

Teoria e História de Números

Teste 2

Jorge Nuno Silva

10 de Janeiro de 2008

1. Prove que
 - (a) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor -\frac{n}{2} \rfloor = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
 - (b) $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n, \forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}.$
2. Determine o dia da semana do dia em que nasceu.
3. Mostre que existe uma infinidade de inteiros n tais que $\varphi(n)$ é um quadrado perfeito.
4. Mostre que se o inteiro n tem r factores primos ímpares, então $2^r | \varphi(n)$.
5. Use o Teorema de Euler para mostrar que se $(a, n) = (a - 1, n) = 1$, então

$$a^{\varphi(n)-1} + \dots + a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

6. Prove que, seja qual for o inteiro positivo a , tanto a como a^{4n+1} terminam no mesmo dígito.
7. Mostre que se a tem ordem hk módulo n , então a^h tem ordem k módulo n .
8. Mostre que 2 é raiz primitiva de 19 mas não de 17.
9. Dado que 3 é raiz primitiva de 43, determine todos os inteiros positivos menores que 43 cuja ordem módulo 43 é 6.
10. Use uma tabela de índices para uma raiz primitiva módulo 11 para resolver a congruência $7x^3 \equiv 3 \pmod{11}$.