Teoria e História de Números
Exame Final

Jorge Nuno Silva

18 de Janeiro de 2008

1. Efectue os cálculos seguintes à moda do Egipto antigo.

   (a) 23×13. (b) $105 \div 7$.

2. (a) Escreva em base decimal o número que, em notação sexagesimal, se representa por $3,55;13$.

   (b) Converta para a base sexagesimal o número 12435.

3. Utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros x e y tais que $(58,62) = 58x + 62y$.

4. Seja $\omega(n)$ a função aritmética que nos dá o número de divisores primos de n, com $\omega(1) = 0$. Mostre que $2^{\omega(n)}$ é multiplicativa.

   Resolução:

   Note que se $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ então $\omega(n) = k$.

5. Prove que, se x e y são números reais positivos, então $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

   Resolução:

   Se $x = \lfloor x \rfloor + \theta_x$ e $y = \lfloor y \rfloor + \theta_y$ então

   $$\lfloor xy \rfloor = \lfloor \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor + x\theta_y + y\theta_x + \theta_x\theta_y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$$

6. Determine o dia da semana do 25 de Abril de 1974.

7. Mostre que

   (a) Se n é ímpar, então $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

   Resolução:

   $\varphi(2n) = \varphi(2)\varphi(n) = \varphi(n)$.

(b) Se n é par, então $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.

Resolução:

Se $n = 2^k m$ em que m é ímpar, então

$$\varphi(2n) = \varphi(2^{k+1}m) = (2^{k+1} - 2^k)\varphi(m) = 2(2^k - 2^{k-1})\varphi(m) = 2\varphi(n)$$

8. Mostre que se $d|n$ então $\varphi(d)|\varphi(n)$.

   Resolução:

   Note que os factores primos de d são factores primos de n.

9. (a) Se $(a, n) = 1$, mostre que a congruência $ax \equiv b \pmod{n}$ tem a solução $x \equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$.

   Resolução:

   Teorema de Euler dá $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$...

   (b) Resolva a congruência $13x \equiv 2 \pmod{40}$.

10. Use uma tabela de índices para uma raiz primitiva módulo 11 para resolver a congruência $3x^4 \equiv 5 \pmod{11}$.

    Resolução:

    Ver Teste 2 para um exercício muito semelhante a este.