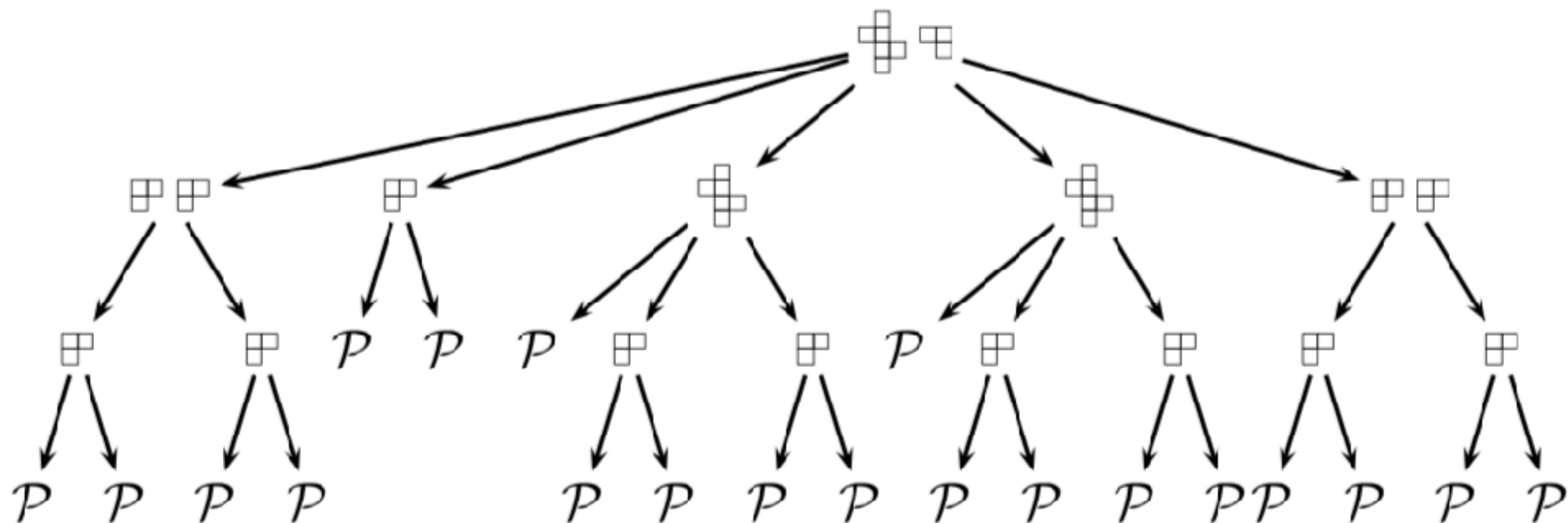




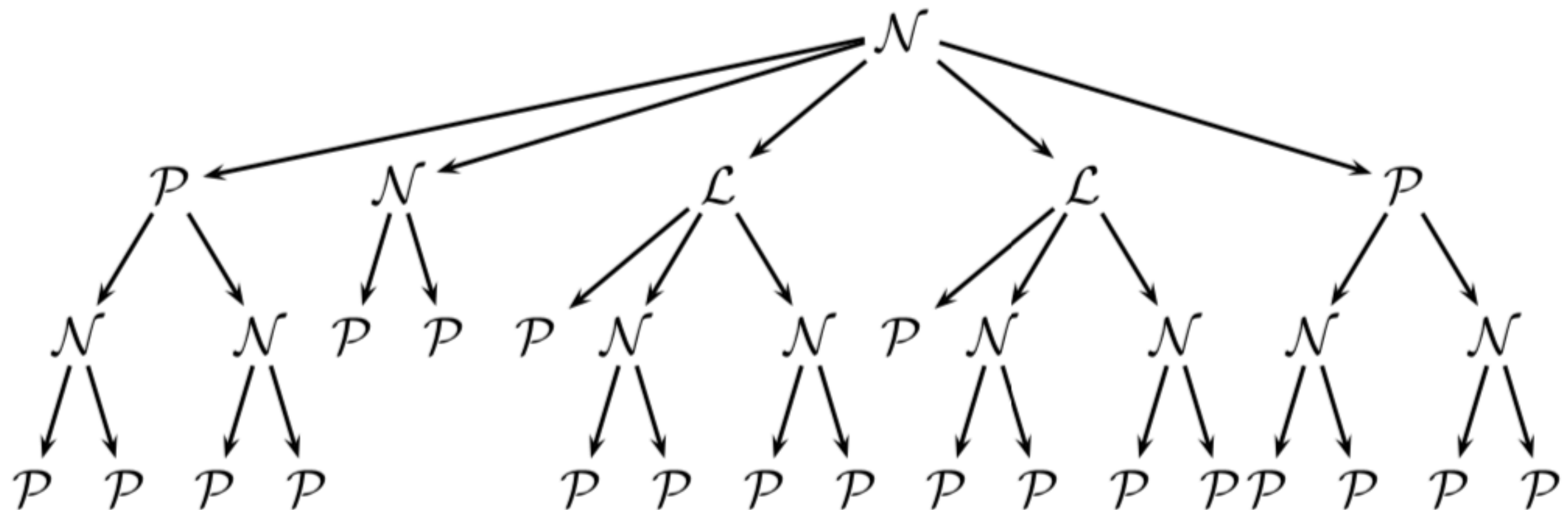
analisemos os desfechos...



as posições terminais estão em  $\mathcal{P}$

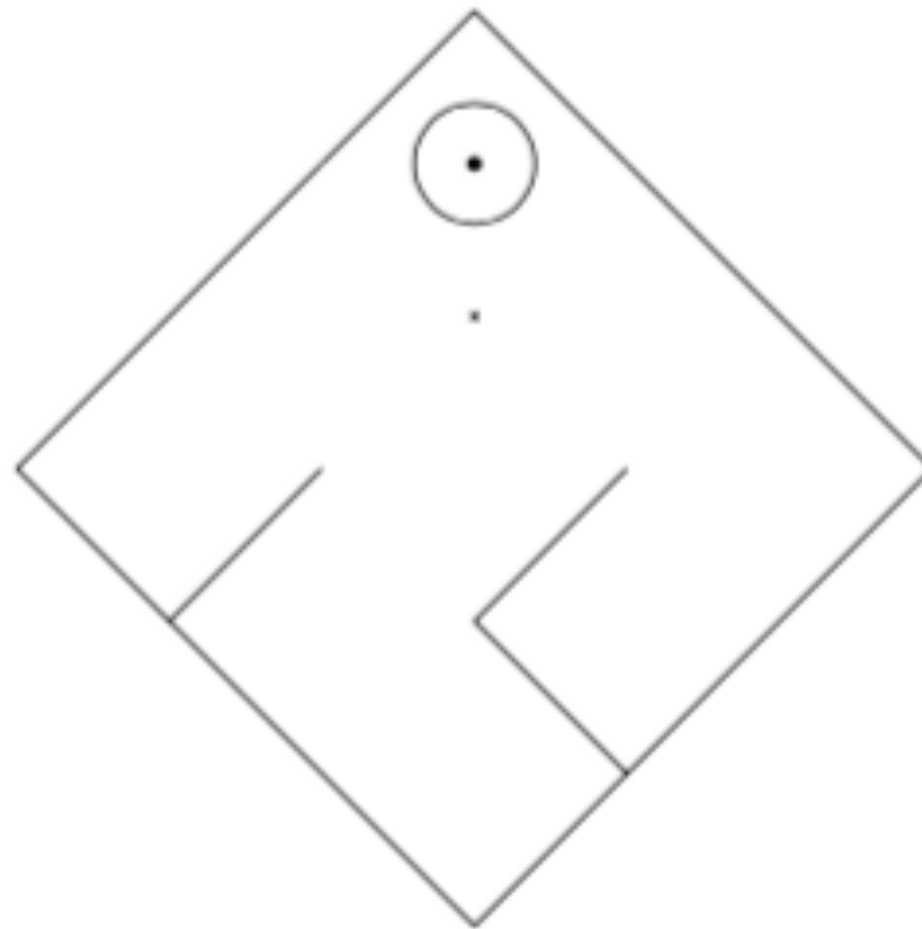


continuemos com a aplicação do Teorema



# MAIZE

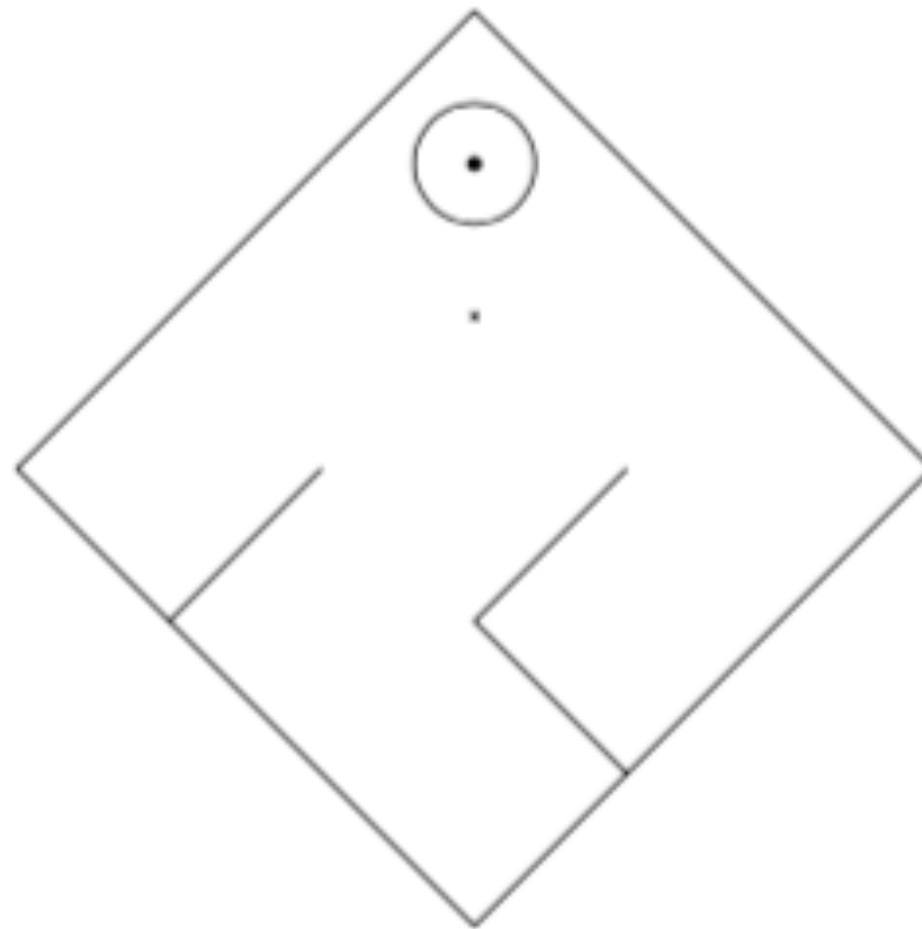
Jogada: mover a peça uma casa para SO (Left) ou SE (Right)

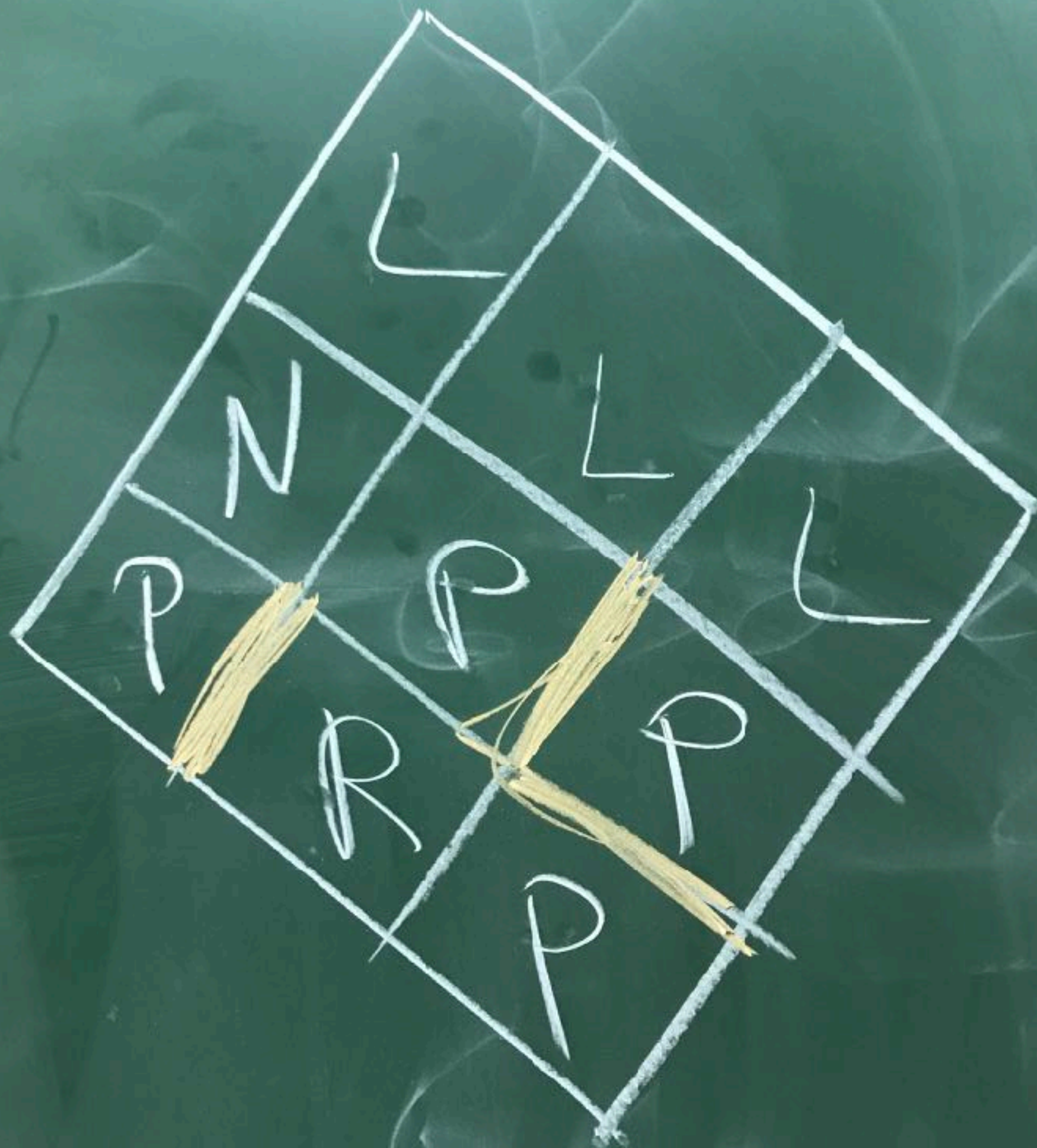


8.10.2019

# MAZE

Jogada: mover a peça para SO (Left) ou SE (Right)  
o número de casas que quiser





## SUBTRACÇÃO(1,2|2,3)

Jogada: Dada uma pilha de  $n$  feijões, Left pode tirar 1 ou 2,  
Right pode tirar 2 ou 3.

$S[n]$

$S[0]$  está em  $\mathcal{P}$

$S[3]$  está em  $\mathcal{N}$

$S[1]$  está em  $\mathcal{L}$

$S[4]$  está em  $\mathcal{P}$

$S[2]$  está em  $\mathcal{N}$

$$S[n] \in \begin{cases} \mathcal{P} & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \mathcal{L} & n \equiv 1 \pmod{4} \\ \mathcal{N} & n \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

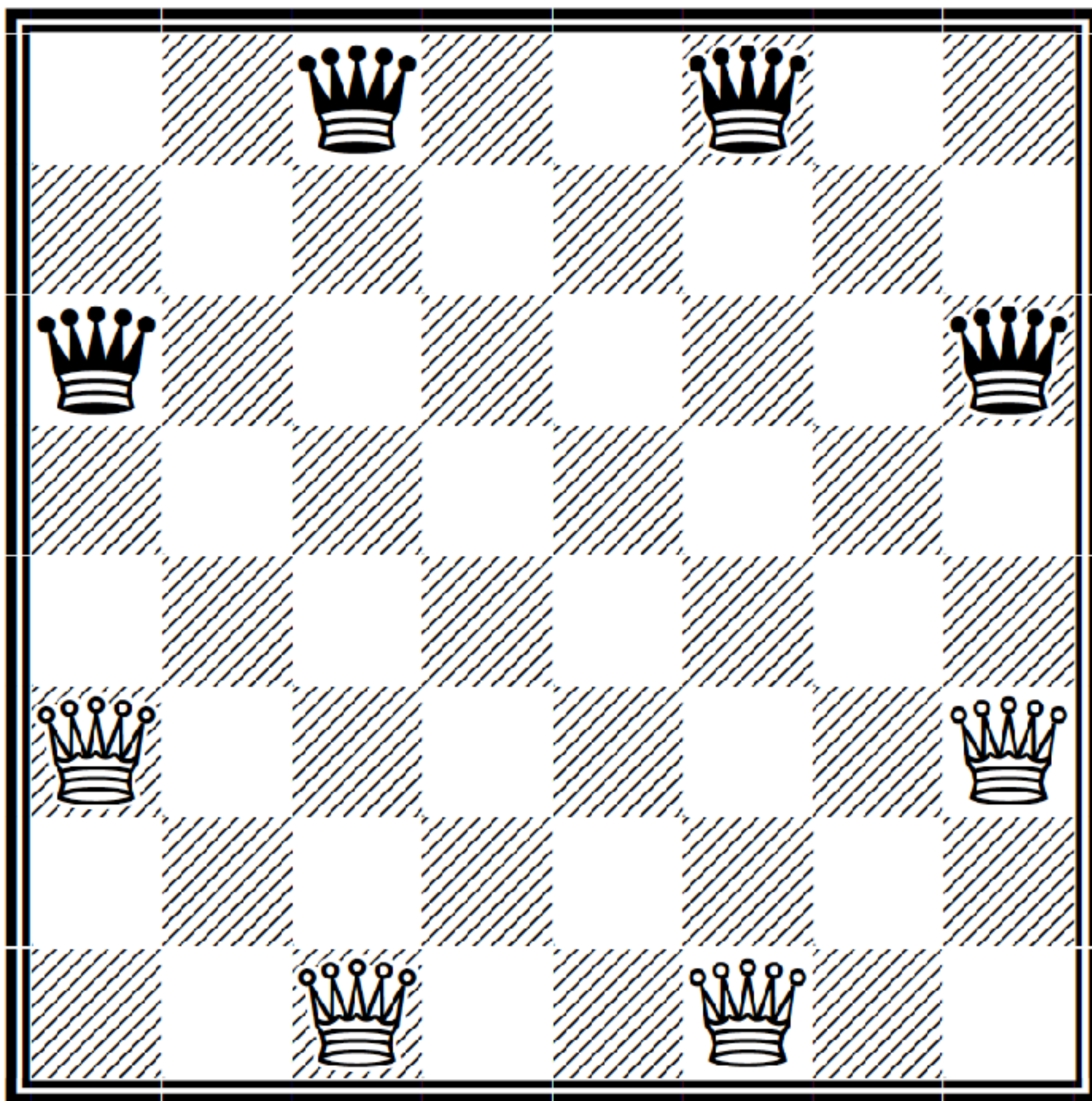
$n=4m$ . 1º tira  $k$ , 2º tira  $4-k$

$n=4m+1$ . Left tira 1 e ganha (indução). Right só pode ir para o terceiro caso, que Left ganha (por indução)

$n=4m+2$ . 1º tira 2

$n=4m+3$ . Left tira 2 e vai para  $\mathcal{L}$ . Right tira 3 e vai para  $\mathcal{P}$ .

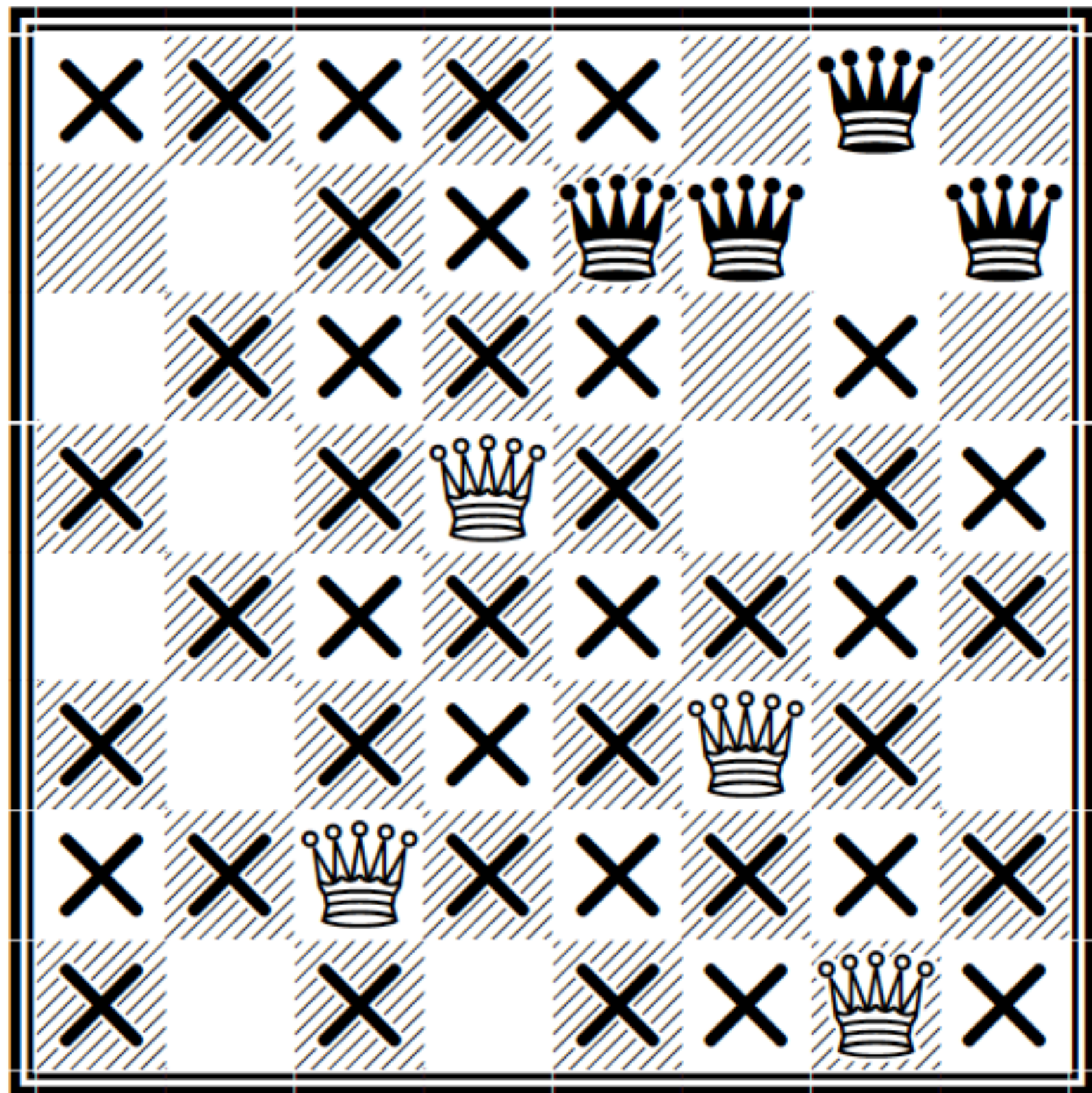






# Problema 1: Jogam as Brancas e ganham.

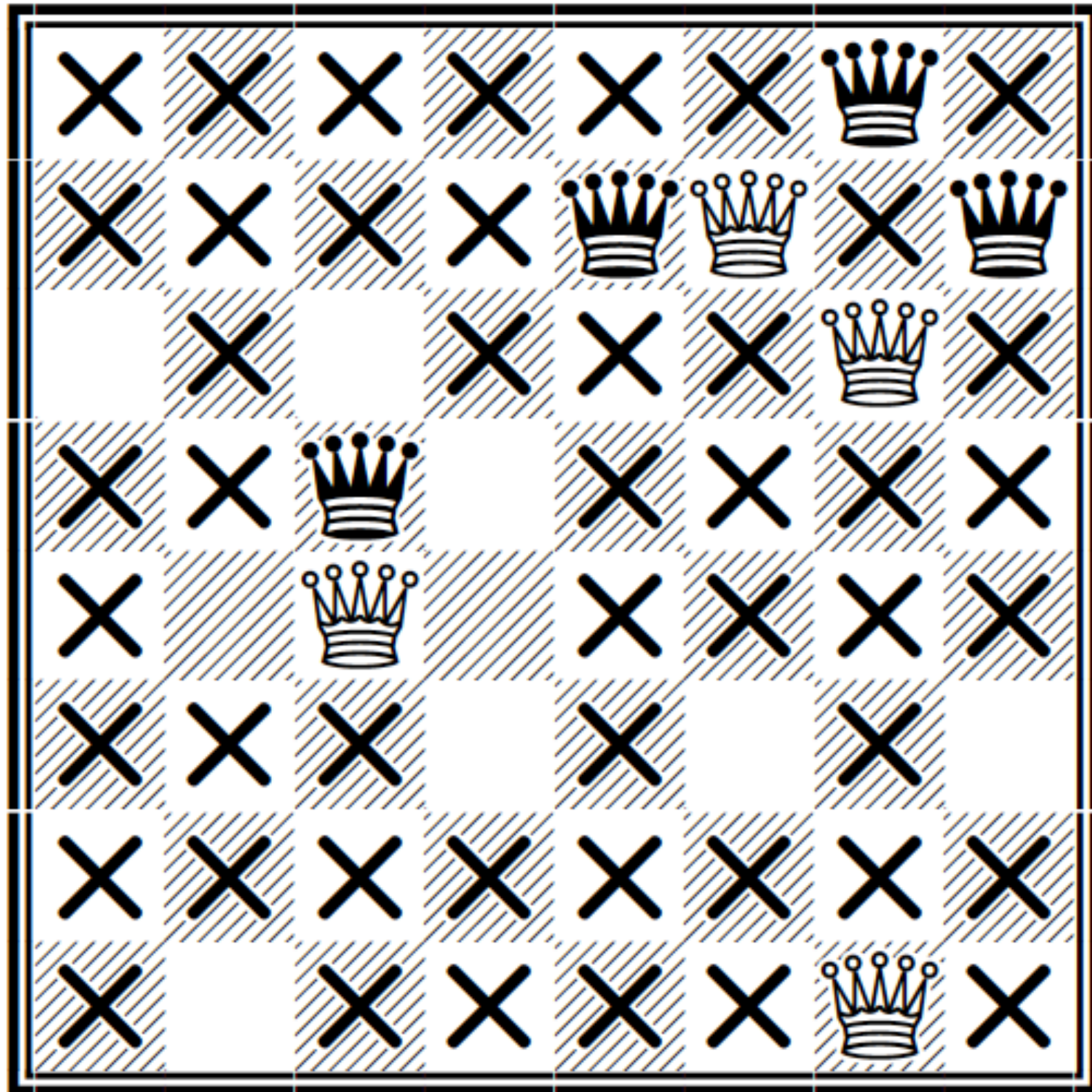
15.10.2019



1) Na vasta maioria das vezes, Amazonas em espaços fechados têm direito a **tantos movimentos quantos quadrados vazios existentes nessa área**. Esta situação não é exceção. A Amazona de c2 tem supostamente direito a 7 movimentos e as Amazonas no canto superior direito têm disponíveis 6 movimentos. A vitória vermelha pode ser obtida com uma sequência precisa de lances com a Amazona de c2: c2-a4 (d1) [ou c2-b3 (d1)], a4-c2 (b1), c2-b3 (c2).



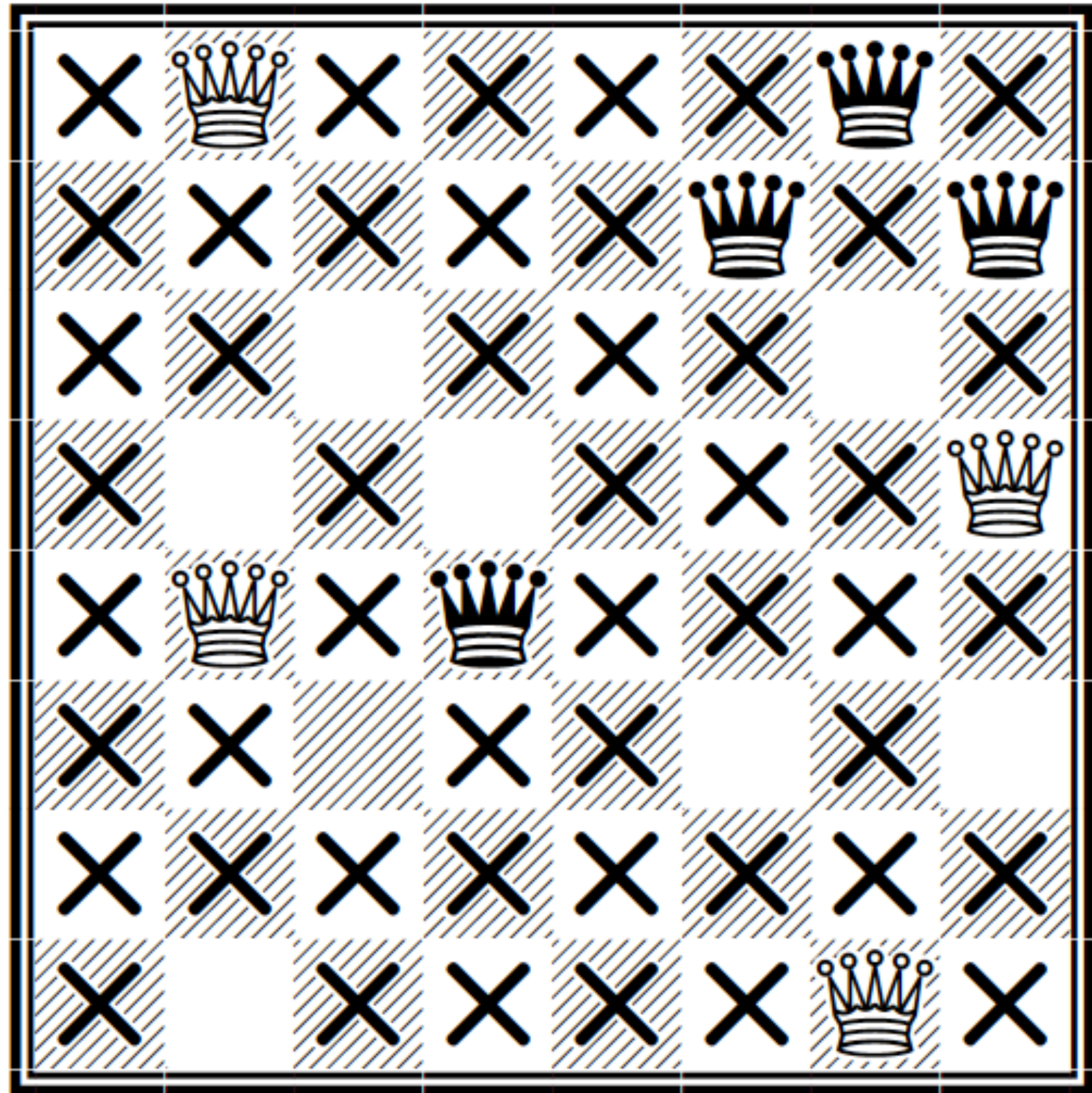
Problema 2: Jogam as Brancas e ganham.



2) Outro conceito importante é que as guerras territoriais de duas Amazonas pelo mesmo espaço são **muito delicadas, necessitando por vezes de grande precisão**. O único lance ganhador é 1.c4-d4 (d3).



Problema 3: Jogam as Brancas e ganham.



3) Embora muito simples, este exercício mostra um tipo de situações que sucede por vezes no Amazonas. Na parte esquerda do tabuleiro é **mau ter de jogar** (no Xadrez chama-se a essas situações posições de zugzwang). Sendo assim, para ganhar basta dar a vez na outra zona do tabuleiro. A solução é 1.a5-c6 (a5).

Definição: *Jogo imparcial* é aquele em que os jogadores têm as mesmas opções

Ex: NIM, SUBTRACÇÃO, CRAM, ...

Contra-exemplos: XADREZ, GO, DOMINÓRIO, ...

Teorema: Se  $G$  é imparcial então está em  $\mathcal{N}$  ou em  $\mathcal{P}$ .

Dem1 (Por roubo): Se  $G$  estivesse em  $\mathcal{L}$ , então Left ganha em 1º, logo Right ganharia em 1º com a mesma jogada.

Dem2 (Por indução): Se houver uma opção em  $\mathcal{P}$ , o jogo está em  $\mathcal{N}$ , se todas estão  $\mathcal{N}$ , o jogo está em  $\mathcal{P}$ .

**Teorema da partição em N e P:** se as posições de um jogo imparcial admitem uma partição em dois conjuntos A e B tais que

- . Para cada posição de A, todas as opções estão em B
- . Cada posição em B tem uma opção (pelo menos) em A

Então

- . A é o conjunto das posições-P
- . B é o conjunto das posições-N

Nota: as terminais estão sempre em A. Isto é, são posições-P



Pragmaticamente:

Todas as posições terminais são posições-P

Uma posição é N se pelo menos uma das suas opções é P

Uma posição é P se todas as suas posições são N

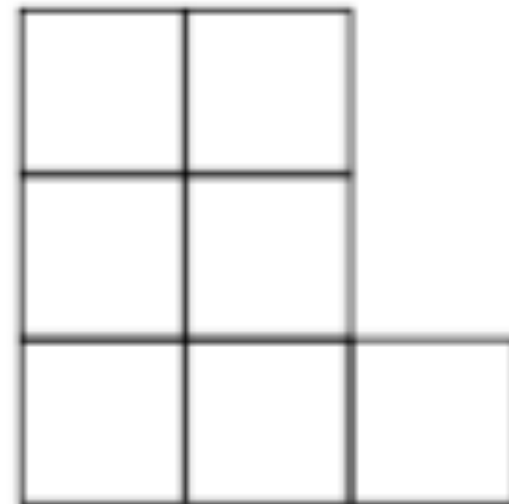
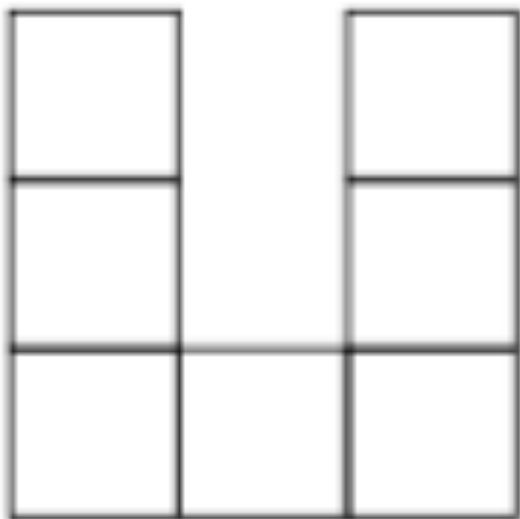
Ex (Princípio do gargalo): Seja  $G$  imparcial. Se  $G$  tiver duas opções,  $H$  e  $F$  (pode haver mais) tais que  $F$  é a única opção de  $H$ , mostre que  $G$  é uma posição- $N$ .

Dem: Se  $F$  é  $P$ , então  $G$  é  $N$ . Se  $F$  é  $N$  então  $H$  é  $P$  e  $G$  é  $N$ .

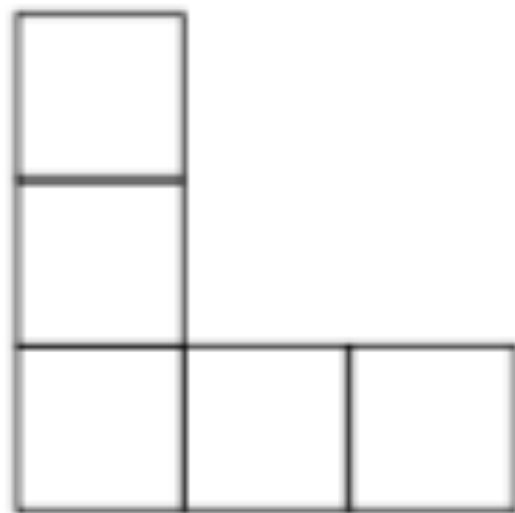
# CRAM

|  |  |  |
|--|--|--|
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

opções

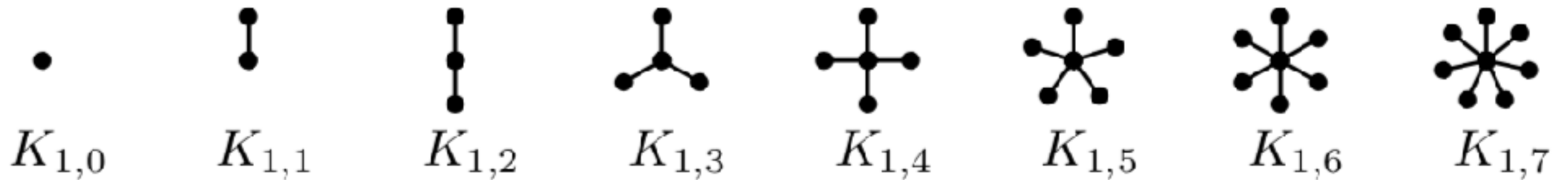


de qualquer das quais se obtém a posição-P



Portanto, o rectângulo 3x3 dado é uma posição-P.

# DEGOLA em estrelas (com pelo menos uma aresta)



jogada: supernova ou mingunte

Qualquer estrela é uma posição-N

E as constelações?...

Uma constelação é uma posição-P  
sse

os números de estrelas pares e ímpares são pares

- . Se houver números pares de ambos os tipos, então uma jogada supernova muda a paridade de um deles, enquanto que um mingunte muda a paridade de ambos. (P)
- . Se só um tipo ocorre com paridade ímpar, então uma jogada supernova nesse tipo torna ambas pares. Se ambos os números são ímpares, então um mingunte torna-os pares. (N)



## SUBTRACÇÃO(S)

Dada uma pilha com  $n$  feijões, os jogadores alternam retirando  $s$  feijões, sendo  $s$  um elemento de  $S$ .

$$S(1,2,4)$$

$$S(3,4)$$

$$S(1,3,4)$$

# ROLO COMPRESSOR

jogada: mover o rolo (\*) para a esquerda ou a direita  
o número de passos que se quiser, desde que se comprima pelo menos  
uma lombra (subtrair 1).

L joga para a esquerda, R para a direita

$[5, *, 1, 2] \text{ -R-} \rightarrow [5, 0, 1, *] \text{ -L-} \rightarrow [5, 0, *, 0]$

ou

$[5, * 1, 2] \text{ -R-} \rightarrow [5, 0, *, 2] \text{ -L-} \rightarrow [*, 4, 0, 2]$

(agora, por paridade, está ganho para L)

- a) Qual é o desfecho de  $[1,1,1,*,1,1]$ ?
- b) E de  $[1,1,*,5]$ ?
- c) E se todas as lombas tiverem altura 2?
- d) E se todas as lombas tiverem altura 1?

Observações:

Lombas de altura par não dão vantagem, se um jogador comprime o outro comprime de volta.

Conceito útil: balanceamento de uma posição  $G$ ,  $b(G)$ .

É o número de lombas ímpares à esquerda do rolo menos o número de lombas ímpares à direita

Teorema:

$$G \in \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{R} & se & b(G) < 0 \\ \mathcal{P} & se & b(G) = 0 \\ \mathcal{L} & se & b(G) > 0 \end{array} \right.$$

Nota: cada vez que L comprime uma lombas

- . se ela era par, passa a ímpar à direita do rolo

- . se era ímpar, passa a par.

Em ambos os casos,  $b(G)$  diminui 1.

analogamente, cada vez que R joga,  $b(G)$  cresce 1

se um jogador tiver jogada legal, pode sempre alterar o valor de  $b(G)$   
por uma unidade

se  $b(G) < 0$

se L joga, devolve uma posição  $G'$  com  $b(G') < 0$ . Por indução, R ganha em  $G'$ .

se R joga, deixa uma posição  $G''$  com  $b(G'') < 0$  ou  $b(G'') = 0$ , em ambos os casos R ganha em  $2^\circ$ , por indução.

analogamente

se  $b(G) > 0$

se R joga, devolve uma posição  $G'$  com  $b(G') > 0$ . Por indução, L ganha em  $G'$ .

se L joga, deixa uma posição  $G''$  com  $b(G'') > 0$  ou  $b(G'') = 0$ , em ambos os casos L ganha em  $2^\circ$ , por indução.



se  $b(G)=0$ , L joga e deixa  $G'$  tal que  $b(G')<0$  e R ganha, por indução.

se  $b(G)=0$ , R joga e deixa  $G''$  tal que  $b(G'')>0$  e L ganha, por indução.

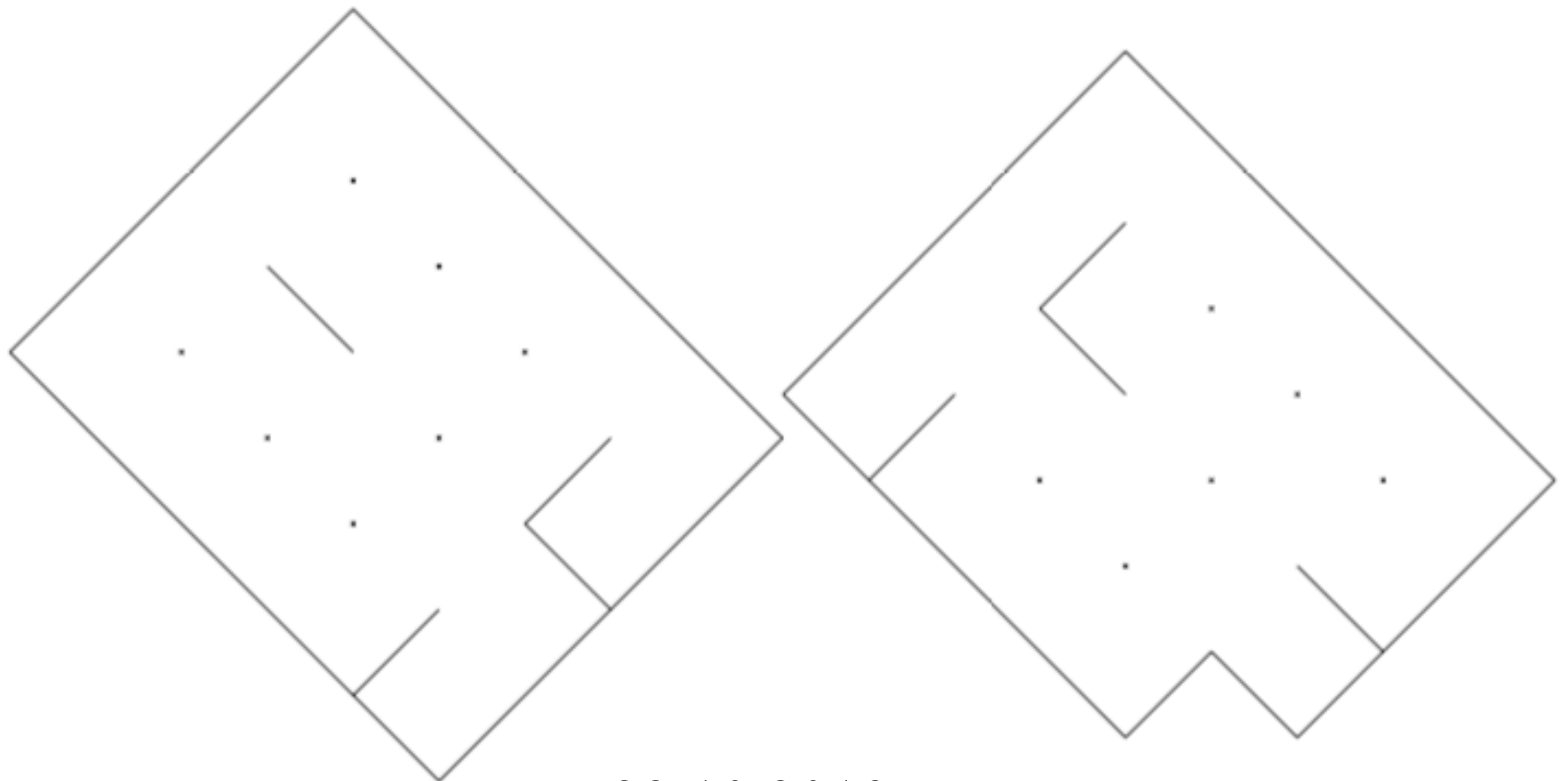
Corolário da prova: se um jogador tem lance vencedor, comprimir uma só lomba também é vencedor.

Isto "estraga" o jogo... :(



# MAIZE e MAZE

(analisar cada um dos tabuleiros em cada um dos jogos)



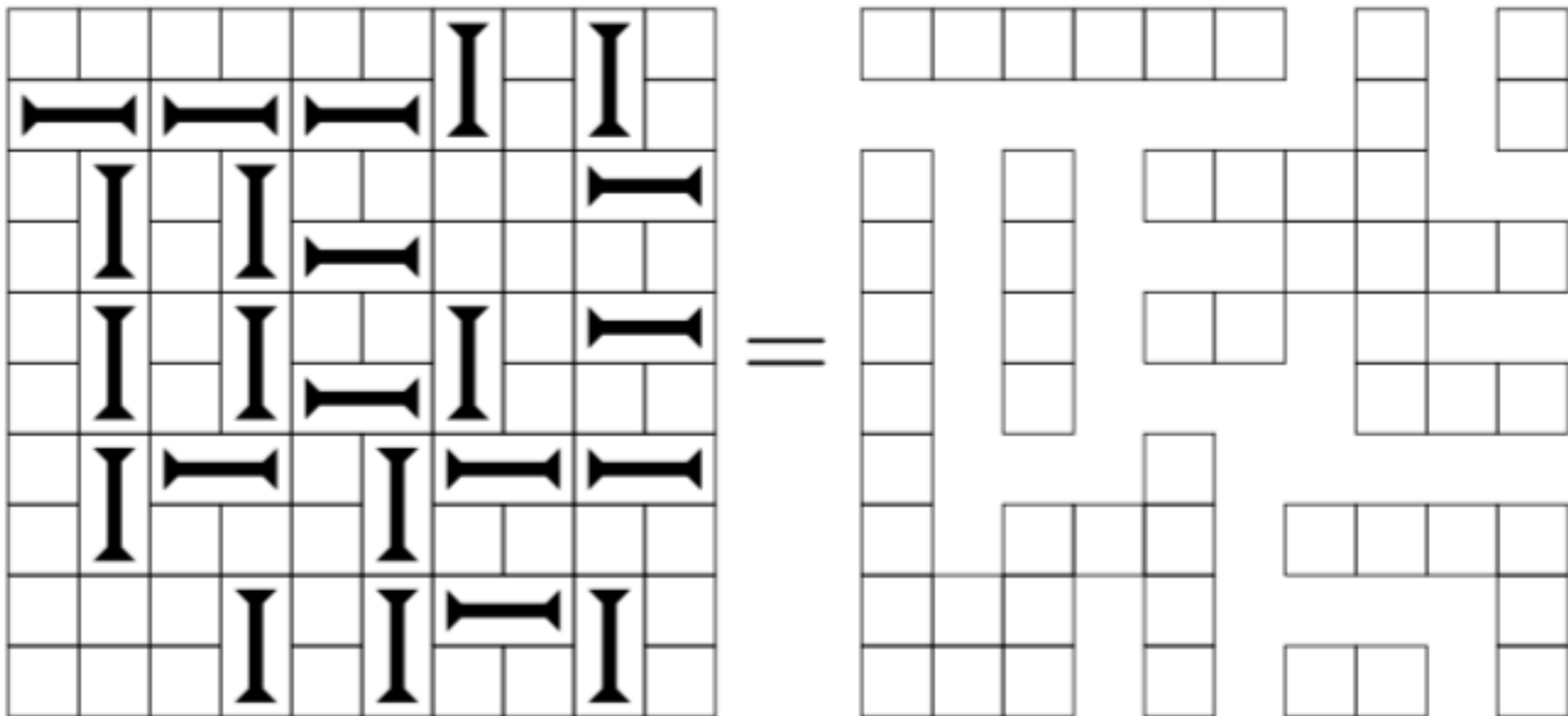
22.10.2019

SUBTRACÇÃO(2,3,4)

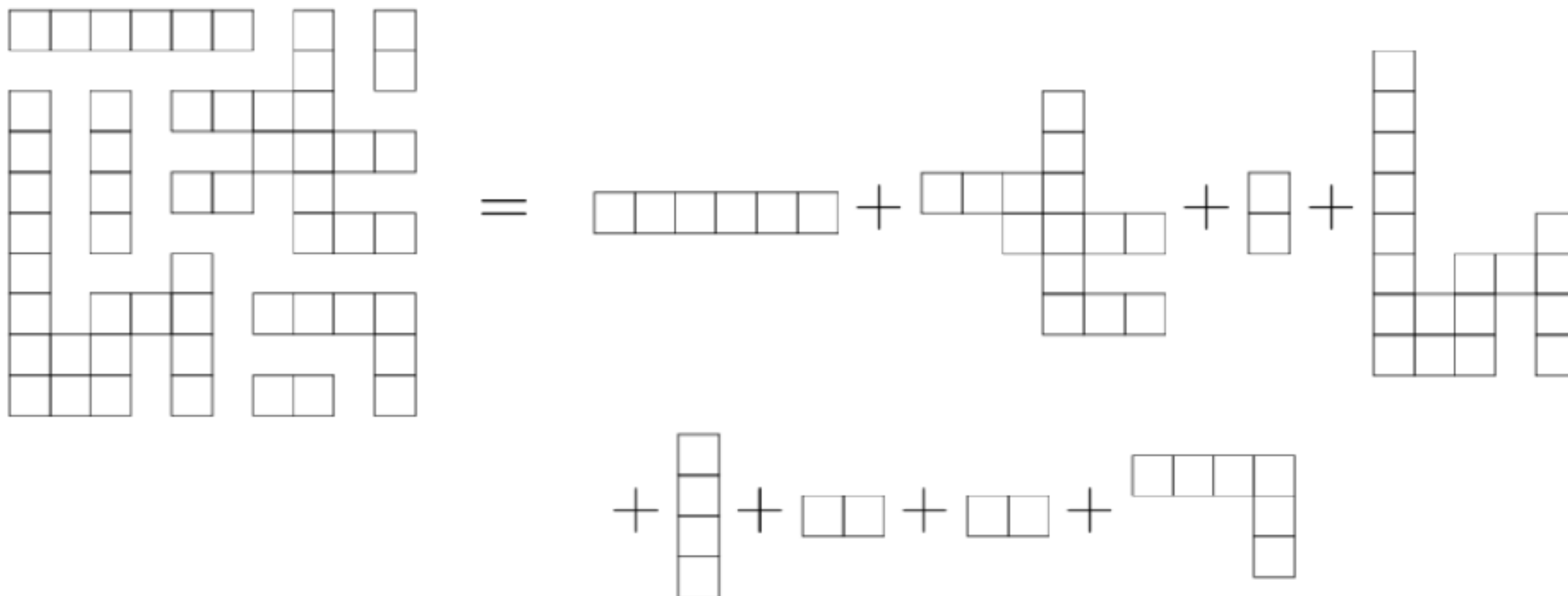
SUBTRACÇÃO(1,3,6)

**Somas**

Os jogos partem-se em pedaços...



Os founding fathers criaram uma adequada noção de soma!



Uma jogada consiste em escolher uma parcela e jogar.

A escolha é livre. O último a jogar ganha.

O simétrico (inverso aditivo) de um jogo é o que se obtém trocando os papéis dos jogadores.

Uma posição  $A$  é pelo menos tão favorável a Left como  $B$  se Left não se importar de trocar  $B$  por  $A$  em *qualquer* soma.

Esta abordagem funciona melhor com uns jogos do que com outros.

Mal para Hex, P & Q, ...

Bem para Go, Dominório, etc

Vamos educar um pouco a intuição para mais tarde formalizar.



# Comparações



Left não se importa se



for substituída por



Left fica contente se



for substituída por



Right não se importa se



for substituída por



Right fica contente se

|  |  |
|--|--|
|  |  |
|--|--|

for substituída por

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|



valem um lance para Left



valem um lance para Right



valem 1





valem -1



Os números inteiros. Um jogo será  $n > 0$  se der  $n$  lances de vantagem ao Left.

Um jogo será  $n < 0$  se der  $n$  lances de vantagem ao Right.

## Definição recursiva

Os inteiros, como jogos, são definidos recursivamente por:

$$0 = \{\cdot | \cdot\}$$

$$n = \{n - 1 | \cdot\}$$

$$-n = \{\cdot | -(n - 1)\} \quad (n > 0)$$

## Exemplos

$$\{2| - 2\}$$

$$\{3|\{2|1\}\}$$

O neutro da adição

O zero, 0

Somar a uma posição qq de Dominório:



Qual é o efeito no desfecho?



Left ganha  $G \rightarrow$  Left ganha a soma

etc

*Princípio da mão atrás das costas*

Na soma G+H o segundo responde *localmente*.

Nem sempre é a melhor estratégia!

## Lema

Se Left ganha, em segundo, em  $G$  e o mesmo sucede em  $H$ , então  
Left ganha, em segundo, em  $G+H$ .

Dem: Mão atrás das costas.

Se Right ganha, em segundo, em  $G$  e o mesmo sucede em  $H$ , então  
Right ganha, em segundo, em  $G+H$ .



Teorema. Seja  $G$  um jogo e  $Z \in \mathcal{P}$

Então o desfecho de  $G$  é igual ao desfecho de  $G+Z$ .

Dem. Se Left ganha em  $G$  sendo 1º, então joga para uma opção que, somada a  $Z$ , está nas condições do lema.

Se Left perde sendo primeiro em  $G$ , então aplica-se o lema a  $G+Z$



## Recíproco

Se existe um  $Z$  tal que o desfecho de  $G+Z$  é o mesmo que o desfecho de  $G$ , para qq  $G$ ...

$$G = \{\cdot | \cdot\}$$

Portanto  $Z \in \mathcal{P}$

Corolário: Se  $X \in \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$

então o desfecho de  $G+X$  é pelo menos tão favorável a Left como o desfecho de  $G$ .

|               | $\mathcal{L}$                  | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{R}$                  | $\mathcal{N}$                  |
|---------------|--------------------------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $\mathcal{L}$ | $\mathcal{L}$                  | $\mathcal{L}$ | ?                              | $\mathcal{L}$ or $\mathcal{N}$ |
| $\mathcal{P}$ | $\mathcal{L}$                  | $\mathcal{P}$ | $\mathcal{R}$                  | $\mathcal{N}$                  |
| $\mathcal{R}$ | ?                              | $\mathcal{R}$ | $\mathcal{R}$                  | $\mathcal{R}$ or $\mathcal{N}$ |
| $\mathcal{N}$ | $\mathcal{L}$ or $\mathcal{N}$ | $\mathcal{N}$ | $\mathcal{R}$ or $\mathcal{N}$ | ?                              |

$$G = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

$$H = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

vamos analisar

$$G + G + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$

e

$$H + H + \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}$$



+



+





e Right ganha





e Left ganha



$$G + G + 1 = 0$$





e Right ganha



e Left ganha

$$H + H + 1 = 0$$

será que...

$$G = H = \frac{1}{2}?$$

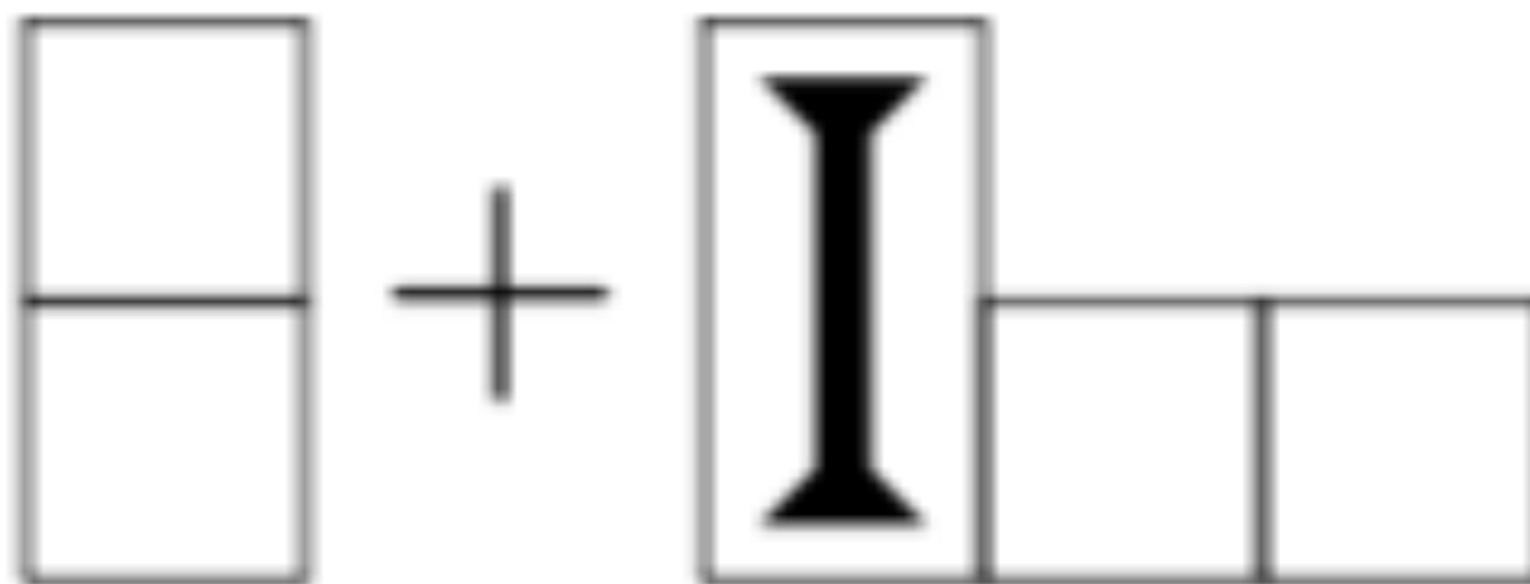
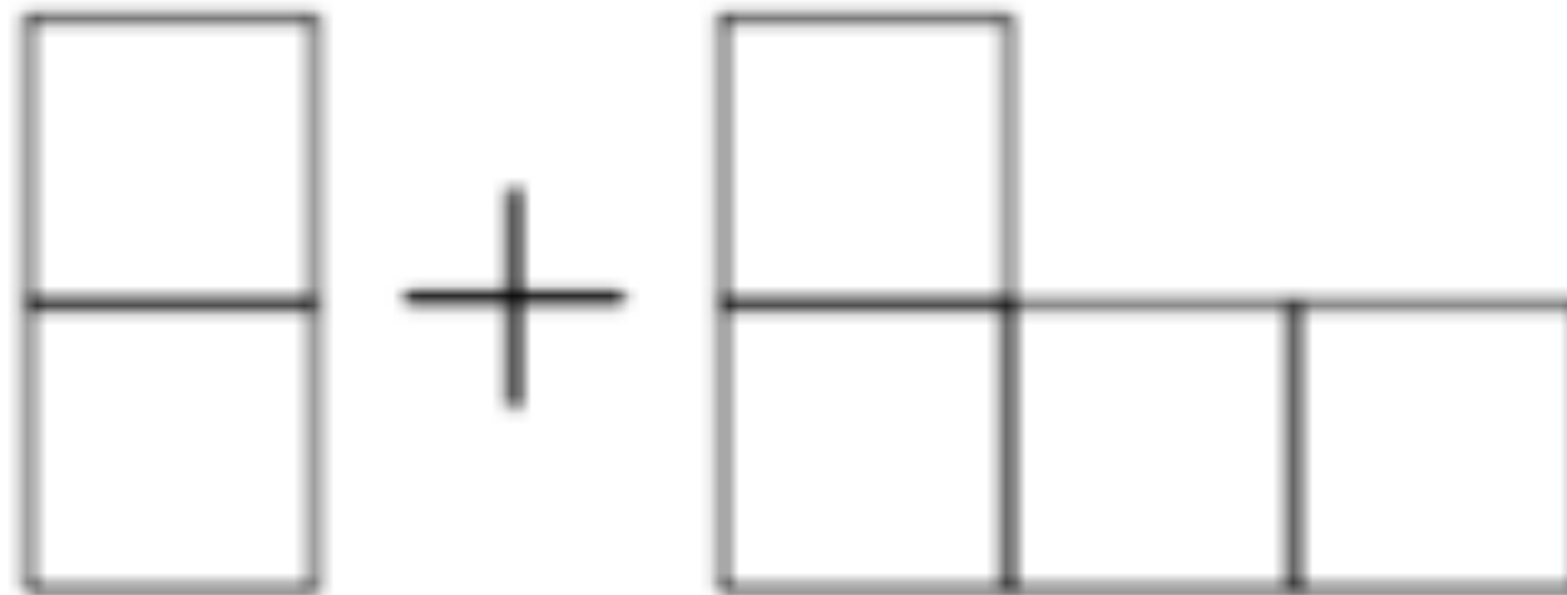
Não. Porque  $G < 0$  e H dá a vitória ao primeiro.

Como comparará G com -1?

Joguemos  $G+1$

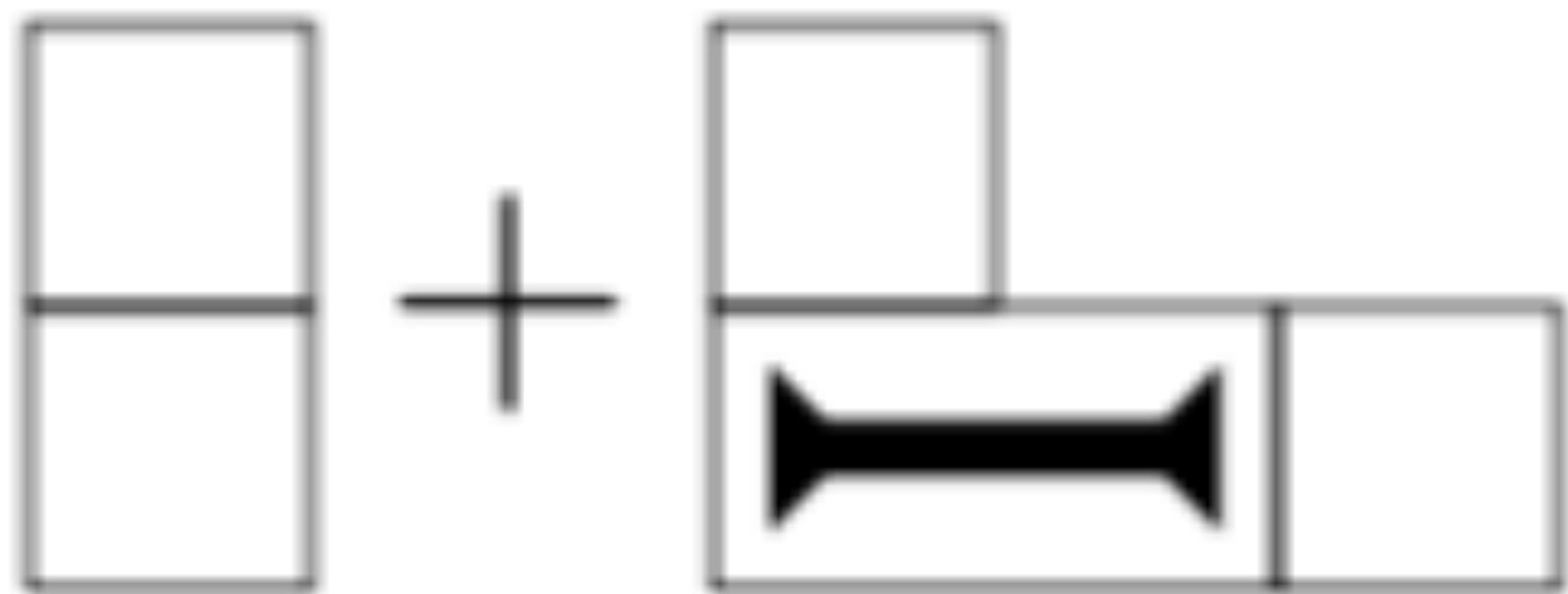
(porque se  $A=B$  então  $A-B=0$ )





Left ganha em primeiro





Left ganha em segundo

$$-1 < G < 0$$

Qual é o desfecho deste jogo?

$$G + H + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & & \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$$

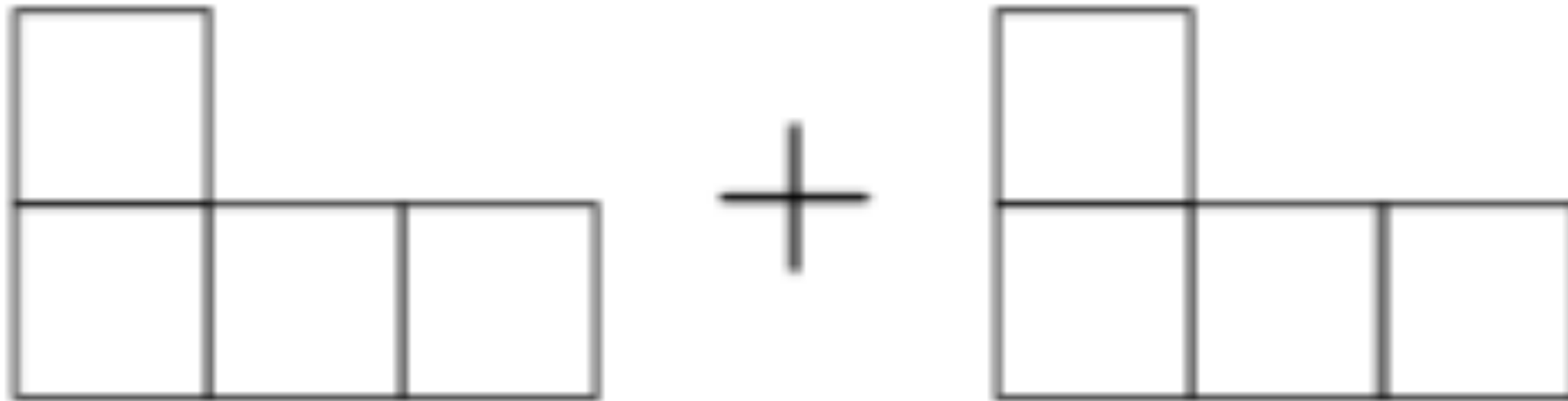
**Igualdade de jogos**  
 **$G=H$**



e uma pilha de um feijão em NIM

mesma árvore

mesmo comportamento em qq soma



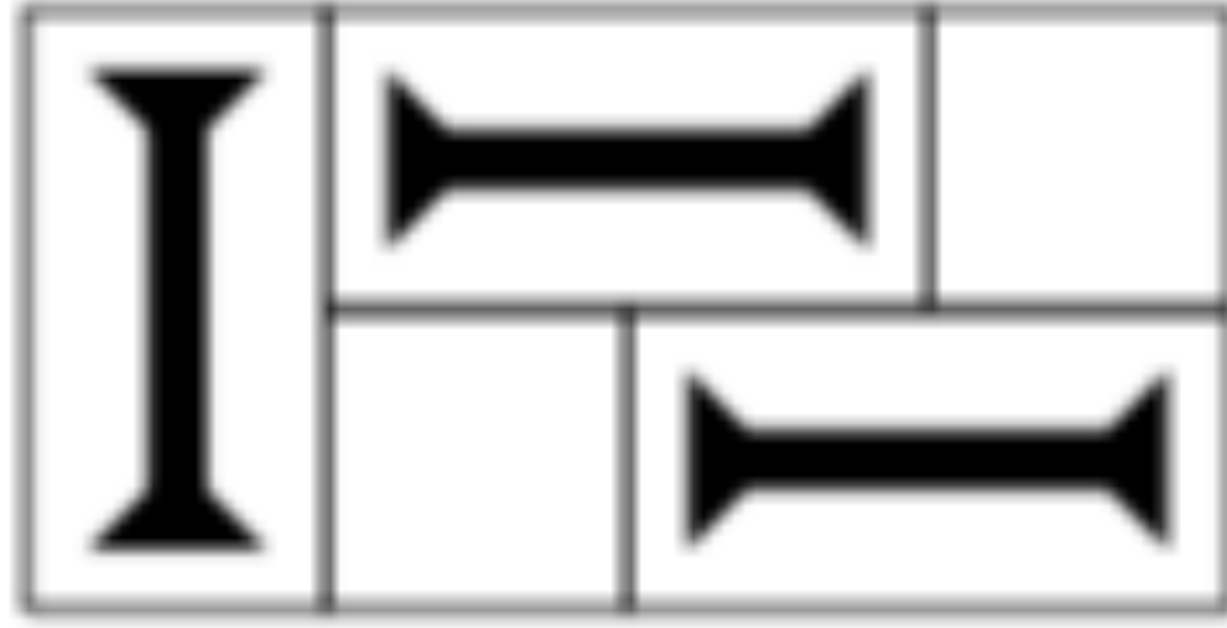
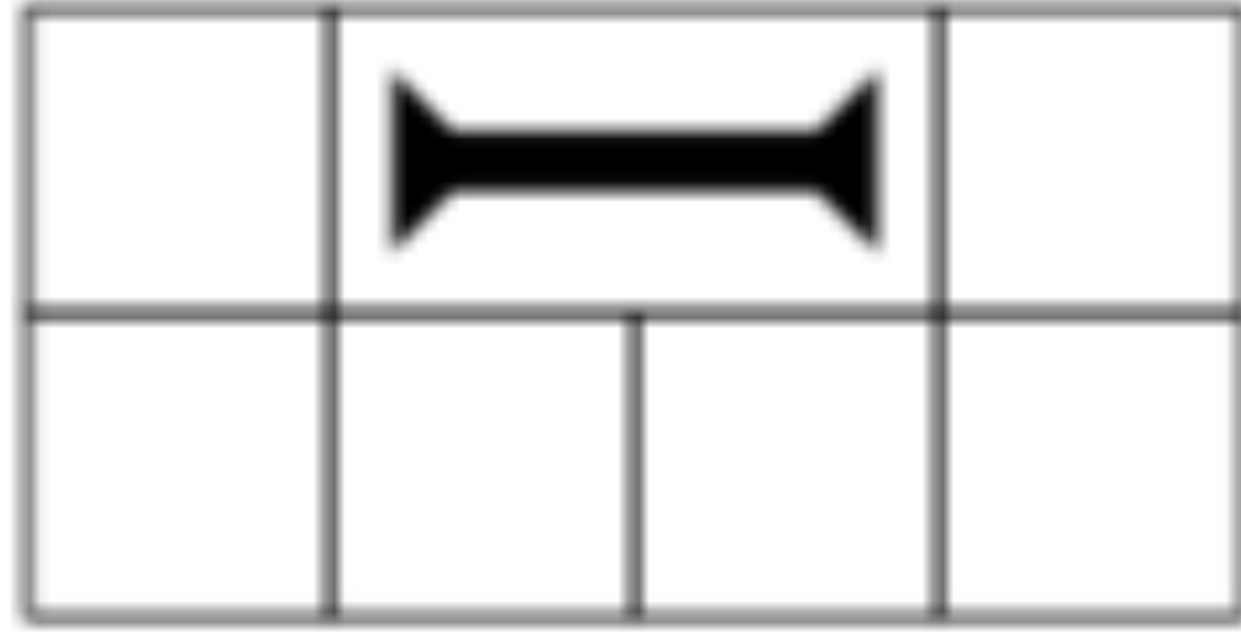
**Um estudo de caso.**  
**Os rectângulos em Dominório**

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{R}$$





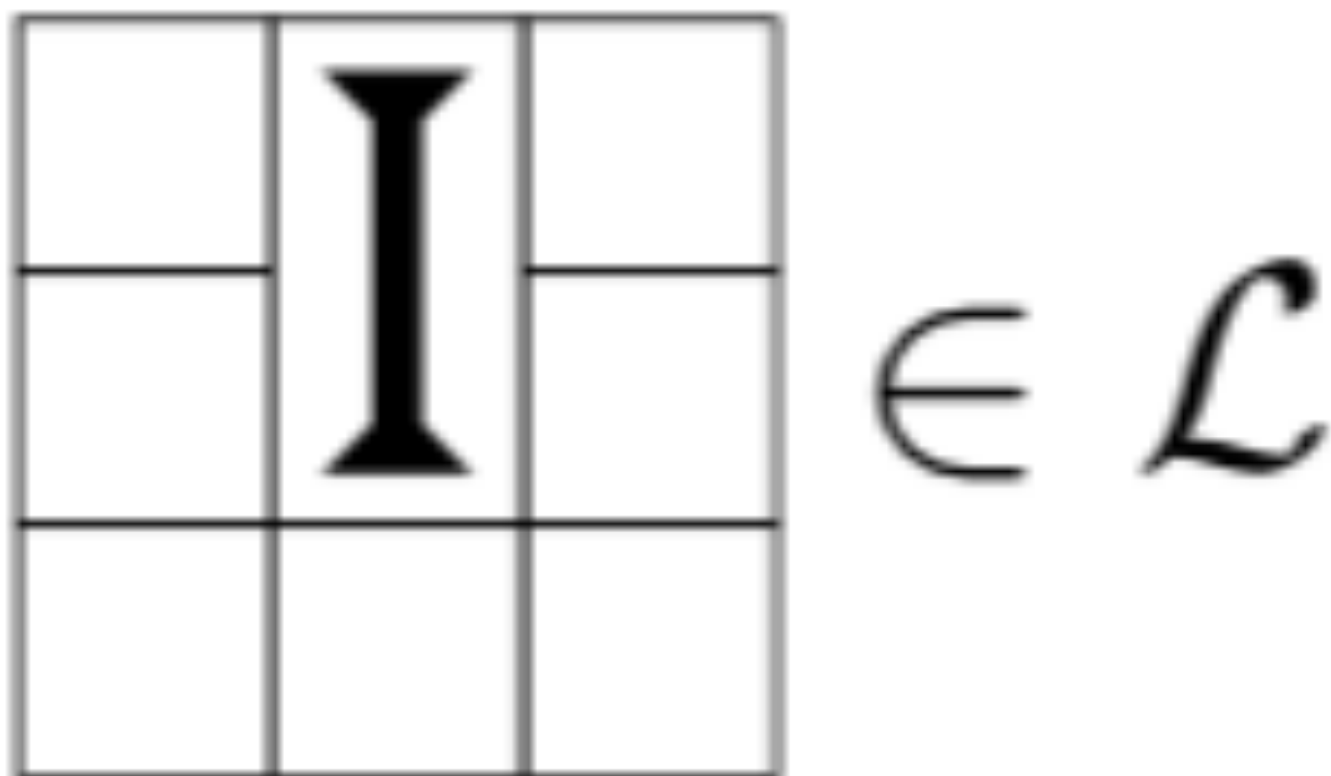




Portanto, pelo princípio da mão atrás das costas,  $2 \times 4k$  são todos  $\mathcal{R}$

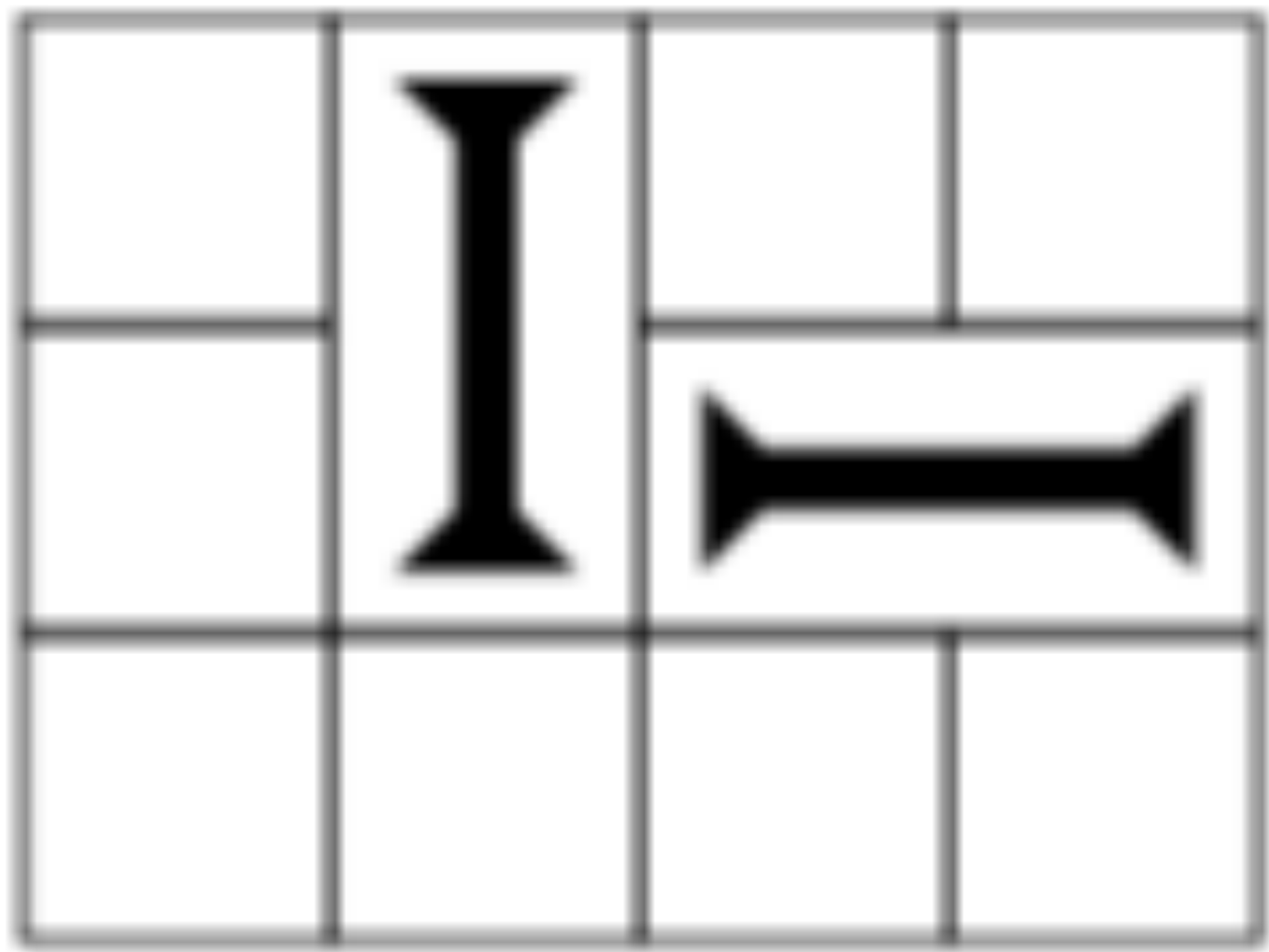
$2 \times 3$  (e  $3 \times 2$ ) estão em  $\mathcal{N}$

Portanto, pelo mesmo princípio,  $2 \times (2k+3)$  estão em  $\mathcal{N}$  ou  $\mathcal{R}$

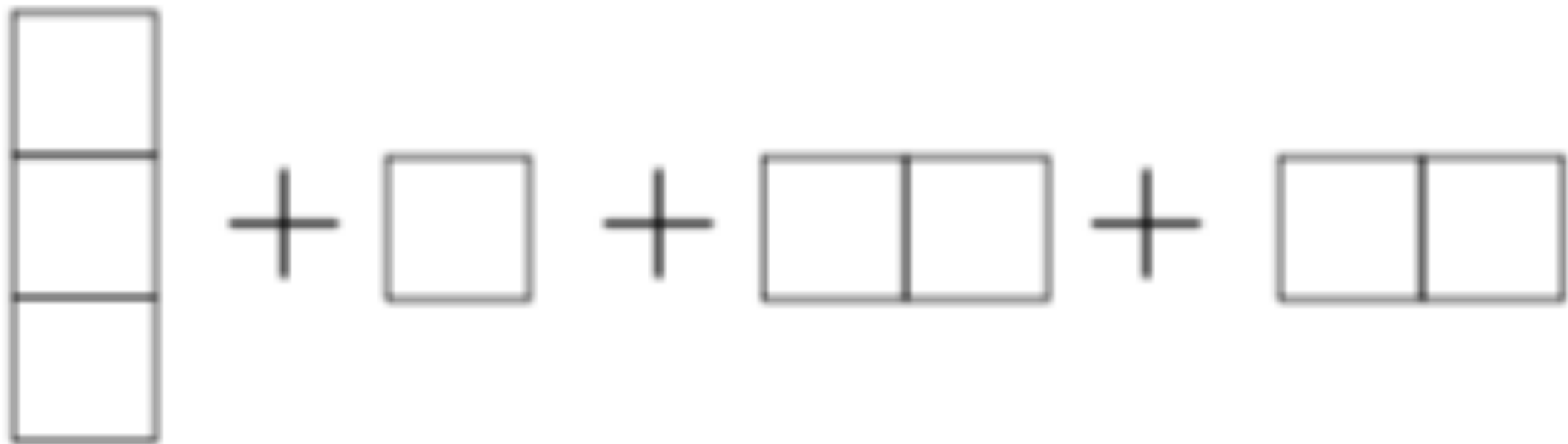


logo o 3x3 está em  $\mathcal{N}$

vamos mostrar que o  $3 \times \{4,5,6,7\}$  está sempre em  $\mathcal{R}$ , donde  $3 \times k$  estão em  $\mathcal{R}$  para  $k > 3$



decomposto



Right ganha



se Left joga na coluna central... Right ganha com reposta semelhante

dá vitória ao Right porque...

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \in \mathcal{R}$$



$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \in \mathcal{P}.$$

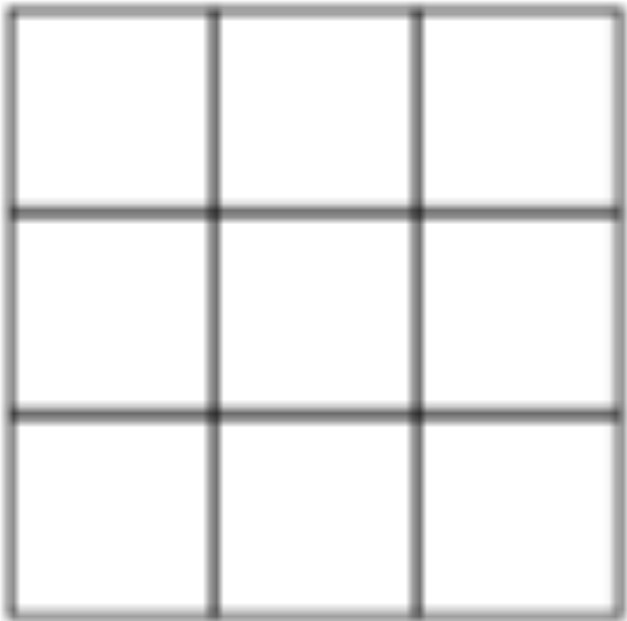


exercício: comprovar que 3x6 e 3x7 estão em  $\mathcal{R}$

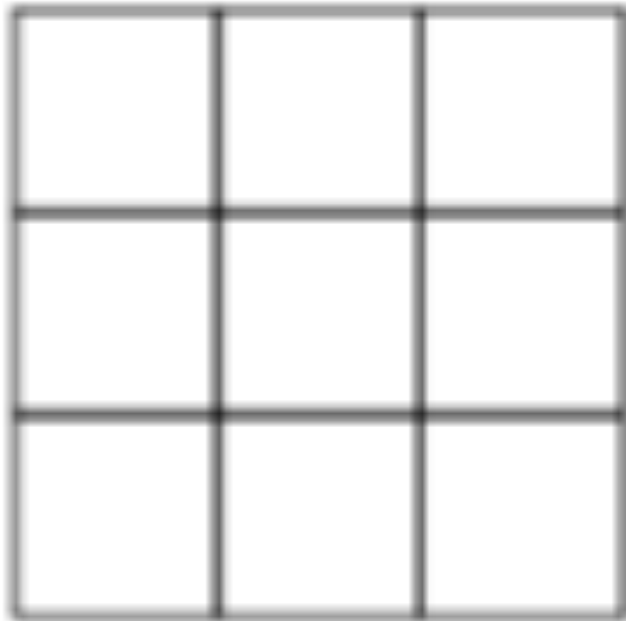
Right joga na linha do meio, encostado à direita e fica com dois lances mais um jogo que ganha em primeiro ou segundo.

Falta analisar Right em segundo em 3x6 e 3x7

3x6. Right faz Tweedledum Tweedledee e responde (com rotação de 180) no outro 3x3

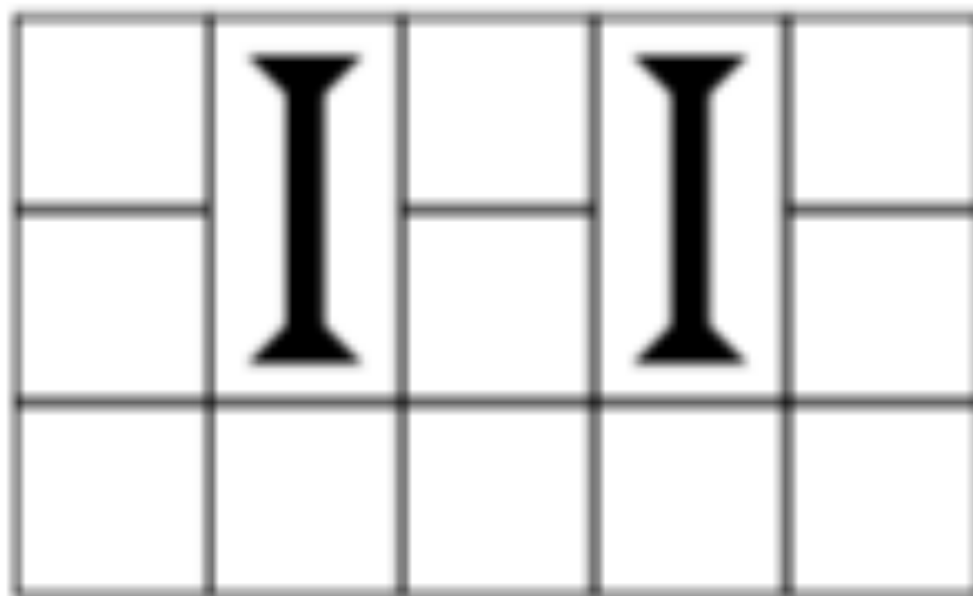


+

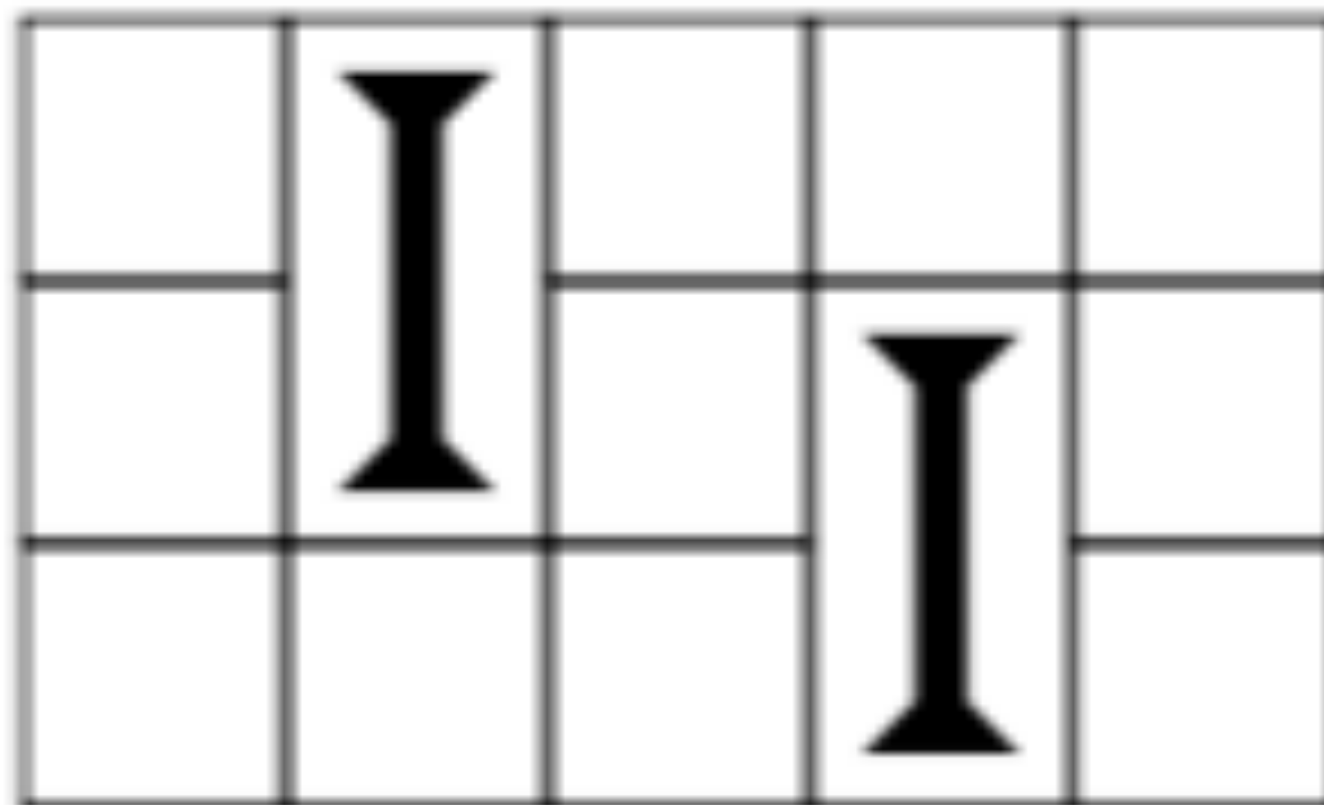


3x7. Right responde com jogada na linha do meio na berma do tabuleiro. Consegue sempre dois lances na zona que sobra, a juntar aos dois que conseguiu ao jogar.

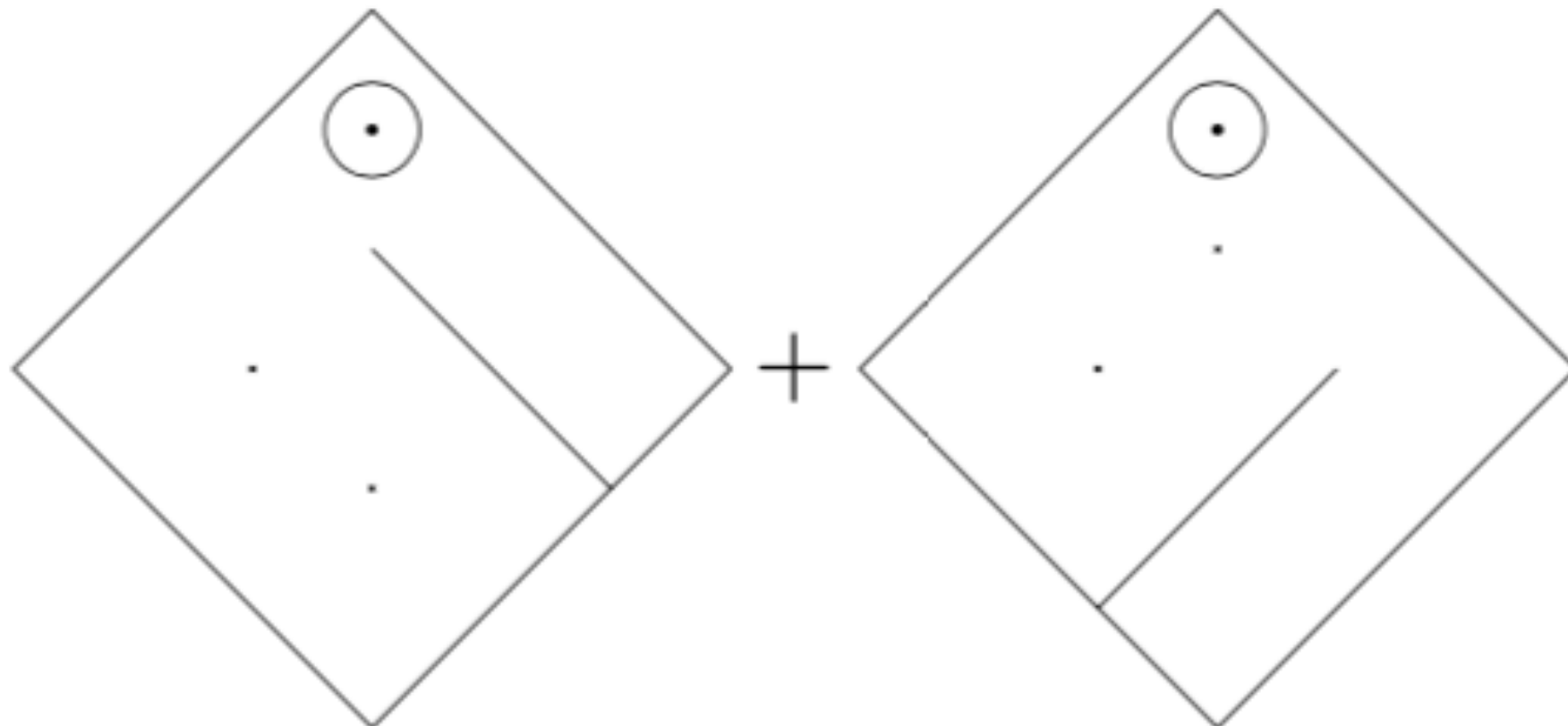
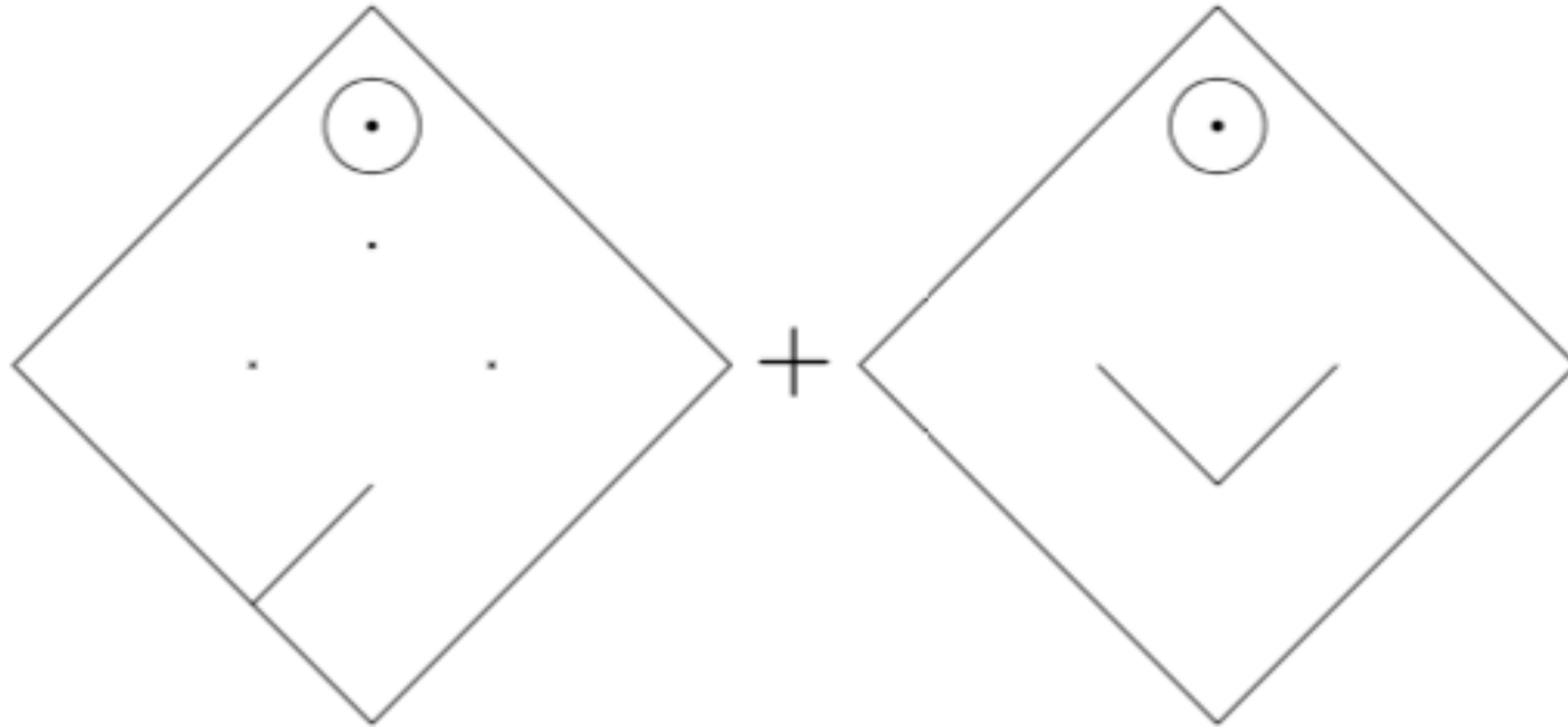
por exemplo, aqui



ou aqui



Determinar os desfechos destas somas em MAIZE



# Álgebra

$$G \quad \text{é} \quad \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$$

$$G = \{ \mid \} = \{\emptyset \mid \emptyset\} \quad \text{chama-se zero, } 0$$

Definição recursiva (boa pq os conjuntos podem ser vazios)

A soma

$$G + H \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R \}$$



Relembrar que se Left ganha em 2º em  $G$  e ganha em 2º em  $H$ ,  
então ganha em 2º em  $G+H$

mão atrás das costas



Cadê jogos  $G$  e  $H$ , tais que Left ganha em 1º em qq um deles, mas perde em 1º na soma  $G+H$ ?

$$G = H = \{0 \mid -1\}$$

Left não ganha em 1º nem em 2º

O simétrico

$$-G \stackrel{\text{def}}{=} \{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\}$$

A igualdade

$G = H$  se desfechos de  $G + X$  e  $H + X$  iguais  $\forall X$

Cuidado: dois jogos são isomorfos se têm a mesma árvore. É um conceito mais forte.

Ordem

$G \geq H$  se Left ganha  $G + X$  sempre que ganha  $H + X$

Aniversário

$$\{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}$$

tem *aniversário* 1 mais do que o maior dos aniversários das opções.

as opções são os elementos de

$$\mathcal{G}^L \cup \mathcal{G}^R$$

O aniversário é a altura da árvore.

Aniversário 0: o zero (opções vazias)

Aniversário até 1:

$$\begin{array}{lll} 0 & \stackrel{\text{def}}{=} & \{ \mid \} ; \\ 1 & \stackrel{\text{def}}{=} & \{ 0 \mid \} ; \\ -1 & \stackrel{\text{def}}{=} & \{ \mid 0 \} ; \\ * & \stackrel{\text{def}}{=} & \{ 0 \mid 0 \} . \end{array}$$

**Teorema:** o número de jogos nascidos pelo dia  $n$ ,  $g(n)$ , é finito

Dem: o número de jogos que nasceram pelo dia  $n$  é, no máximo,

$$2^{g(n-1)} \cdot 2^{g(n-1)}$$

que é finito por indução.



**Teorema:** Se  $G$  tem aniversário finito, então  $G$  tem número de opções finito.

Dem: As opções de  $G$  nasceram pelo dia  $n-1$ . Como  $g(n-1)$  é finito...



Soma:

$$G + H \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathcal{G}^L + H, \ G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H, \ G + \mathcal{H}^R \}$$

notação pesada

$$G + H = \{(\mathcal{G}^L + H) \cup (G + \mathcal{H}^L) \mid (\mathcal{G}^R + H) \cup (G + \mathcal{H}^R)\}$$

Exemplo

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = \{ \boxed{\mathbf{I}} \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \}$$

$$H = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} = \{ \boxed{\mathbf{I}} \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \mid \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I} & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \mathbf{I} \\ \hline \end{array} \}$$

$$G + H =$$

$$\left\{ \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I} & \\ \hline \end{array}}^{\mathcal{G}^L + H} + \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^L}, \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^L} + \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{I} & \\ \hline \end{array}}^{\mathcal{G}^L + H} \left| \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \overline{\mathbf{I}} & \\ \hline \end{array}}^{\mathcal{G}^R + H} + \overbrace{\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^R}, \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^R} + \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline \overline{\mathbf{I}} & \\ \hline \end{array}}^{\mathcal{G}^R + H}, \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^R} + \overbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline & \overline{\mathbf{I}} \\ \hline \end{array}}^{G + \mathcal{H}^R} \right\}$$

**Teorema:**  $G + \mathbf{0} = G.$

Dem:

$$G + \mathbf{0} = \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\} + \{\mid\} = \{\mathcal{G}^L + \mathbf{0}, G + \mathbf{0} \mid \mathcal{G}^R + \mathbf{0}, G + \mathbf{0}\}$$

nota  $S + \mathbf{0} = \mathbf{0}$

$$\mathcal{G}^L + 0 = \mathcal{G}^L \quad \text{e} \quad \mathcal{G}^R + 0 = \mathcal{G}^R$$

e obtemos

$$\{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\} = G$$

## Propriedades

$$(1) \quad G + H = H + G,$$

$$(2) \quad (G + H) + J = G + (H + J).$$

$$\begin{aligned}
G + H &= \{ \mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R \} \\
&= \{ H + \mathcal{G}^L, \mathcal{H}^L + G \mid H + \mathcal{G}^R, \mathcal{H}^R + G \} \\
&= H + G.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& [(G + H) + J]^L \\
&= \{ (G + H)^L + J, (G + H) + \mathcal{J}^L \} \\
&= \{ (\mathcal{G}^L + H) + J, (G + \mathcal{H}^L) + J, (G + H) + \mathcal{J}^L \} \\
&= \{ \mathcal{G}^L + (H + J), G + (\mathcal{H}^L + J), G + (H + \mathcal{J}^L) \} \\
&= [G + (H + J)]^L
\end{aligned}$$



$$-G \stackrel{\text{def}}{=} \{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\}$$

Qual é o simétrico de



$$\begin{aligned}
- \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} &= - \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right\} \\
&= \left\{ - \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}, - \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \middle| - \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \right\} \\
&= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}
\end{aligned}$$

Definição:

$$G - H = G + (-H)$$

## Propriedades

$$-(-G) = G.$$

$$-(G + H) = (-G) + (-H).$$

$$\begin{aligned}
-(-G) &= -\{-\mathcal{G}^R \mid -\mathcal{G}^L\} \\
&= \{-(-\mathcal{G}^L) \mid -(-\mathcal{G}^R)\} \\
&= \{\mathcal{G}^L \mid \mathcal{G}^R\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(G + H) &= -\{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L \mid \mathcal{G}^R + H, G + \mathcal{H}^R\} \\
&= \{-\mathcal{G}^R - H, -G - \mathcal{H}^R \mid -\mathcal{G}^L - H, -G - \mathcal{H}^L\} \\
&= \{(-\mathcal{G})^L + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^L \mid (-\mathcal{G})^R + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^R\} \\
&= (-G) + (-H).
\end{aligned}$$



$G = H$  se desfechos de  $G + X$  sempre iguais aos de  $H + X$

é relação de equivalência  
(reflexiva, simétrica e transitiva)



4.10: (page 70) Reflexivity:  $G + X$  does have the same outcome as  $G + X$  for all games  $X$ .

Symmetry: if  $G + X$  has the same outcome as  $H + X$  for all games  $X$  then  $H + X$  has the same outcome as  $G + X$  for all games  $X$ .

Transitivity: if for any game  $X$ ,  $G + X$  has the same outcome as  $H + X$  and  $H + X$  has the same outcome as  $K + X$  then  $G + X$  has the same outcome as  $K + X$ .

**Teorema:**  $G=0$  se e só se  $G$  é uma posição  $P$ .

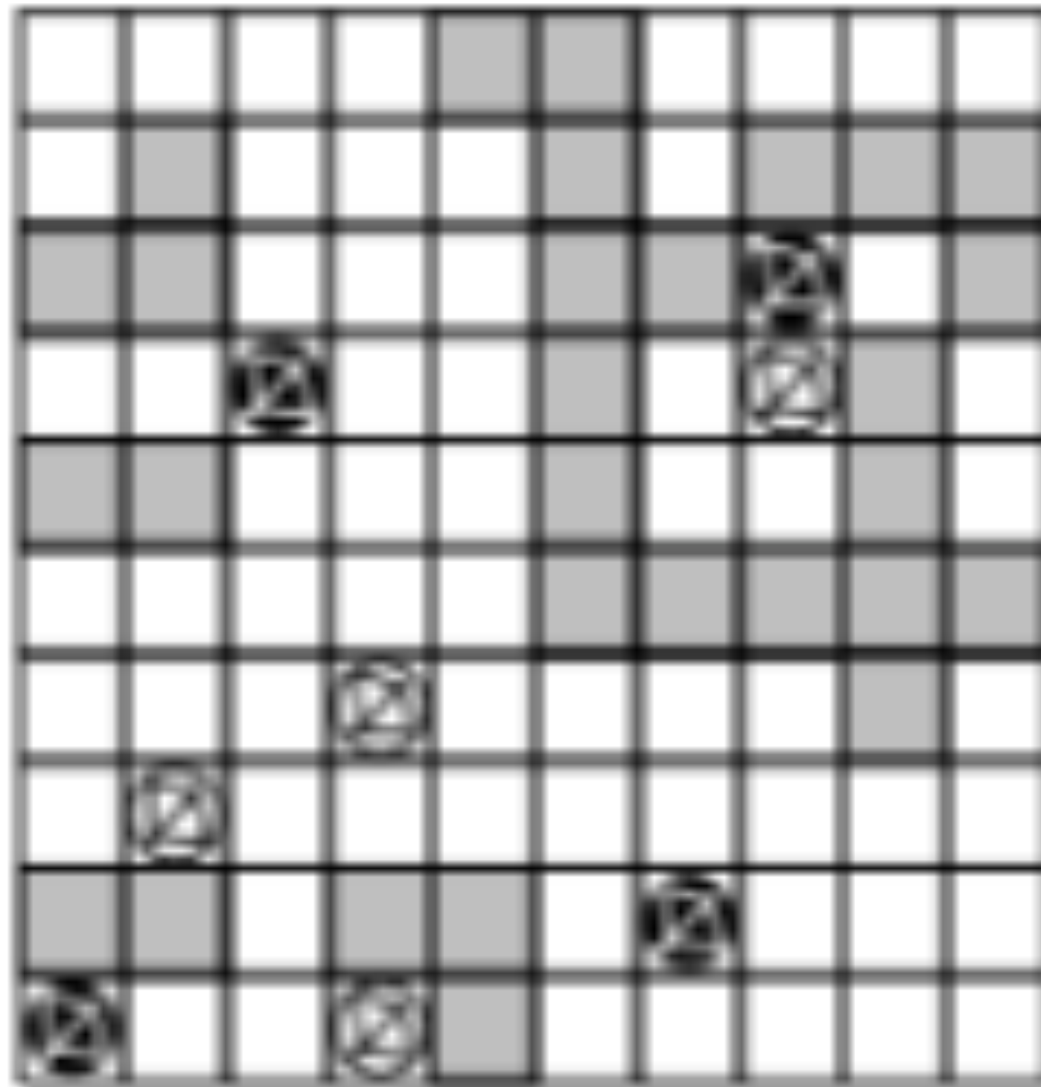
--> Tomar  $X=0$  na definição (desfechos de  $0+0=0$ )

<-- Se Left ganha em 2º em  $X$ , então Left também ganha  $G+X$  (mão atrás das costas)

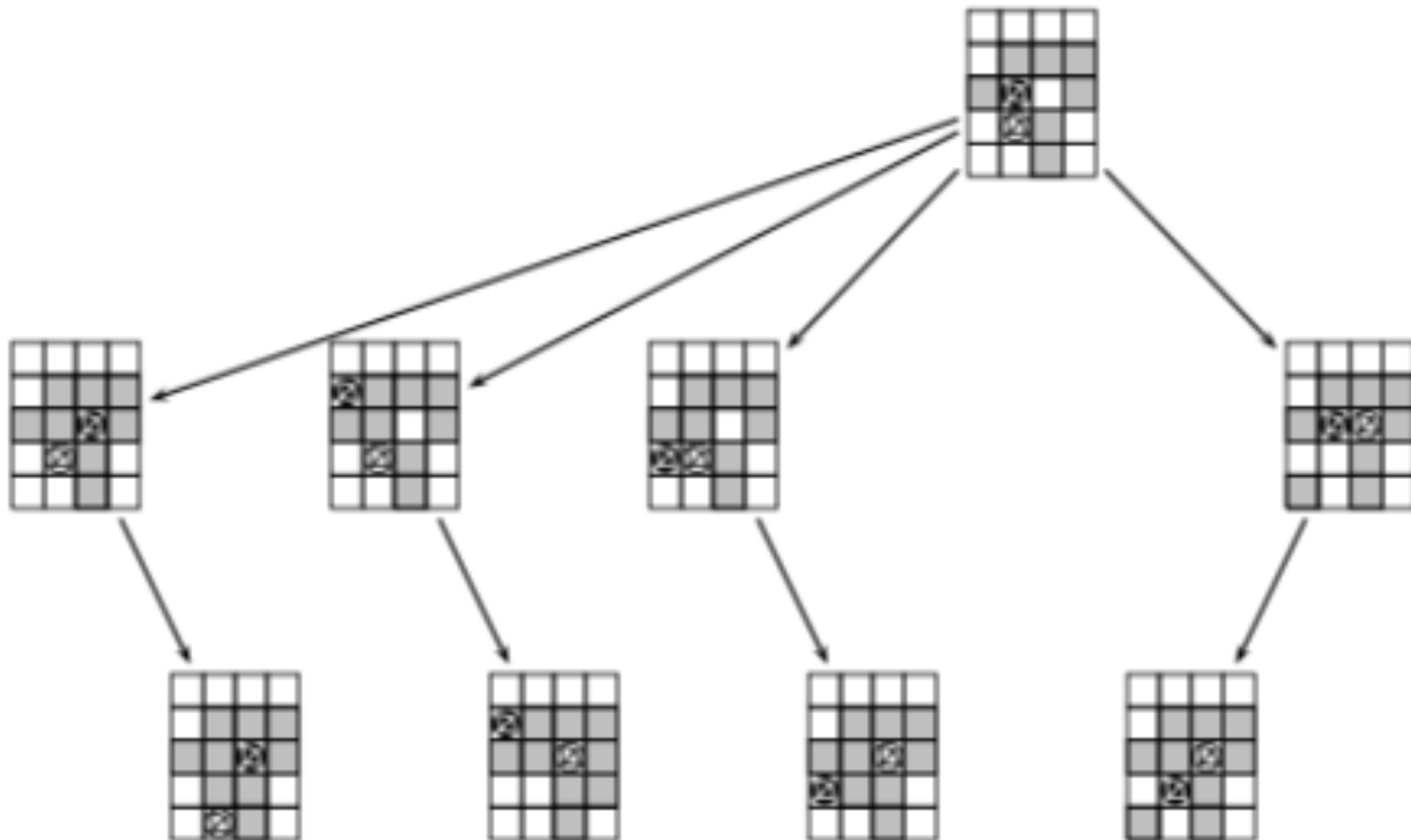
Se Left ganha em 1º em  $X$  então também em  $G+X$ ,  
jogando em  $X$ .

De forma similar, se Right ganha  $X$ , então também  
ganha  $G+X$

# Exemplo: Amazonas



Ajuda a perceber que esta zona vale 0



Teorema:

$$G - G = 0$$

Dem: Tweedledum-Tweedledee, já que

$$G - G = G + (-G) = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^R\} + \{-\mathcal{G}^R | -\mathcal{G}^L\}$$

**Teorema:** Dados  $G, H, J$ . Tem-se  $G=H$  sse  $G+J=H+J$

--> Dado  $X$ , usar  $X'=J+X$  e hipótese.

(queremos mostrar que os desfechos de  $G+J+X$  são os mesmos de  $H+J+X$ )

<-- usar  $X=-J$

$$\begin{aligned}
G &= G + 0 \\
&= G + (J - J) \\
&= (G + J) - J \\
&= (H + J) - J \\
&= H + (J - J) \\
&= H + 0 \\
&= H
\end{aligned}$$



$$G = G', H = H' \Rightarrow G + H = G' + H'$$



$$G + H = G' + H = G' + H'$$

$$G = H \Leftrightarrow G - H = 0$$

isto é, se  $G-H$  é  $P$

Dem: somar  $-H$  a ambos os membros

Relembrar ordem definida à custa dos desfechos

$G \geq H$  se desfechos de  $G + X$  melhores (L) ou iguais aos de  $H + X$

$G \leq H$  se desfechos de  $G + X$  melhores (R) ou iguais aos de  $H + X$

$$G \geq H \Leftrightarrow H \leq G$$

$G \geq H$  means that Left wins  $G + X$  whenever Left wins  $H + X$ ; that is, whenever Right wins  $G + X$  then Right wins  $H + X$  and therefore  $H \leq G$ .

$$G = H \Leftrightarrow G \geq H \text{ e } H \leq G$$

Now,  $G = H$  *if and only if* Left wins  $G + X$  whenever Left wins  $H + X$  and Right wins  $G + X$  whenever Right wins  $H + X$ , that is,  $G \geq H$  and  $G \leq H$ .



Teorema: Sejam  $G$  e  $H$  imparciais. Então  $G = -G$  e  $G = H$   
ou  
 $G || H$  ( $G$  e  $H$  são confusos, ie,  $G - H$  é  $N$ )

Dem: Jogar  $G + G$ . TT dá que  $G + G$  é  $P$ . Logo  $G + G = 0$  e  $G = -G$

Se  $G$  é diferente de  $H$ , o que é  $G - H$ ?

Não pode ser  $L$  nem  $R$  porque é imparcial.

Não pode ser  $P$  porque  $H$  é diferente de  $G$  que é igual a  $-G$   
(recordar que  $G - H$  ser  $P$  quer dizer  $G - H = 0$ )

Logo,  $G - H$  é  $N$ , isto é,  $G || H$ .



## Opções dominadas

Theorem 4.30. *If*

$$G = \{A, B, C, \dots \mid H, I, J \dots\}$$

*and  $B \geq A$ , then  $G = G'$  where*

$$G' = \{B, C, \dots \mid H, I, J \dots\} .$$

if Left moves to  $\check{B}$ ,

Right responds on the other component to  $-\check{B}$

and vice-versa.

$$\underbrace{\left\{ A, \check{B}, \check{C}, \dots \mid \check{H}, \check{I}, \check{J} \dots \right\}}_G - \underbrace{\left\{ \check{B}, \check{C}, \dots \mid \check{H}, \check{I}, \check{J} \dots \right\}}_{G'}$$

$A - G'$

$A - B$   
 R wins  
 since  
 $B \geq A$

## opções reversíveis

Theorem 4.31. *Fix a game*

$$G = \{A, B, C, \dots \mid H, I, J, \dots\}$$

*and suppose that for some right option of  $A$ , call it  $A^R$ ,  $G \geq A^R$ . If we denote the left options of  $A^R$  by  $\{W, X, Y, \dots\}$ :*

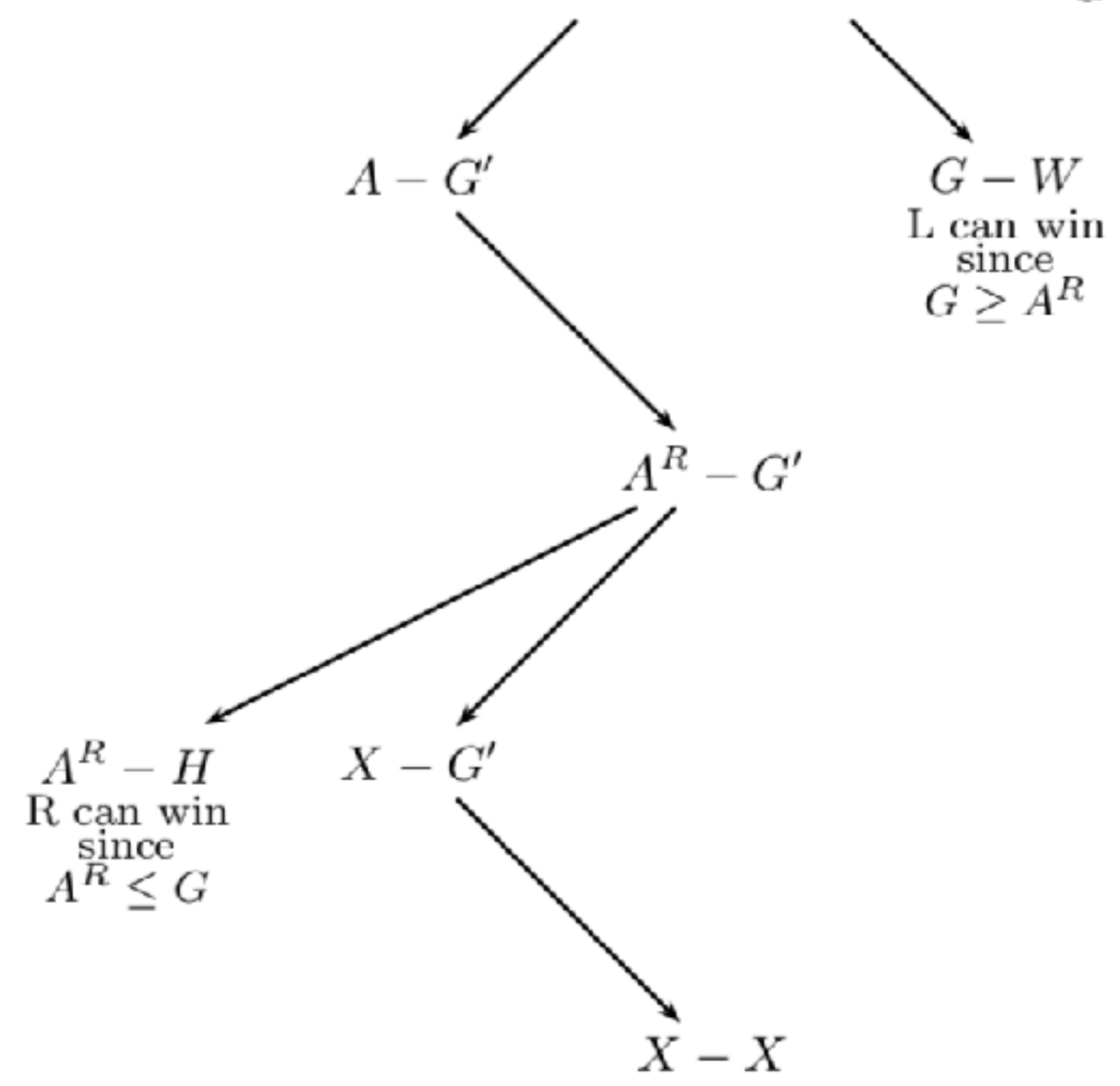
$$A^R = \{W, X, Y, \dots \mid \dots\}$$

*and define the new game*

$$G' = \{W, X, Y, \dots, B, C, \dots \mid H, I, J, \dots\},$$

*then  $G = G'$ .*

$$\underbrace{\left\{ A, \overset{\vee}{B}, \overset{\vee}{C}, \dots \mid \overset{\vee}{H}, \overset{\vee}{I}, \overset{\vee}{J}, \dots \right\}}_G - \underbrace{\left\{ W, X, Y, \dots, \overset{\vee}{B}, \overset{\vee}{C}, \dots \mid \overset{\vee}{H}, \overset{\vee}{I}, \overset{\vee}{J}, \dots \right\}}_{G'}$$



Um jogo está em forma canónica se não tem opções dominadas nem reversíveis.

Se  $G$  e  $H$  estão em forma canónica e  $G=H$ , então  $G$  e  $H$  são isomorfos (mesma árvore).