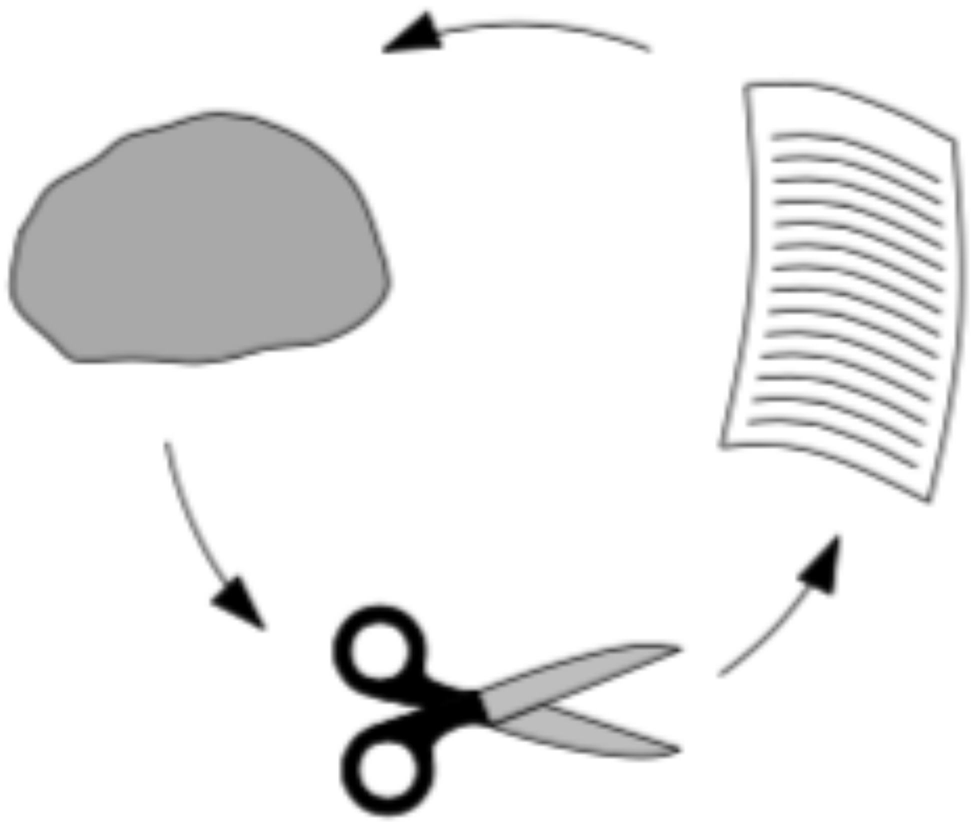
Teoria clássica

von Neumann

Nash

Decisão simultânea



Coluna

Linha

	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0	-1	1
Papel	1	0	-1
Tesoura	-1	1	0

Um número positivo significa ganho para a Linha e perda para o Coluna.

Um número negativo significa ganho para o Coluna e perda para a Linha.

Jogo de soma nula

jogo entre a Linha e o Coluna, que conhecem a matriz, A, do jogo.

Secretamente, a Linha escolhe uma linha da matriz A, *i*, e o Coluna escolhe uma coluna, *j*

a entrada (i,j) é o payoff

o que a Linha ganha, o Coluna perde e vice-versa

payoff > 0 é ganho para a Linha

Aleksander Gierymski 1874

Morra de dois dedos

Atrás das costas, cada jogador levanta um ou dois dedos em cada mão. Depois, em simultâneo, os jogadores mostram as suas escolhas.

Cada jogador pretende que o número de dedos levantados na sua mão esquerda seja igual ao número de dedos levantados na mão direita do adversário.

Se ambos os jogadores conseguirem a dita igualdade, nada acontece. Se ambos os jogadores falharem a dita igualdade, nada acontece. Se apenas um dos jogadores acertar a igualdade, ganha em pontos o total de dedos levantados nas suas duas mãos, ao mesmo tempo que o seu adversário perde esses mesmos pontos.

Coluna

Linha

	2D2E	2D1E	1D2E	1D1E
2D2E	0	4	-3	0
2D1E	-4	0	0	3
1D2E	3	0	0	-2
1D1E	0	-3	2	0

Como ser racional neste tipo de jogos em matrizes?...

Estratégia pura para a Linha é a escolha de uma linha

Estratégia pura para o Coluna é a escolha de uma coluna

vejamos um exemplo.

$$\begin{array}{cc} & \text{Coluna} \\ \text{Linha} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suponhamos que somos a Linha...

Coluna

	2	1
Linha	3	0
	-1	0

Seja qual for a jogada do Coluna, a linha 1 é melhor do que a linha 3

Coluna

	2	1
Linha	3	0
	-1	0

Dizemos que a *estratégia linha 1* ***domina*** *a estratégia linha 3*.

Racionalmente, a Linha nunca vai jogar a linha 3.
Porquê? Porque dispõe da linha 1!

	Coluna	
Linha	2	1
	3	0
	-1	0

Dizemos que a *estratégia linha 1* ***domina estritamente*** *a estratégia linha 3*.

Dizemos que a *estratégia linha 2* ***domina*** *a estratégia linha 3*.

Definição.

A estratégia da Linha que consiste em jogar a linha i **domina** (estritamente) a estratégia de jogar a linha i' se cada entrada de i é maior ou igual (maior) que a entrada correspondente de i'.

Definição.

A estratégia do Coluna que consiste em jogar a coluna j **domina** (estritamente) a estratégia de jogar a linha j' se cada entrada de j é menor ou igual (menor) que a entrada correspondente de j'.

Coluna

	2	1
Linha	3	0
	-1	0

A linha 3 não tem qualquer papel no jogo racional...

Coluna

Linha

2	1
3	0

Eliminamos a estratégia dominada

Coluna

Linha	2	1
	3	0

O que pensará o Coluna deste jogo?...

	Coluna	
Linha	2	1
	3	0

A coluna 1 é dominada pela coluna 2

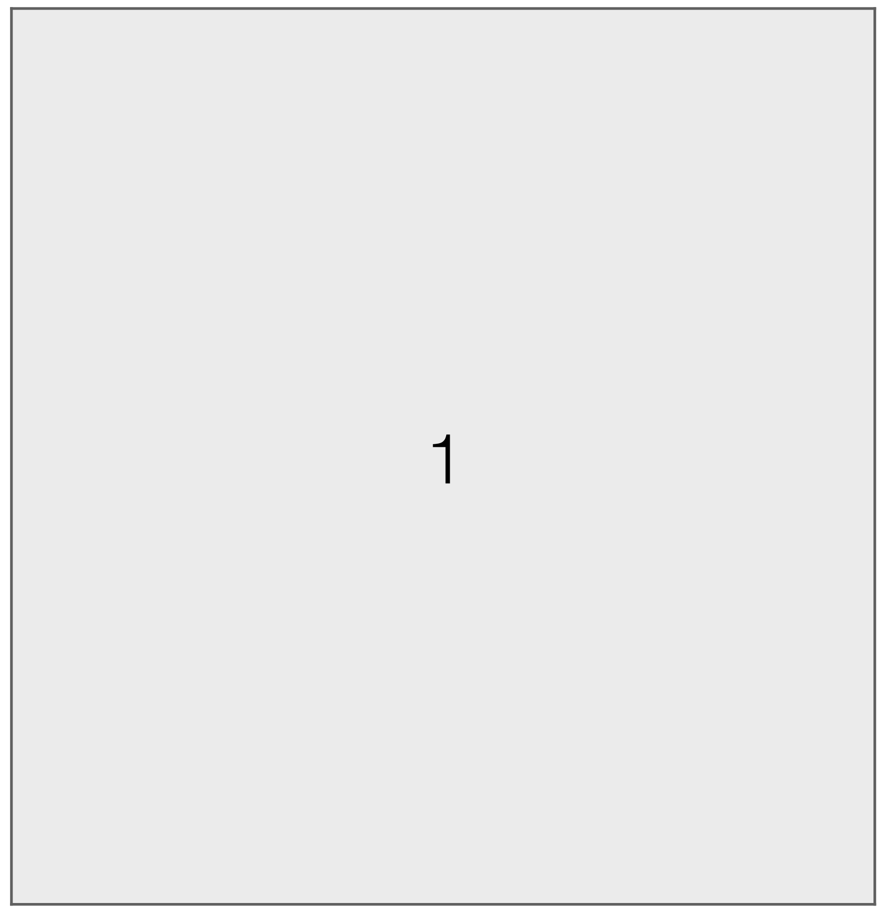
Coluna

Linha	
	1
	0

Eliminação iterada de estratégias dominadas

Coluna

Linha



Eliminação iterada de estratégias dominadas

Coluna

Linha	2	1
	3	0
	-1	0

Conclusão: a Linha vai jogar linha 1, o Coluna vai jogar coluna 2 e o payoff será 1.

Votação linear

7 posições políticas, ordenadas de um extremo para o outro

10 eleitores simpatizam com cada posição

2 candidatos, que devem escolher a sua posição.

Quando votam, os eleitores escolhem o candidato mais próximo das suas ideias. Em caso de empate, dividem-se igualmente.

Por exemplo se o candidato A escolher a posição 2 e o candidato B escolher a posição 4...

A recebe os votos dos eleitores simpatizantes com 1 e 2, o candidato B recebe os votos dos 4, 5, 6, 7

e dividem os simpatizantes com 3

Resultado: A-25 ; B-45

Coluna

Linha

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

Como jogar racionalmente?...

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

A Linha, olha para as linhas 1 e 2 e...

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

A linha 2 domina a linha 1

A linha 6 domina a linha 7

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

O coluna, olha para as colunas 1 e 2 e...

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

A coluna 2 domina a coluna 1

A coluna 6 domina a coluna 7

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	-50	-40	-30	-20	-10	0
2	50	0	-30	-20	-10	0	10
3	40	30	0	-10	0	10	20
4	30	20	10	0	10	20	30
5	20	10	0	-10	0	30	40
6	10	0	-10	-20	-30	0	50
7	0	-10	-20	-30	-40	-50	0

Apliquemos eliminação iterada de estratégias dominadas...

	2	3	4	5	6
2	0	-30	-20	-10	0
3	30	0	-10	0	10
4	20	10	0	10	20
5	10	0	-10	0	30
6	0	-10	-20	-30	0

Novo jogo...

	2	3	4	5	6
2	0	-30	-20	-10	0
3	30	0	-10	0	10
4	20	10	0	10	20
5	10	0	-10	0	30
6	0	-10	-20	-30	0

De novo a segunda e penúltima estratégias dominam a primeira e o última, respectivamente (para ambos)

	3	4	5
3	0	-10	0
4	10	0	10
5	0	-10	0

Mais um jogo que simplifica por aplicação da eliminação iterada de estratégias dominadas...

	4
4	0

A matriz, que começou por ser 7x7, reduziu-se a 1x1...

Notas

Ambos os jogadores escolherão 4, se não souberem nada sobre o adversário.

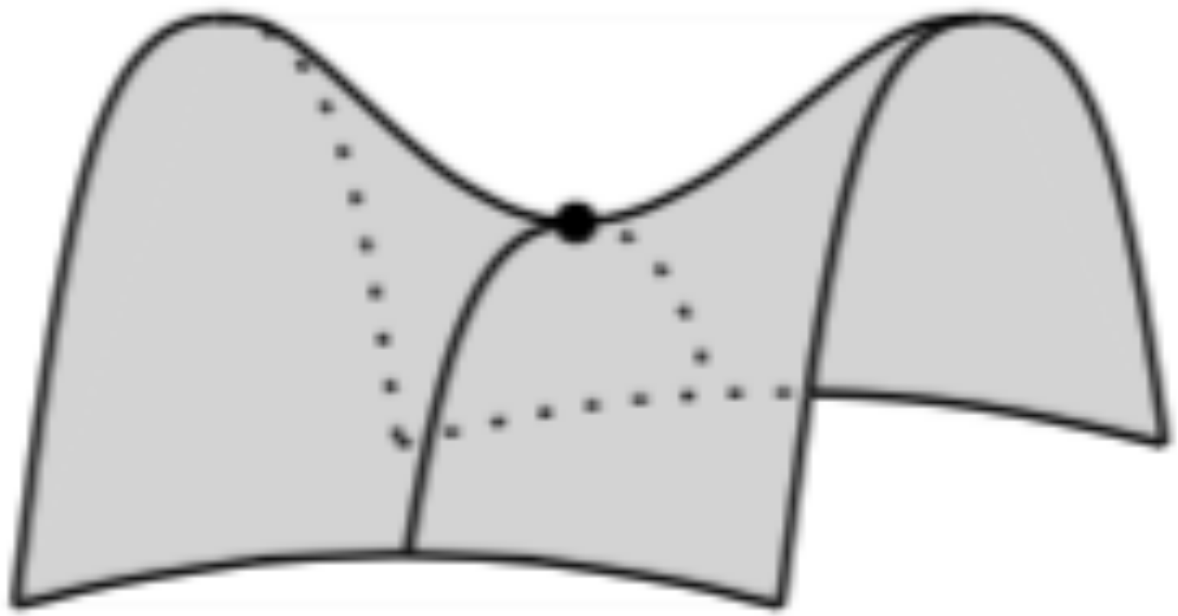
Se a Linha souber que o Coluna vai jogar 2, então deve jogar 3!...

Este exemplo modela muitas situações da vida real (fast food perto das auto-estradas, ou nas praias, por exemplo.

Quando o processo de eliminação de estratégias dominadas termina com um elemento único, a coisa corre bem...

Definição. ***Ponto de sela*** de uma matriz é a entrada *(i,j)* se essa entrada for a menor da linha *i* e a maior da coluna *j*.

1	9	4	0
5	7	5	6
6	1	3	8



Ponto de sela é (2,3)

1	9	4	0
5	7	**5**	6
6	1	3	8

Teorema. Seja A a matriz de um jogo de soma nula. Se a eliminação iterada de estratégias dominadas conduz a um a entrada única (i,j) então (i,j) é um ponto de sela de A.

Nota: nem todos os pontos de sela se obtêm desta forma.

Nem sempre há estratégias dominadas...

2	-1
1	2

A Linha garante 1€ jogando na linha 2

2	-1
1	2

O Coluna, se admitir que a Linha vai jogar na linha 2, escolhe a coluna 1, garantindo q perde no máximo 1€

2	-1
1	2

A Linha, admitindo que o Coluna joga na coluna 1, escolhe a linha 1!

2	-1
1	2

Mas então o Coluna joga na coluna 2...

Estratégias **mistas** (até aqui foram **puras**)

	1/2	1/2
1/4	2	-1
3/4	1	2

Probabilidades!...

Espaço de probabilidades (finito), *S* (conjunto finito) e uma função *p*

$$p : S \to [0, 1]$$

$$\sum_{x \in S} p(x) = 1$$

Exemplo: lançamento de duas moedas iguais.

$$S=\{FF, FV, VF, VV\}$$

Como os acontecimentos são equiprováveis, tem-se $p(FV)=1/4$, etc

Variável aleatória é f:

$$f : S \to \mathbb{R}$$

Valor esperado, ou **esperança matemática** de *f*:

$$E(f) = \sum_{x \in S} p(x) f(x)$$

Seja f o número de Vs num lançamento.

$$f(FV)=f(VF)=1,\ f(VV)=2,\ f(FF)=0$$

$$E(F) = ?$$

$$\mathrm{E(f) = p(FF)f(FF) + p(FV)f(FV) + p(VF)f(VF) + p(VV)f(VV) = 1}$$

Isto também é um espaço de probabilidade

	1/2	1/2
1/4	2	-1
3/4	1	2

a entrada (1,2) tem probabilidade 1/4 x 1/2, etc

	1/2	1/2
1/4	2	-1
3/4	1	2

Qual é o valor esperado do jogo?...

Qual é o valor esperado do jogo?...

	1/2	1/2
1/4	2	-1
3/4	1	2

$$1/4 \times 2 \times 1/2 + 1/4 \times (-1) \times 1/2 + 3/4 \times 1 \times 1/2 + 3/4 \times 2 \times 1/2 = 5/4$$

em linguagem matricial

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Definição. ***Estratégia mista*** para a Linha é um vector linha, cujas entradas são não negativas

$$\begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

e

$$\sum_1^n p_i = 1$$

semelhante para o Coluna

A *estratégia mista* (1, 0 , ..., 0) coincide com a *estratégia pura* escolher a linha 1, etc.

Se a Linha vai jogar a estratégia mista ***p:*** $(p_1, \ldots, p_n)$

e o Coluna vai jogar a estratégia mista ***q:***

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

temos um espaço de probabilidades.

À entrada (i, j) está associada a probabilidade $p_i q_j$

Qual é o valor esperado do payoff?

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_i a_{i,j} q_j$$

isto é,

$$\boldsymbol{pAq}$$

Teorema. O valor esperado do payoff é dado por (estratégia pura ou mista):

	$coluna\ j$	q
$linha\ i$	$a_{i,j}$	$(Aq)_i$
p	$(pA)_j$	pAq

garantias

Suponhamos que em A, a Linha vai jogar a estratégia mista $\boldsymbol{p}$

O vector $\boldsymbol{p}A$ contém a informação sobre o payoff esperado

A Linha quer o payoff o maior possível, independentemente da escolha do Coluna.

A garantia de $\boldsymbol{p}$ é a menor entrada de $\boldsymbol{p}A$ é um minorante para valor esperado do payoff.

A garantia de $\boldsymbol{q}$ é a maior das entradas de $A\boldsymbol{q}$

$g(\boldsymbol{p})$

$g(\boldsymbol{q})$

*g(**p**)=v* não implica que, sempre que a Linha joga ***p***, o payoff venha maior ou igual a *v*. Significa que o valor esperado é pelo menos *v*.

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Quais são as garantias da Linha e do Coluna?

g(p)=1/6, g(q)=2

Comparação de vectores: entrada a entrada. Só se comparam coisas da mesma dimensão.

g(***p***)=*v* sse $pA \geqslant \begin{pmatrix} v & \ldots & v \end{pmatrix}$

g(***q***)=*v* sse

$$Aq \leqslant \begin{pmatrix} v \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}$$

Teorema. Sejam p e q estratégias mistas para a Linha e o Coluna, respectivamente, no jogo de soma nula com matriz A.

i) Se $g(p)=r$ então $pAq \geqslant r$

ii) Se $g(q)=c$ então $pAq \leqslant c$

iii) Se $g(p)=r$ e $g(q)=c$ então $r \leqslant c$

Dem:

Teorema de von Neumann (Minimax):

Para qualquer jogo de soma nula *A,* existe um número, v, chamado **valor de *A***, que é a garantia da Linha e a garantia do Coluna.

v será o payoff, admitindo jogadores racionais.

ao triplo, (v, p, q) chama-se solução de von Neumann do jogo A.

v é único, mas p e q podem não ser, pelo que pode haver várias soluções de von Neumann para o mesmo jogo.

A origem do nome minimax.

O Coluna quer **mini**mizar o **máx**imo das entradas de Aq

A Linha quer **maxi**mizar o **mín**imo das entradas de pA

O Teorema de von Neumann garante que o minimax do Coluna é o maxmin da Linha.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3/8 & 0 & 0 & 7/24 & 1/3 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 11/24 \\ 1/4 \\ 0 \\ 7/24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determine g(p) e g(q).

Conclua que o valor do jogo é 33/12.

5.11.2019

Determinar soluções de von Neumann é muito difícil, em geral.

Um caso simples é quando as respectivas estratégias são puras. Neste caso tem-se

Seja *A* um jogo de soma nula e $a_{i,j} = v$ então *A* tem um ponto de sela em *(i,j)* sse (*v, linha i, coluna j*) é uma solução de von Neumann.

Este exercício é baseado numa adaptação livre de cenários típicos da televisiva Game of Thrones.

Daenerys Targaryen e o Rei da Noite disputam a posse de dois locais importantes no teatro de guerra.

Esses locais, a Muralha e Winterfell, valem 3 e 1 pontos, respectivamente.

Quando um dos soberanos conquista um dos locais ganha o respectivo número de pontos, ao mesmo tempo que o adversário perde esse número de pontos.

Cada soberano tem dois dragões.

Se um deles mandar mais dragões para um dos locais do que o outro, conquista esse local.

Se ambos os soberanos mandarem o mesmo número de dragões para um local, nenhum dos dois o conquista.

(a) Quantas estratégias puras tem cada soberano à sua disposição?

(b) Modele a situação através de um jogo de soma nula.

(c) Através da eliminação de estratégias estritamente dominadas, encontre um equilíbrio de Nash (solução de von Neumann) de estratégias puras. Tendo esse equilíbrio em mente, que conselho daria a cada um dos soberanos?

Cada soberano tem 3 estratégias puras: colocar 2 dragões na Muralha (20), colocar 1 dragão em cada local (11) ou colocar 2 dragões em Winterfell (02).

	20	11	02
20	0	2	2
11	-2	0	2
02	-2	-2	0

	20	11	02
20	0	2	2
11	-2	0	2
02	-2	-2	0

	20	11	~~02~~
20	0	2	~~2~~
11	-2	0	~~2~~
02	-2	-2	~~0~~

	20	11
20	0	2
11	-2	0
~~02~~	~~-2~~	~~-2~~

	20	11
20	0	2
~~11~~	~~-2~~	~~0~~

	20	~~11~~
20	0	~~2~~

(e_1^1, e_2^1) é um equilíbrio de Nash em estratégias puras. Eles devem mandar os seus dois dragões para a Muralha.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 11 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) Marque com um círculo a entrada mínima de cada linha e marque com uma cruz a entrada máxima de cada coluna.

(b) O que tem de acontecer em termos de cruzes e círculos para que existam equilíbrios de Nash em estratégias puras?

(c) Indique os equilíbrios de Nash em estratégias puras dos jogos descritos por A e por A'.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & \text{[illegible]} \\ 5 & 4 & 7 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 5 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 10 \\ 5 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 11 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Quando uma cruz e um círculo coincidem, os jogadores não têm incentivo para mudar. Sendo assim, essas entradas são equilíbrios de Nash em estratégias puras.

O jogo descrito por A tem um equilíbrio de Nash em estratégias puras, (e_1^2, e_2^2). O jogo descrito por A' tem quatro equilíbrios de Nash em estratégias puras, (e_1^1, e_2^1), (e_1^1, e_2^3), (e_1^3, e_2^1) e (e_1^3, e_2^3).

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

a) Determine o valor esperado de (p,q)

b,c) Determine g(p), g(q)

d) Sabendo que a Linha vai jogar p, qual é a melhor resposta do Coluna?

$$\overrightarrow{p}A\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 2$$

O valor esperado de $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ é 2.

$$\overrightarrow{p}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{p}) = \min(\tfrac{10}{3}, \tfrac{4}{3}) = \tfrac{4}{3}$$

$$A\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \\ \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{q}) = \max(\tfrac{7}{3}, \tfrac{1}{3}, 3) = 3$$

Bob deve optar pela estratégia pura e_2^2, obtendo o valor esperado de $\frac{4}{3}$.

e) Sabendo que o Coluna vai jogar q, qual é a melhor jogada da Linha?

f) Existem estratégias puras dominadas?

g) Existe algum equilíbrio de Nash de estratégias puras?

Alice deve optar pela estratégia pura e_1^3, obtendo o valor esperado de 3.

Não.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \;\;5 & \quad\;\; 4 \end{matrix} & \end{array}$$

O máximo dos mínimos (ponto de vista de Alice) não coincide com o mínimo dos máximos (ponto de vista de Bob). Sendo assim, não há equilíbrios de Nash em estratégias puras.

(h) Determine os valores esperados relativos aos seguintes cenários:

i. A Linha opta por p e o Coluna pela coluna 1
.
ii. A Linha opta pela linha 1 e o Coluna por q.

iii. A Linha opta pela linha 1 e o Coluna pela coluna 1
.

Já vimos que se tem $\overrightarrow{p}A = \left[\begin{array}{cc} \frac{10}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right]$. Sendo assim, dado que Bob opta por e_2^1, o valor esperado é $\frac{10}{3}$.

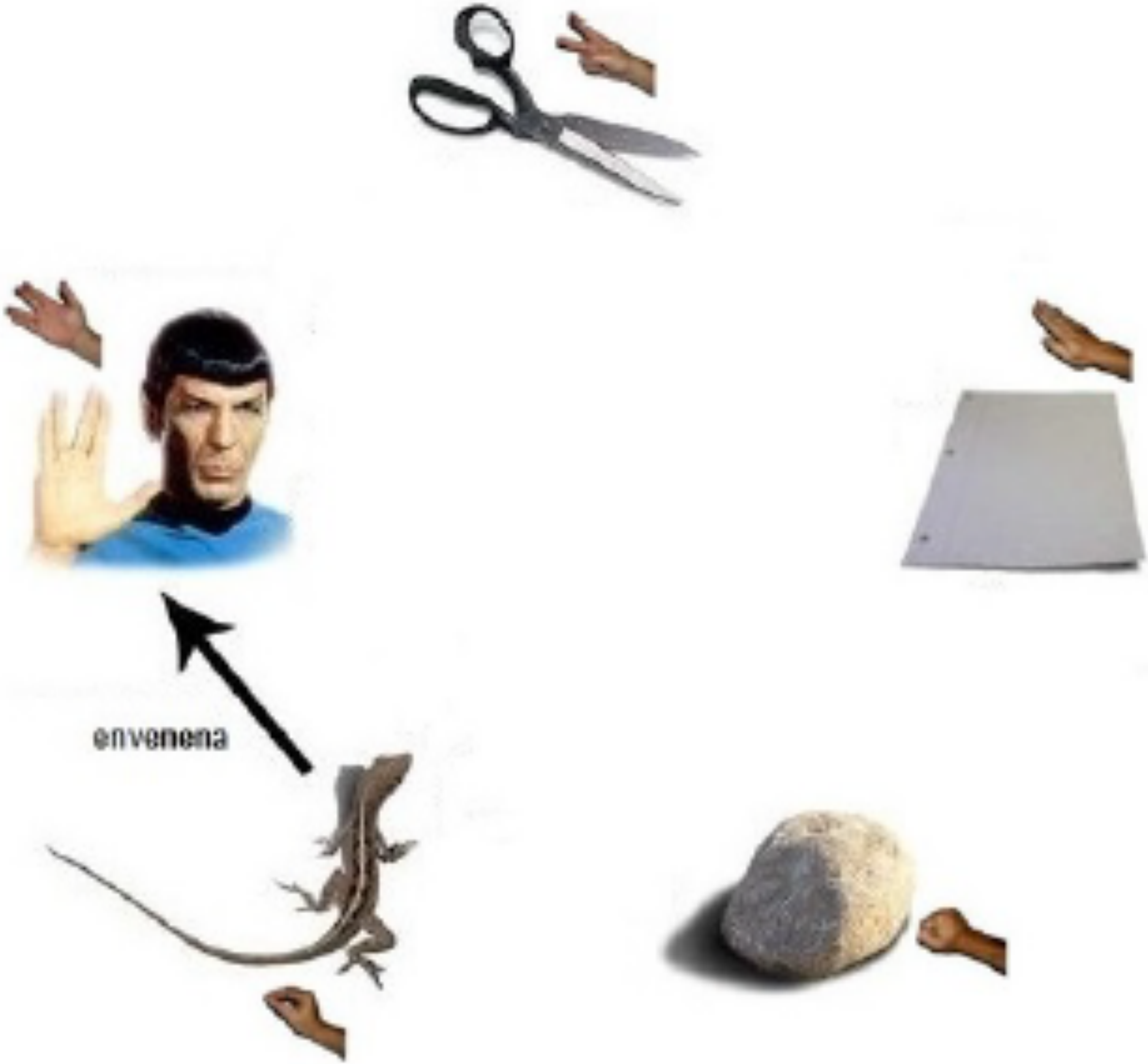
Já vimos que se tem $A\overrightarrow{q} = \left[\begin{array}{c} \frac{7}{3} \\ \\ \frac{1}{3} \\ \\ 3 \end{array}\right]$. Dado que Alice opta por e_1^1, o valor esperado é $\frac{7}{3}$.

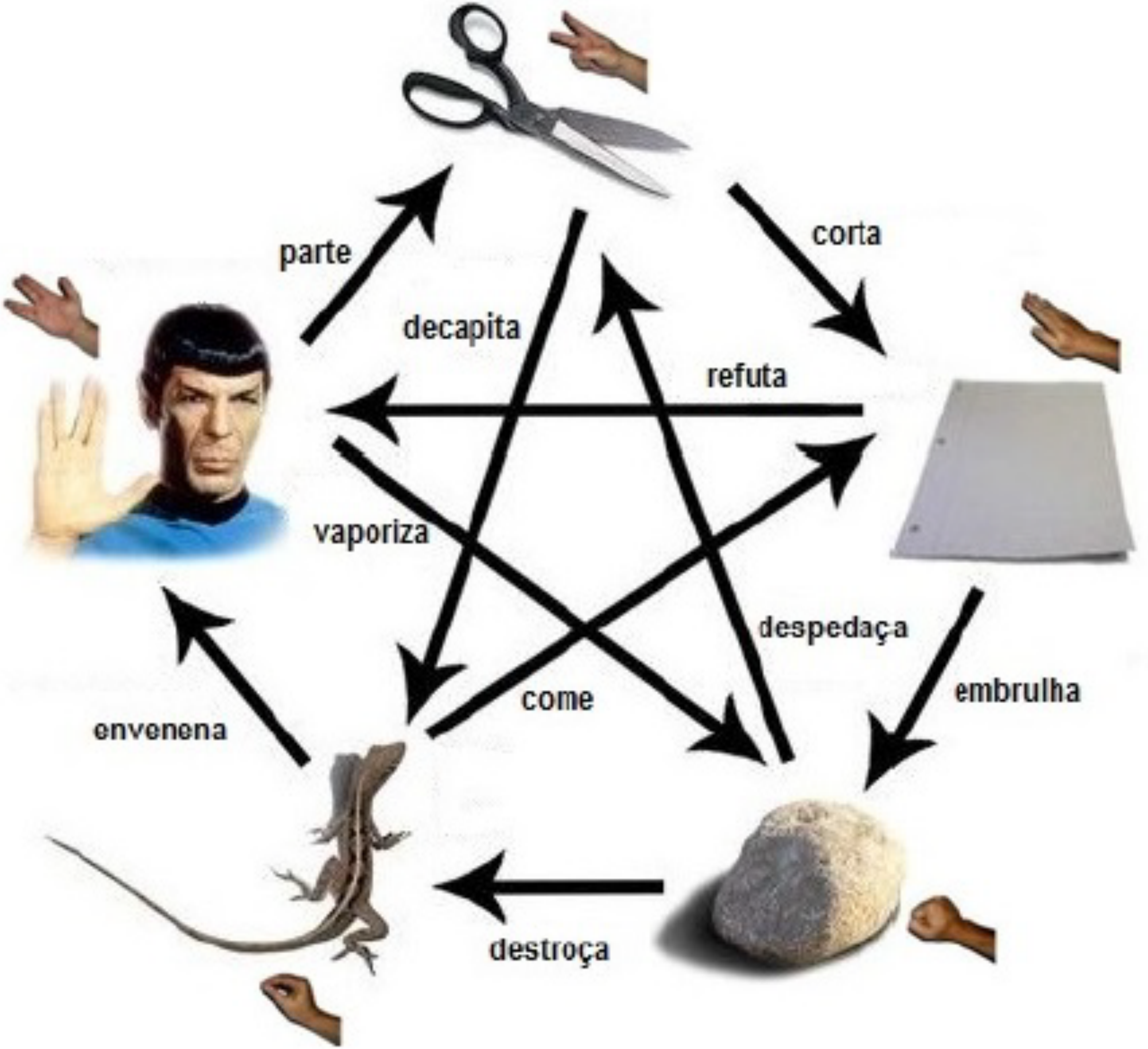
Quando ambos os jogadores optam por estratégias puras, o desfecho é determinado por inspecção directa da matriz da forma normal. Neste caso, é igual a -1.

Na série televisiva Big Bang Theory joga-se uma versão engraçada do pedra, papel ou tesoura chamada pedra, papel, tesoura, lagarto ou Spock.

As regras são simples: a tesoura corta o papel, que embrulha a pedra, que destroça o lagarto, que
envenena o Spock, que parte a tesoura, que decapita o lagarto, que come o papel, que refuta o Spock, que vaporiza a pedra, que despedaça a tesoura.

(a) Na imagem seguinte, a seta indica que o lagarto vence o Spock. Acrescente setas, de forma a obter uma representação das regras do jogo em forma de grafo.


@nvenena



parte
corta
decapita
refuta
vaporiza
despedaça
embrulha
come
envenena
destroça

Admitindo que quem ganha a jogada ganha 1 euro (quem perde a jogada perde 1 euro) e que o empate deixa tudo na mesma, modele a situação através de um jogo de soma nula.

(c) Há estratégias puras estritamente dominadas?

(d) As personagens da série optam invariavelmente por Spock. Qual é o conjunto de melhores respostas contra essa opção?

(e) Suponha agora que vai jogar com alguém incapaz de fazer o gesto manual do Spock (consequentemente, essa estratégia está-lhe vedada). Considere as estratégias pela ordem T, Pa, Pe, L, S.

	T	Pa	Pe	L	S
T	0	1	-1	1	-1
Pa	-1	0	1	-1	1
Pe	1	-1	0	1	-1
L	-1	1	-1	0	1
S	1	-1	1	-1	0

Não.

Qualquer estratégia mista que combine Papel e Lagarto.

i) Se adoptar q=(1/5,1/5,1/5,1/5,1/5), que valor garante ?

ii) Seja p=(2/15,4/15,6/15,3/15) (para o jogador que não sabe "jogar Spock".

Seja q=(6/15,4/15,2/15,0,3/15 para si. Determine g(p) e g(q). O que conclui?)

$$A\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{q}) = \max(0, 0, 0, 0) = 0$$

$$A\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{6}{15} \\ \frac{4}{15} \\ \frac{2}{15} \\ 0 \\ \frac{3}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} \\ -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{q}) = \max(-\tfrac{1}{15}, -\tfrac{1}{15}, -\tfrac{1}{15}, -\tfrac{1}{15}) = -\tfrac{1}{15}$$

$$\overrightarrow{p}A = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{6}{15} & \frac{3}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{4}{15} & -\frac{1}{15} \end{bmatrix}$$

$g(\overrightarrow{p}) = \min(-\frac{1}{15}, -\frac{1}{15}, -\frac{1}{15}, \frac{4}{15}, -\frac{1}{15}) = -\frac{1}{15}$

Como $g(\overrightarrow{p}) = g(\overrightarrow{q})$, estamos perante um equilíbrio de Nash. O facto de o adversário não poder optar por "Spock" traduz-se numa desvantagem passível de ser explorada. O valor do jogo é $-\frac{1}{15}$ (admitindo que esse adversário é o jogador "positivo").

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a estratégia pura com maior valor garantido, para a Linha?

b) Mostre que há estratégias mistas que garantem maior valor do que o determinado na alínea a).

O mínimo das entradas da primeira linha é 1; o mínimo das entradas da segunda linha é 2. Sendo assim, a estratégia pura de Alice com maior valor garantido é e_1^2 (2).

Se Alice optar invariavelmente por e_1^2 (2), Bob deve responder com e_2^3. Uma forma de aumentar o valor esperado consiste em dar um pouco de "peso" à estratégia e_1^1 para "pairar no ar" a possibilidade de ganhar os 3 pontos associados ao perfil (e_1^1, e_2^3).

Por exemplo, se $\overrightarrow{p} = (\frac{1}{10}, \frac{9}{10})$, $g(\overrightarrow{p}) = \min(\frac{29}{10}, \frac{37}{10}, \frac{21}{10}) = \frac{21}{10}$.

Morra de dois dedos

Atrás das costas, cada jogador levanta um ou dois dedos em cada mão. Depois, em simultâneo, os jogadores mostram as suas escolhas.
Cada jogador pretende que o número de dedos levantados na sua mão esquerda seja igual ao número de dedos levantados na mão direita do adversário.
Se ambos os jogadores conseguirem a dita igualdade, nada acontece. Se ambos os jogadores falharem a dita igualdade, nada acontece. Se apenas um dos jogadores acertar a igualdade, ganha em pontos o total de dedos levantados nas suas duas mãos, ao mesmo tempo que o seu adversário perde esses mesmos pontos.

Coluna

Linha

	2D2E	2D1E	1D2E	1D1E
2D2E	0	4	-3	0
2D1E	-4	0	0	3
1D2E	3	0	0	-2
1D1E	0	-3	2	0

(b) Considere a estratégia mista (para ambos os jogadores) que consiste em levantar um dedo da mão esquerda e dois dedos da mão direita 3/7 das vezes e levantar dois dedos da mão esquerda e um dedo da mão direita 4/7 das vezes. Qual é o valor garantido desta estratégia?

(c) Que conclusão pode tirar da alínea anterior?

Trata-se de analisar a estratégia de Alice $\overrightarrow{p} = (0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0)$. A conclusão para a estratégia de Bob $\overrightarrow{q} = (0, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0)$ será simétrica.

$$\overrightarrow{p}A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Tem-se $g(\overrightarrow{p}) = 0$ e, por simetria, $g(\overrightarrow{q}) = 0$.

Como era de esperar, dada a simetria, o valor do jogo é zero. $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ é um equilíbrio de Nash, constituindo uma forma óptima de jogar.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Considere as estratégias mistas $\overrightarrow{p} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $\overrightarrow{p}' = (\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{5})$, $\overrightarrow{q} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$ e $\overrightarrow{q}' = (0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Calcule $g(\overrightarrow{p})$, $g(\overrightarrow{p}')$, $g(\overrightarrow{q})$ e $g(\overrightarrow{q}')$.

(b) Que conclusão pode tirar da alínea anterior?

$$\overrightarrow{p}A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{4} & \frac{3}{2} & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{p}) = \frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{p}'A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{p}') = 2$$

$$A\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{q}) = 2$$

$$A\overrightarrow{q}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$g(\overrightarrow{q}') = \frac{10}{3}$$

Como $g(\overrightarrow{p}') = g(\overrightarrow{q}) = 2$, $(\overrightarrow{p}', \overrightarrow{q})$ é um equilíbrio de Nash e o valor do jogo é igual a 2.

Como habitualmente, considere uma matriz de uma forma normal A, uma estratégia de Alice $\overrightarrow{p}$ (matriz linha) e uma estratégia de Bob $\overrightarrow{q}$ (matriz coluna).

(a) O que acontece ao valor esperado de $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ se se multiplicar cada uma das entradas de A por uma constante c?

(b) Considere uma matriz U cujas entradas são todas iguais a 1. Em que resultam as multiplicações de matrizes $\overrightarrow{p}U$ e $U\overrightarrow{q}$ se estiverem bem definidas?

(c) O que acontece ao valor esperado de $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$ se se adicionar uma constante c a cada uma das entradas de A? Sugestão: observe que a dita adição se exprime matricialmente através de $A + cU$.

(d) Em Teoria Económica de Jogos, a troca de papéis de dois jogadores exprime-se matricialmente utilizando $-A^T$ em vez de A. Como se relaciona o valor esperado de $(\overrightarrow{q}^T, \overrightarrow{p}^T)$ resultante da troca de papéis com o valor esperado de $(\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q})$? Sugestão: tenha em conta a propriedade das matrizes $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.

$\overrightarrow{p}(cA)\overrightarrow{q} = c\overrightarrow{p}A\overrightarrow{q} = cE(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q})$. O novo valor esperado é igual ao antigo multiplicado pela constante c.

$$\overrightarrow{p}U = [p_1 + \ldots + p_{k_1} \;\; p_1 + \ldots + p_{k_1} \;\; \ldots \;\; p_1 + \ldots + p_{k_1}] = [1\ 1\ \ldots\ 1]$$

$$U\overrightarrow{q} = \begin{bmatrix} q_1 + \ldots + q_{k_2} \\ q_1 + \ldots + q_{k_2} \\ \ldots \\ q_1 + \ldots + q_{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{p}(A+cU)\overrightarrow{q} = (\overrightarrow{p}A+c\overrightarrow{p}U)\overrightarrow{q} = (\overrightarrow{p}A+c[1\ 1\ \ldots\ 1])\overrightarrow{q} = \overrightarrow{p}A\overrightarrow{q}+c[1\ 1\ \ldots\ 1]\overrightarrow{q} = E(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q})+c$. O novo valor esperado é igual ao antigo adicionado à constante c.

$\overrightarrow{q}^T(-A^T)\overrightarrow{p}^T = -\overrightarrow{q}^T(A^T)\overrightarrow{p}^T = -(\overrightarrow{p}A\overrightarrow{q})^T = -E(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q})$. É igual ao simétrico do valor esperado de $(\overrightarrow{p},\overrightarrow{q})$.

O Coluna vai jogar uma bola de ténis contra a Linha...

		Coluna	
		E	**D**
Linha	**E**	80%	10%
	D	20%	50%

A Linha melhorou a sua direita...

Coluna

		E	D
Linha	**E**	80%	10%
	D	20%	60%

O que acontece nestes jogos?...

relembremos...

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

notar que...

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (5/4\ 5/4)$$

Não interessa o que o Coluna vai jogar!
O valor esperado é sempre 5/4

Dizemos que a Linha ***igualou o valor esperado***

Def: A estratégia mista p da Linha, no jogo de soma nula A, ***iguala os resultados*** do Coluna se as entradas de pA são todas iguais. (Conceito semelhante para o Coluna).

reparar que...

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

não iguala os resultados da Linha.

Será possível ao Coluna igualar os resultados da Linha?...

procuramos um vector coluna

$$= \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

tal que as entradas de

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

sejam iguais

$$2q - (1 - q) = q + 2(1 - q)$$

$$q = 3/4$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

As garantias são ambas 5/4, logo temos uma solução de von Neumann

Teorema: Se a Linha não tem nenhuma linha dominada, então o Coluna tem uma estratégia mista que iguala os resultados da Linha.

Se o Coluna não tem nenhuma coluna dominada, então a Linha tem uma estratégia mista que iguala os resultados dele.

Teorema mais geral. Para qualquer jogo de soma nula 2x2, *A*, tem-se sempre uma das seguintes:

i) Remoção iterada de estratégias puras dominadas reduz *A* a uma matriz com um só elemento, *[v]*. Neste caso *v* é o valor do jogo e as respectivas linha e coluna são as estratégias puras associadas que em conjunto constituem uma solução de von Neumann

ii) A Linha e o Coluna têm estratégias mistas **p** e **q**, igualando os resultados do adversário. **p**$A = (v\ v)$. O valor *v* junto com **p** e **q** constituem uma solução de von Neumann.

Voltemos ao ténis

		Coluna	
		E	**D**
Linha	**E**	80%	10%
	D	20%	50%

em pontos
[.8x1+.2x(-1)=3/5 etc]

	E	D
E	3/5	-4/5
D	-3/5	0

A Linha deve escolher E-D de tal maneira que seja igualmente difícil para o Coluna ganhar. Isto é exactamente o conceito de igualar os resultados do adversário!...

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -3/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p/5 - 3/5 & -4p/5 \end{pmatrix}$$

p=3/10

$$\begin{bmatrix} 3/10 & 7/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -3/5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/25 & -6/25 \end{bmatrix}$$

A Linha deve escolher o lado E 3/10 das vezes.

O valor do jogo é -6/25

A Linha melhorou e agora temos este jogo

	E	D
E	3/5	-4/5
D	-3/5	1/5

Não há estratégias puras dominadas, pelo que devemos procurar estratégias mistas que igualem os resultados do adversário.

$$(p' \quad 1-p') \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} = (6p'/5 - 3/5 \quad -p' + 1/5)$$

$$p' = 4/11$$

$$p'A' = (-9/55 \quad -9/55)$$

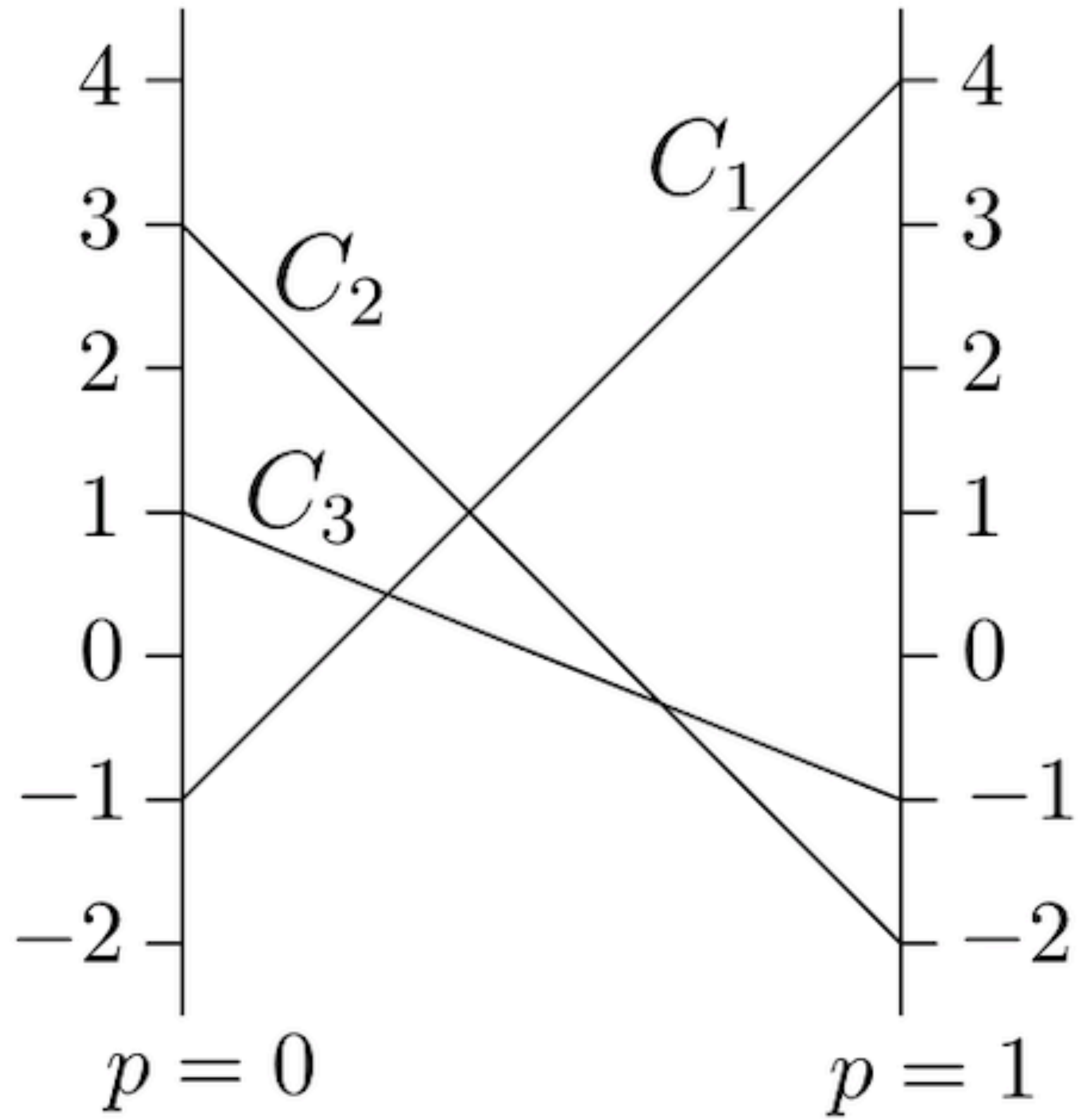
Por melhorar o desempenho num tipo de bola, a Linha agora tem um resultado melhor, mas jogando menos para o lado em que melhorou!

Resolução gráfica

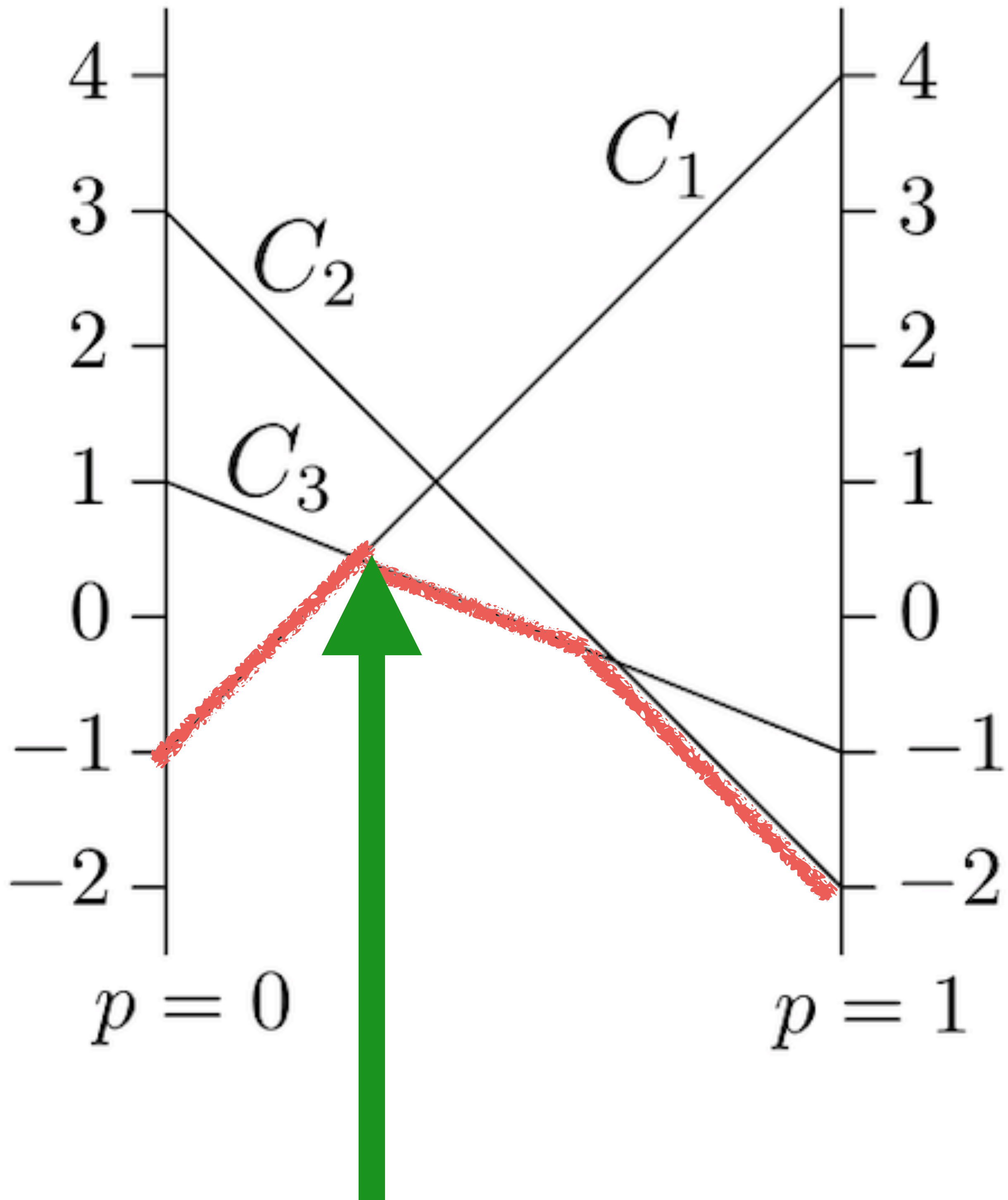
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p & 1-p \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} C_1(p) & C_2(p) & C_3(p) \end{bmatrix}$$

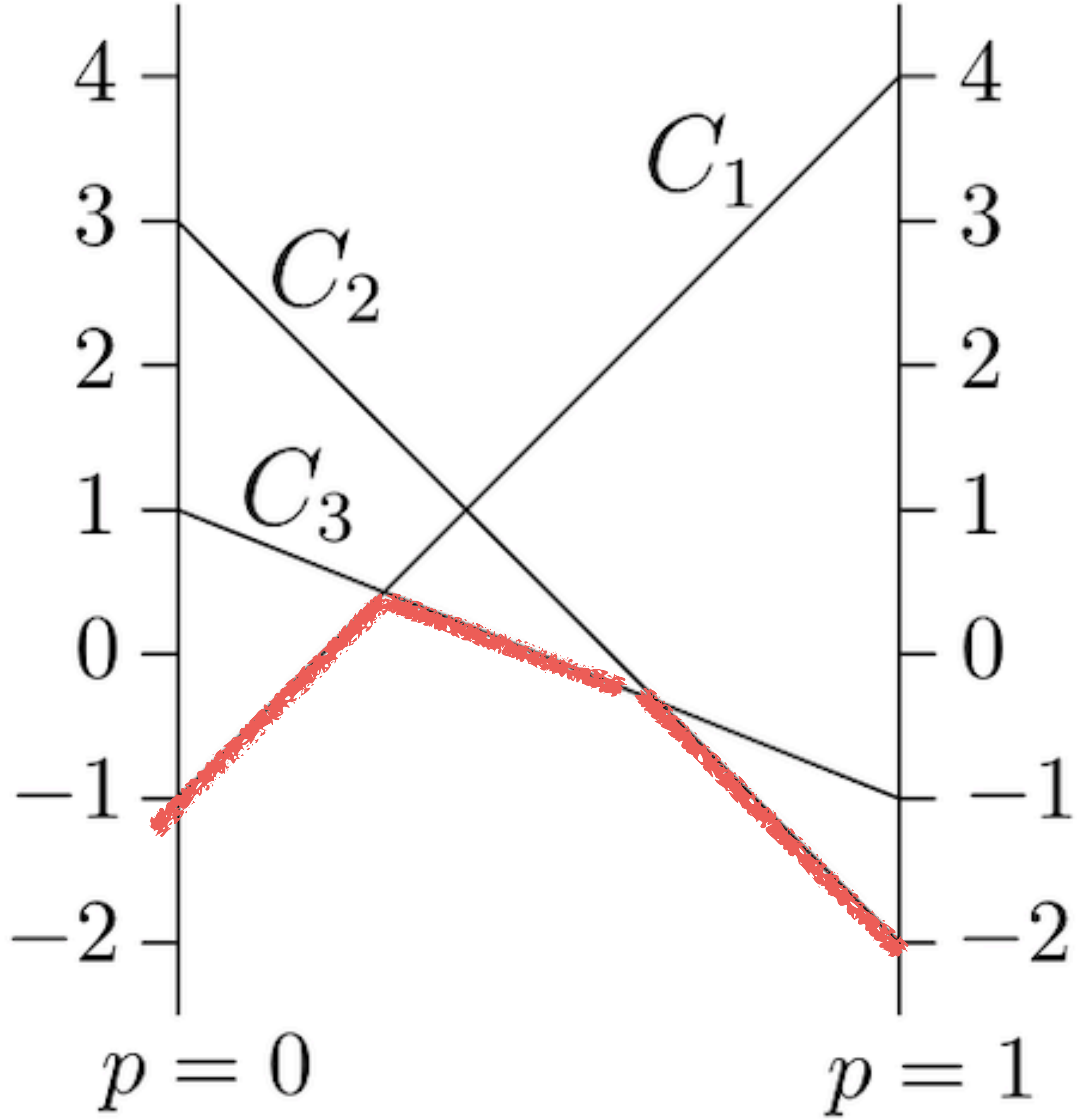
valores esperados em função de p



a garantia da Linha a vermelho



Máximo da garantia da Linha a verde



Queremos a intersecção de duas rectas 5p-1=-2p+1

p=2/7

Sabemos que o valor do jogo é 3/7 (ordenada do ponto determinado, para o qual a abcissa é 2/7).

A Linha vai jogar (2/7 5/7).

Uma estratégia mista que resulte em 3/7, para o Coluna, não vai usar a coluna 2, portanto procuramos uma estratégia da forma

$$\begin{bmatrix} q \\ 0 \\ 1-q \end{bmatrix}$$

Para garantir que as entradas de Aq sejam iguais, temos q=2/7.

Procedimento para resolver jogos 2xn

1. A Linha joga (p 1-p) e faz o gráfico dos valores esperados dos payoffs quando o Coluna joga estratégias puras.

2. A função-garantia da Linha é

$$G_L = min\{C_1(p), \ldots, C_n(p)\}$$

3. Identificar o ponto mais alto (p^*, v^*) do gráfico.

4. O valor do jogo é v^*

5. A estratégia da Linha $(p^*, 1-p^*)$ tem garantia v^*

6. Se o Coluna tiver uma estratégia pura com a mesma garantia, está tudo determinado. Caso contrário, o ponto (p^*, v^*) está na intersecção de duas rectas associadas a duas colunas, uma de declive positivo, outra de declive negativo. Devemos procurar a estratégia mista do Coluna, que usa somente estas duas coluna e iguala os resultados da Linha.

(semelhante para jogos mx2)

(1) Find von Neumann solutions to the following:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

(2) Find von Neumann solutions to the following:

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.