Teoria e História de Números
Teste 1

Jorge Nuno Silva

16 de Novembro de 2007

1. Efectue os cálculos seguintes à moda do Egipto antigo.
   (a) 13×14.
   (b) $105 \div 3$.
2. (a) Escreva em base decimal o número que, em notação sexagesimal, se representa por $2, 45; 23$.
   (b) Converta para a base sexagesimal o número 12345.
3. Qual é o resto da divisão de 3^{40} por 11?
4. Um cesto tem uma quantidade de ovos tal que, quando se tiram 2 a 2, sobra 1; quando se tiram 3 a 3, sobra 1; quando se tiram 4 a 4, sobra 1; quando se tiram 5 a 5, sobra 1; quando se tiram 6 a 6, sobra 1, mas quando se tiram 7 a 7, não sobra nenhum. Qual é o menor número de ovos que o cesto pode conter?
5. Utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros x e y tais que $(56, 72) = 56x + 72y$.
6. (a) Mostre que 496 é um número perfeito.
   (b) Mostre que o produto de dois primos ímpares nunca é um número perfeito.

7. (a) Mostre que se f e g são funções multiplicativas (não identicamente nulas) e $f(p^k) = g(p^k)$ para todos os primos p e todos os inteiros positivos k, então $f = g$.

   (b) Mostre que se tem, para todos os inteiros positivos n,

$$\sum_{d|n} \frac{1}{d} = \frac{\sigma(n)}{n} \cdot$$

8. Relembre que, para $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$, se f é multiplicativa, então

$$\sum_{d|n} \mu(d) f(d) = \prod_{i=1}^{r} (1 - f(p_i)) \, .$$

   Mostre que se tem, para qualquer inteiro positivo n,

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sigma(d) = (-1)^r p_1 \cdots p_r \, .$$