Teoria e História de Números
Exame Final

Jorge Nuno Silva

18 de Janeiro de 2008

1. Efectue os cálculos seguintes à moda do Egipto antigo.

   (a) 23×13. (b) $105 \div 7$.

2. (a) Escreva em base decimal o número que, em notação sexagesimal, se representa por $3, 55; 13$.

   (b) Converta para a base sexagesimal o número 12435.

3. Utilize o Algoritmo de Euclides para determinar inteiros x e y tais que $(58, 62) = 58x + 62y$.

4. Seja $\omega(n)$ a função aritmética que nos dá o número de divisores primos de n, com $\omega(1) = 0$. Mostre que $2^{\omega(n)}$ é multiplicativa.

5. Prove que, se x e y são números reais positivos, então $\lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor xy \rfloor$.

6. Determine o dia da semana do 25 de Abril de 1974.

7. Mostre que

   (a) Se n é ímpar, então $\varphi(2n) = \varphi(n)$.

   (b) Se n é par, então $\varphi(2n) = 2\varphi(n)$.

8. Mostre que se $d|n$ então $\varphi(d)|\varphi(n)$.

9. (a) Se $(a, n) = 1$, mostre que a congruência $ax \equiv b \pmod{n}$ tem a solução $x \equiv ba^{\varphi(n)-1} \pmod{n}$.

   (b) Resolva a congruência $13x \equiv 2 \pmod{40}$.

10. Use uma tabela de índices para uma raiz primitiva módulo 11 para resolver a congruência $3x^4 \equiv 5 \pmod{11}$.