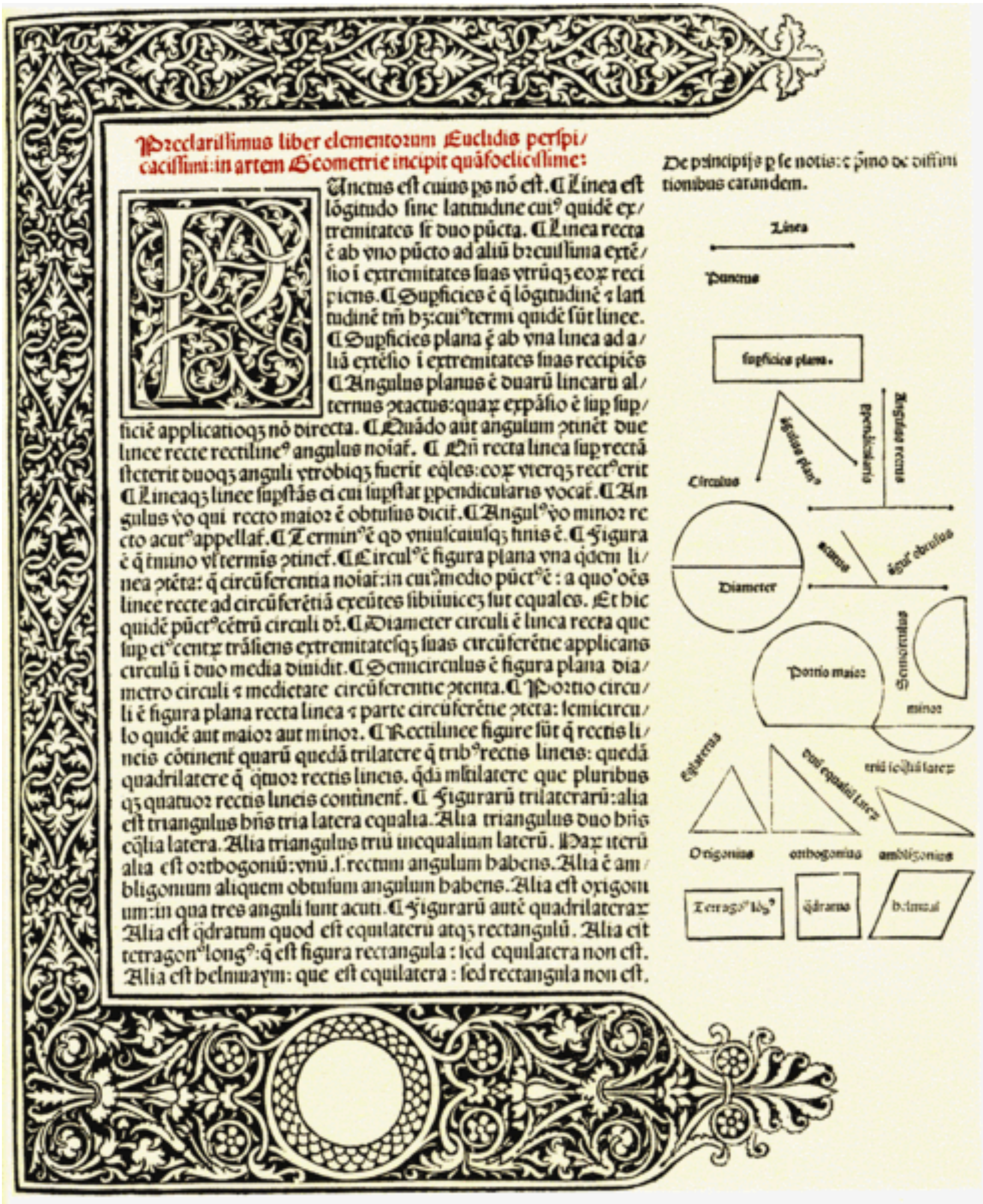
Matemática

*

Os Elementos de Euclides (~300 aC)



Preclarissimus liber elementorum Euclidis perspi-
cacissimi: in artem Geometrie incipit quãfoelicissime:

Punctus est cuius ps nõ est. ¶ Linea est lõgitudo sine latitudine cui⁹ quidẽ ex-
tremitates sũt duo pũcta. ¶ Linea recta ẽ ab vno pũcto ad aliũ breuissima extẽ-
sio ĩ extremitates suas vtrũqꝫ eoꝝ reci-
piens. ¶ Supficies ẽ q̃ lõgitudinẽ ⁊ lati-
tudinẽ tm̃ hꝫ: cui⁹ termi quidẽ sũt linee.
¶ Supficies plana ẽ ab vna linea ad a-
liã extẽsio ĩ extremitates suas recipiẽs
¶ Angulus planus ẽ duarũ linearũ al-
ternus ꝯtactus: quaꝝ expãsio ẽ sup sup-
ficiẽ applicatioqꝫ nõ directa. ¶ Quãdo aũt angulum ꝯtinẽt due
linee recte rectiline⁹ angulus noiaẽ. ¶ Qñ recta linea sup rectã
steterit duoqꝫ anguli vtrobiqꝫ fuerit eq̃les: eoꝝ vterqꝫ rect⁹ erit
¶ Lineaqꝫ linee supstãs ei cui supstat ppendicularis vocaẽ. ¶ An-
gulus vo qui recto maior ẽ obtusus dicit. ¶ Angul⁹ vo minor re-
cto acut⁹ appellaẽ. ¶ Termin⁹ ẽ qd vniuscuiusqꝫ finis ẽ. ¶ Figura
ẽ q̃ tmino vl termis ꝯtineẽ. ¶ Circul⁹ ẽ figura plana vna q̃dem li-
nea ꝯtẽta: q̃ circũferentia noiaẽ: in cui⁹ medio pũct⁹ ẽ: a quo oẽs
linee recte ad circũferẽtiã exeũtes sibiinuicẽ sũt equales. Et hic
quidẽ pũct⁹ cẽtrũ circuli dr̃. ¶ Diameter circuli ẽ linea recta que
sup ei⁹ centꝝ trãsiens extremitatesqꝫ suas circũferẽtie applicans
circulũ ĩ duo media diuidit. ¶ Semicirculus ẽ figura plana dia-
metro circuli ⁊ medietate circũferentie ꝯtenta. ¶ Portio circu-
li ẽ figura plana recta linea ⁊ parte circũferẽtie ꝯteta: semicircu-
lo quidẽ aut maior aut minor. ¶ Rectilinee figure sũt q̃ rectis li-
neis cõtineẽ quarũ quedã trilatere q̃ trib⁹ rectis lineis: quedã
quadrilatere q̃ q̃tuor rectis lineis. q̃dã multilatere que pluribus
qꝫ quatuor rectis lineis continenẽ. ¶ Figurarũ trilaterarũ: alia
est triangulus hñs tria latera equalia. Alia triangulus duo hñs
eq̃lia latera. Alia triangulus triũ inequalium laterũ. Haꝝ iterũ
alia est orthogoniũ: vnũ .s. rectum angulum habens. Alia ẽ am-
bligonium aliquem obtusum angulum habens. Alia est oxigoni-
um: in qua tres anguli sunt acuti. ¶ Figurarũ autẽ quadrilateraꝝ
Alia est q̃dratum quod est equilaterũ atqꝫ rectangulũ. Alia est
tetragon⁹ long⁹: q̃ est figura rectangula: sed equilatera non est.
Alia est helmuaym: que est equilatera: sed rectangula non est.

De principijs p se notis: ⁊ pmo de diffini-
tionibus earundem.

- No Livro I Euclides introduz 23 <u>definições</u> dentre as quais destacamos:

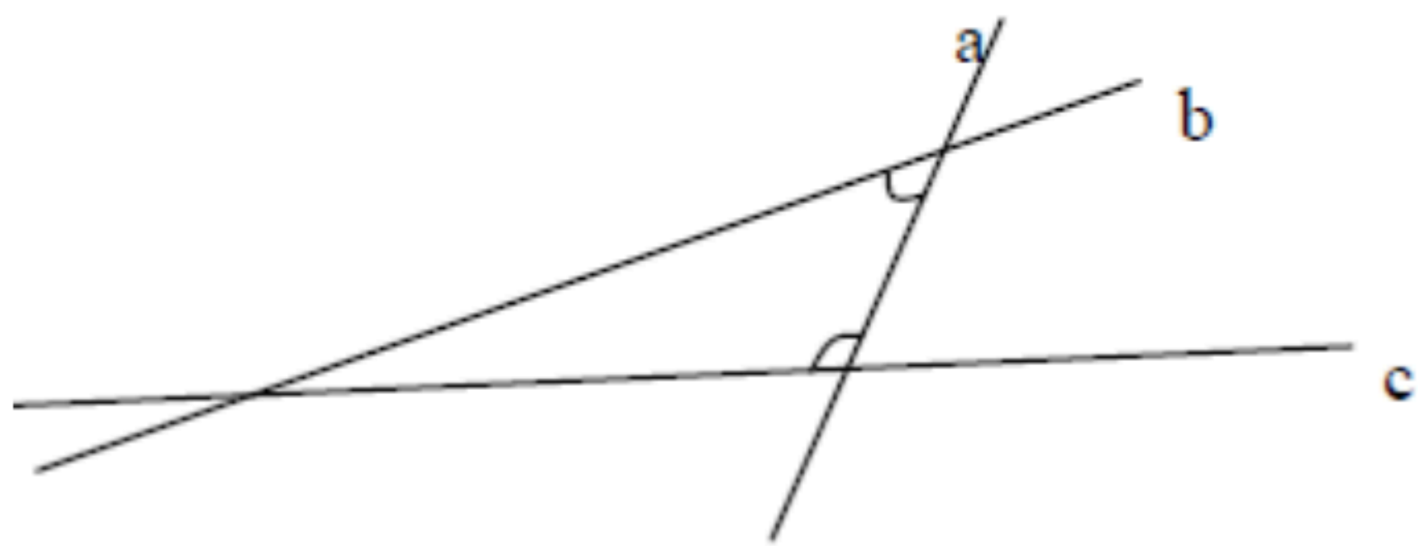
01. Um ponto é aquilo que não tem partes;

02. Uma linha é um comprimento sem largura;

15. Um círculo é a figura plana fechada por uma linha tal que todos os segmentos sobre ela estejam e que passem por um ponto determinado do interior da figura sejam iguais entre si;

23. Retas paralelas são linhas retas que, estando no mesmo plano, prolongadas indefinidamente nos dois sentidos, não se cruzam.

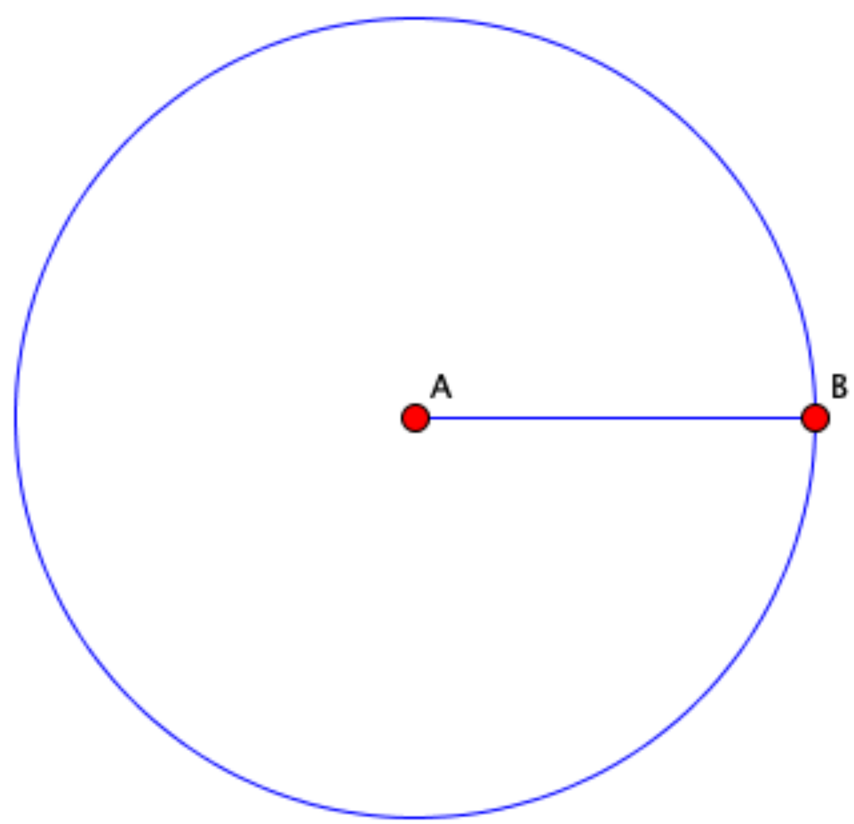
- Postulados
    i) “Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer”;
    ii) “É possível prolongar arbitrariamente um segmento de reta”;
    iii) “E possível traçar um círculo com qualquer centro e raio”;
    iv) “Dois ângulos retos quaisquer são iguais entre si”;
    v) “Se uma reta, interceptando duas outras retas forma ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, então as duas retas, caso prolongadas indefinidamente, se encontram do mesmo lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos retos”.



Noções Comuns

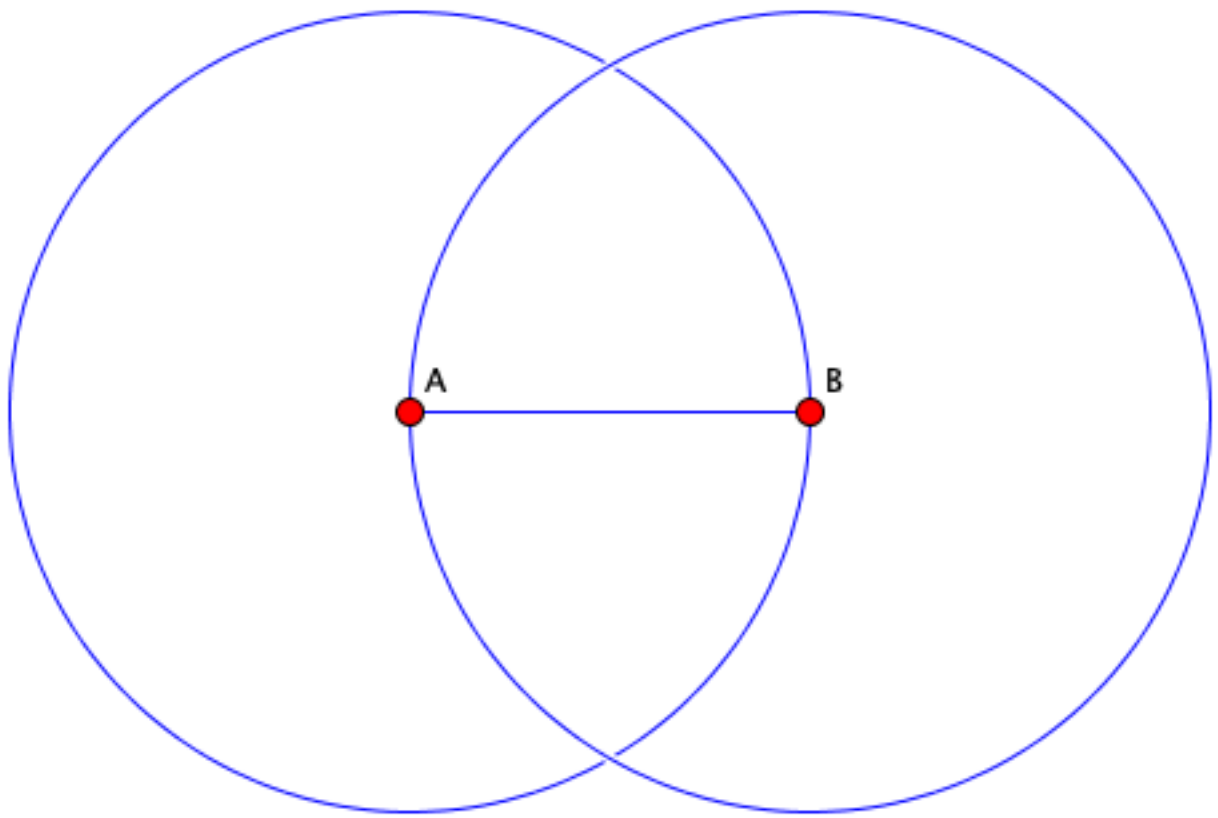
i) “Grandezas iguais a uma mesma grandeza são iguais entre si”;
ii) “Se a grandezas iguais forem adicionadas grandezas iguais, as somas serão iguais”;
iii) “Se grandezas iguais forem subtraídas de grandezas iguais, os resultados serão iguais”;
iv) “Grandezas que coincidem entre si são iguais”;
v) “O todo é maior do que suas partes”.

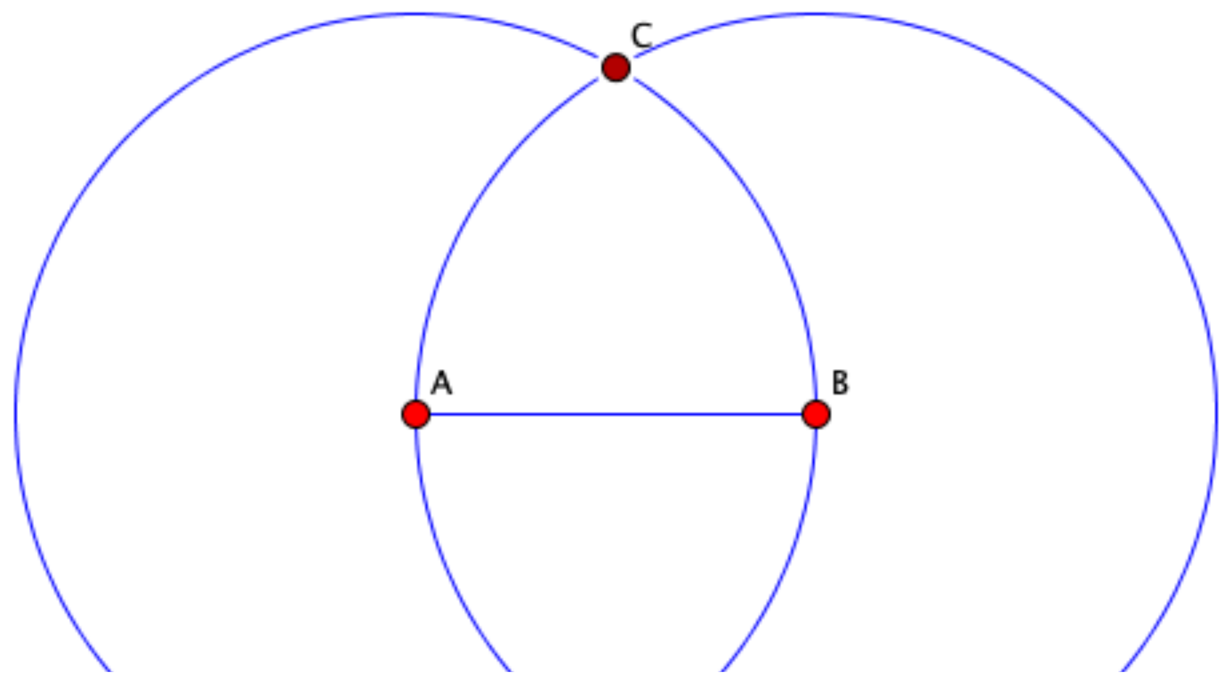
EI-1: Sobre um segmento dado criar um triângulo equilátero.

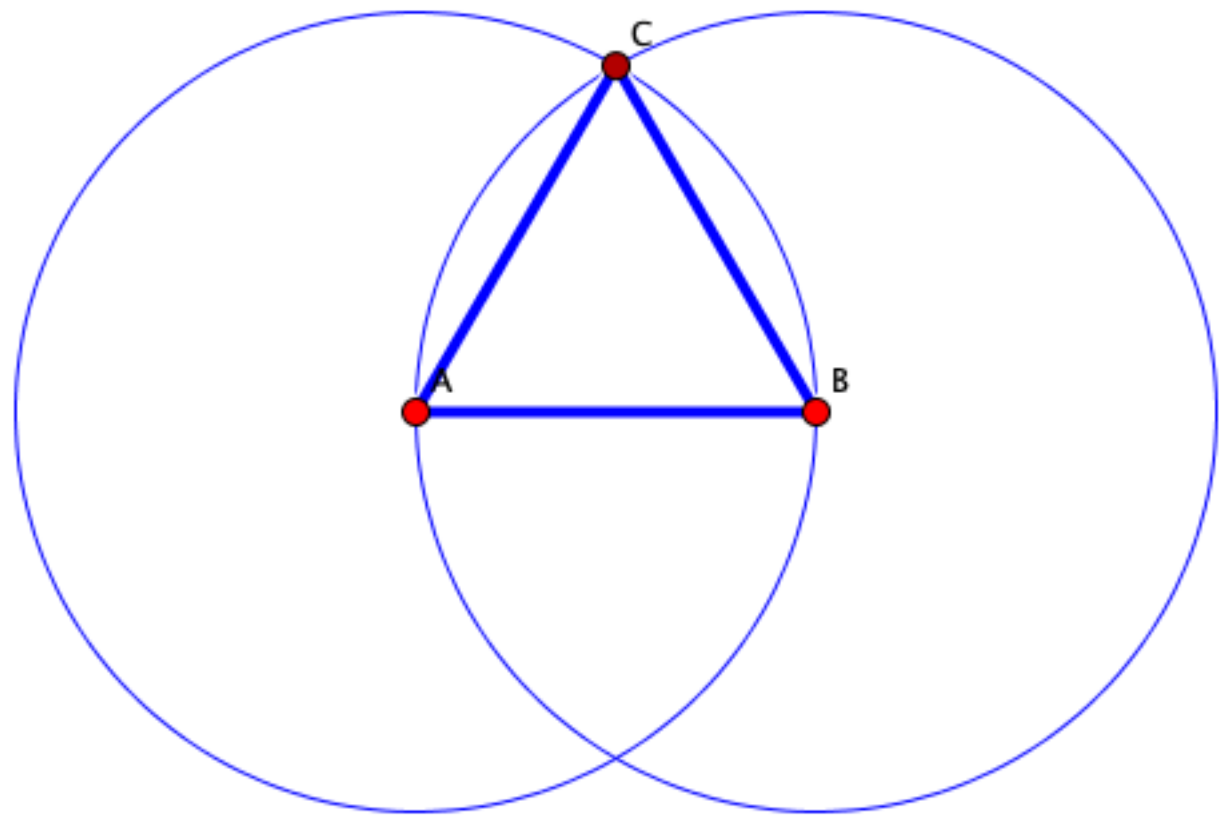


P3

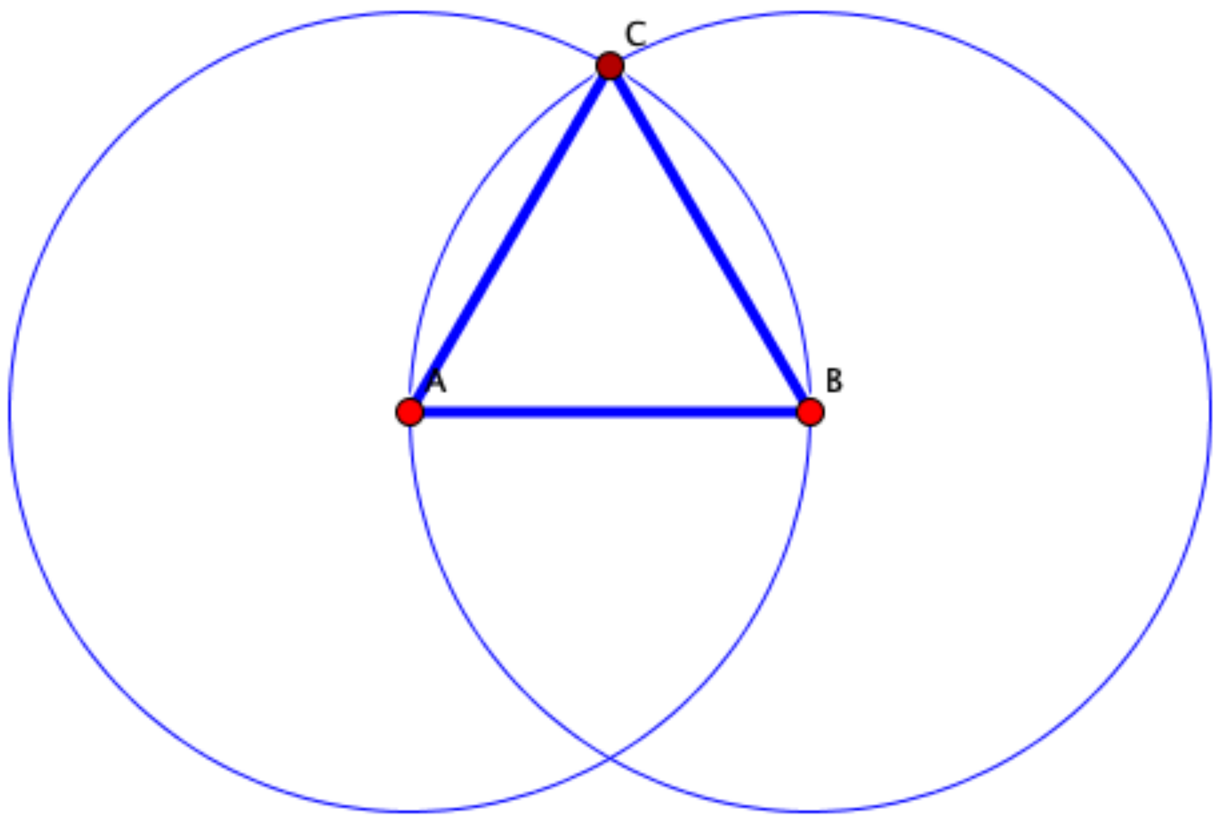
P3




C
A
B



P1



AB=AC por Def 15

AB=BC por Def 15

BC=AC por NC 1

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

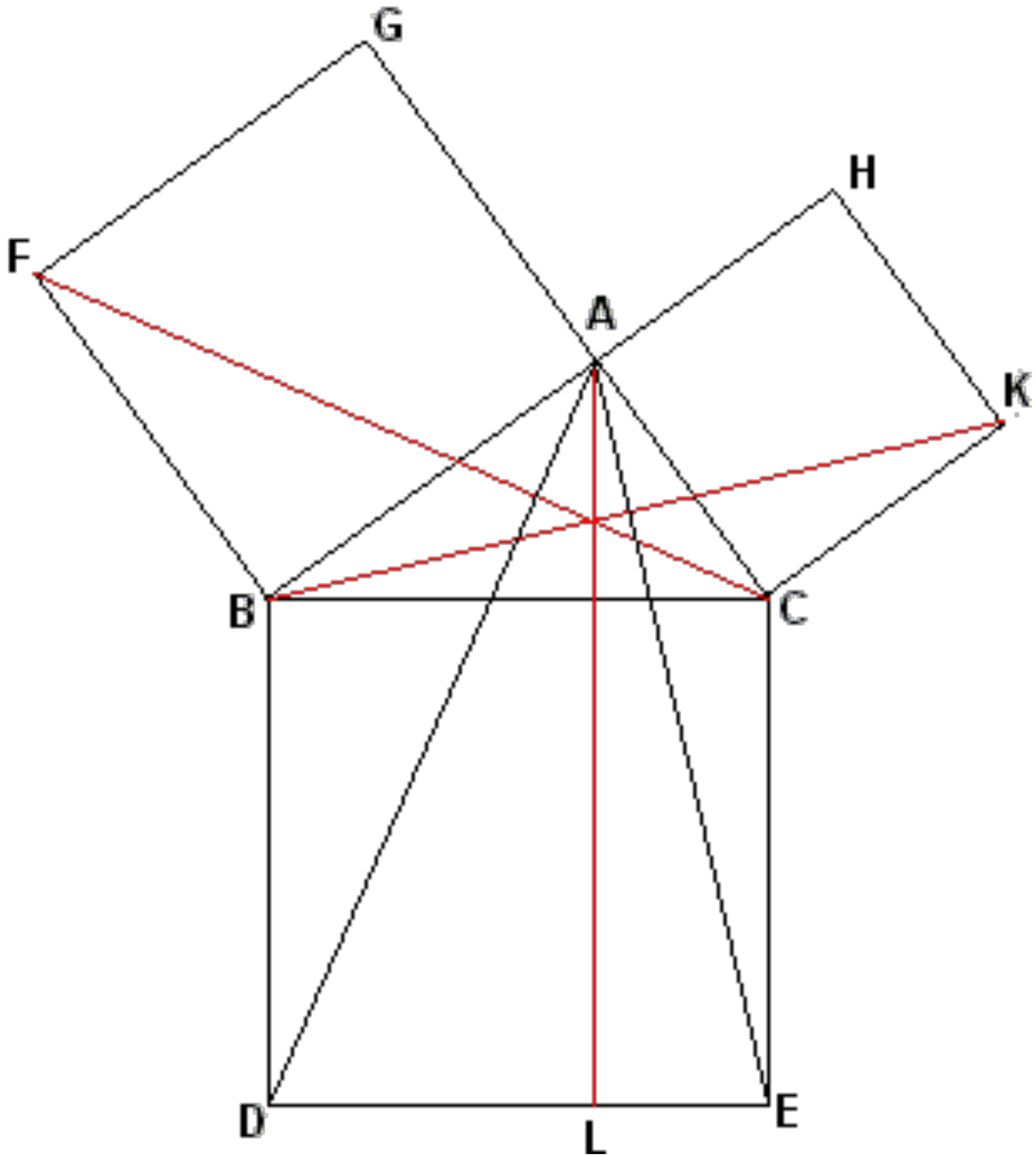
Deus criou

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

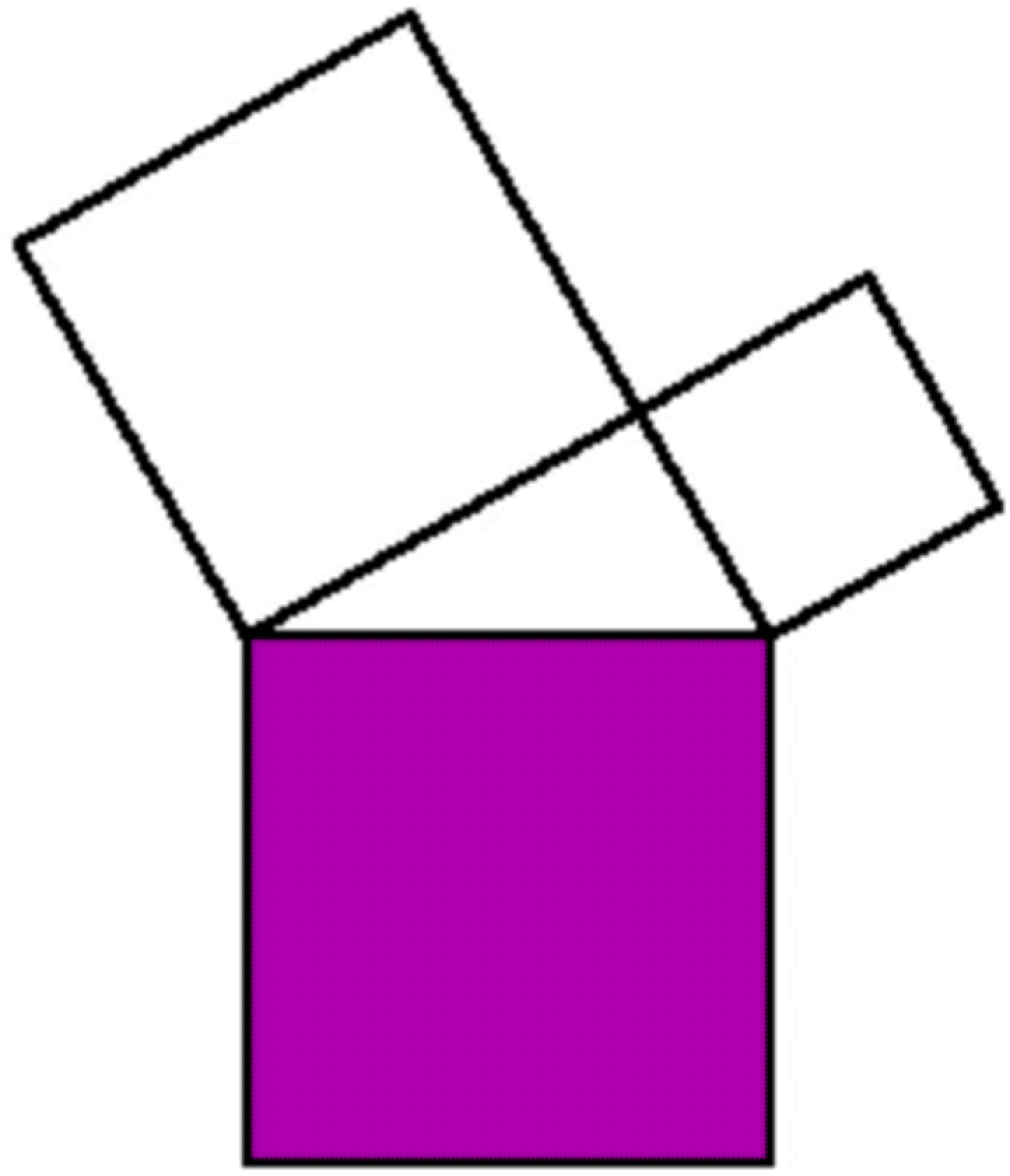
tudo o resto é obra do Homem.

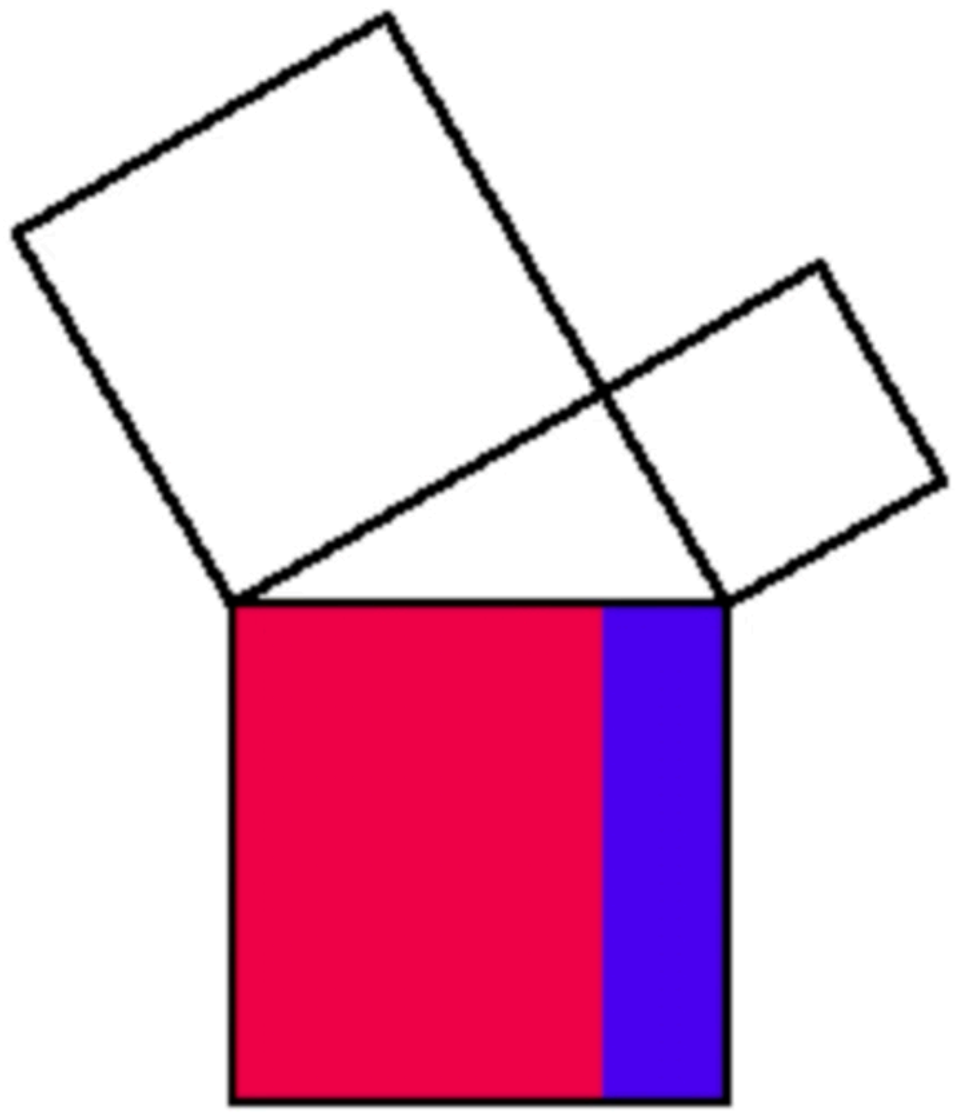
Leopold Kronecker - XIX

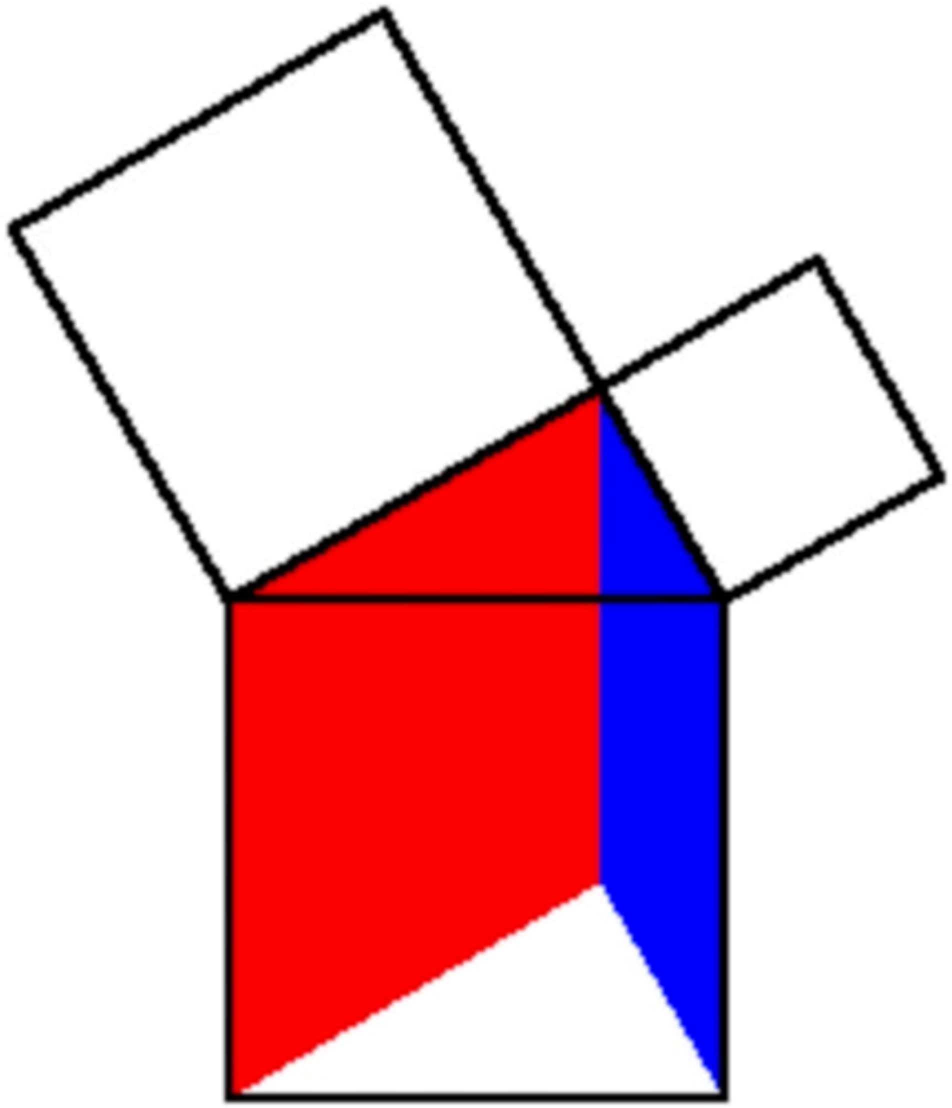
Teorema de Pitágoras
Elementos I-47

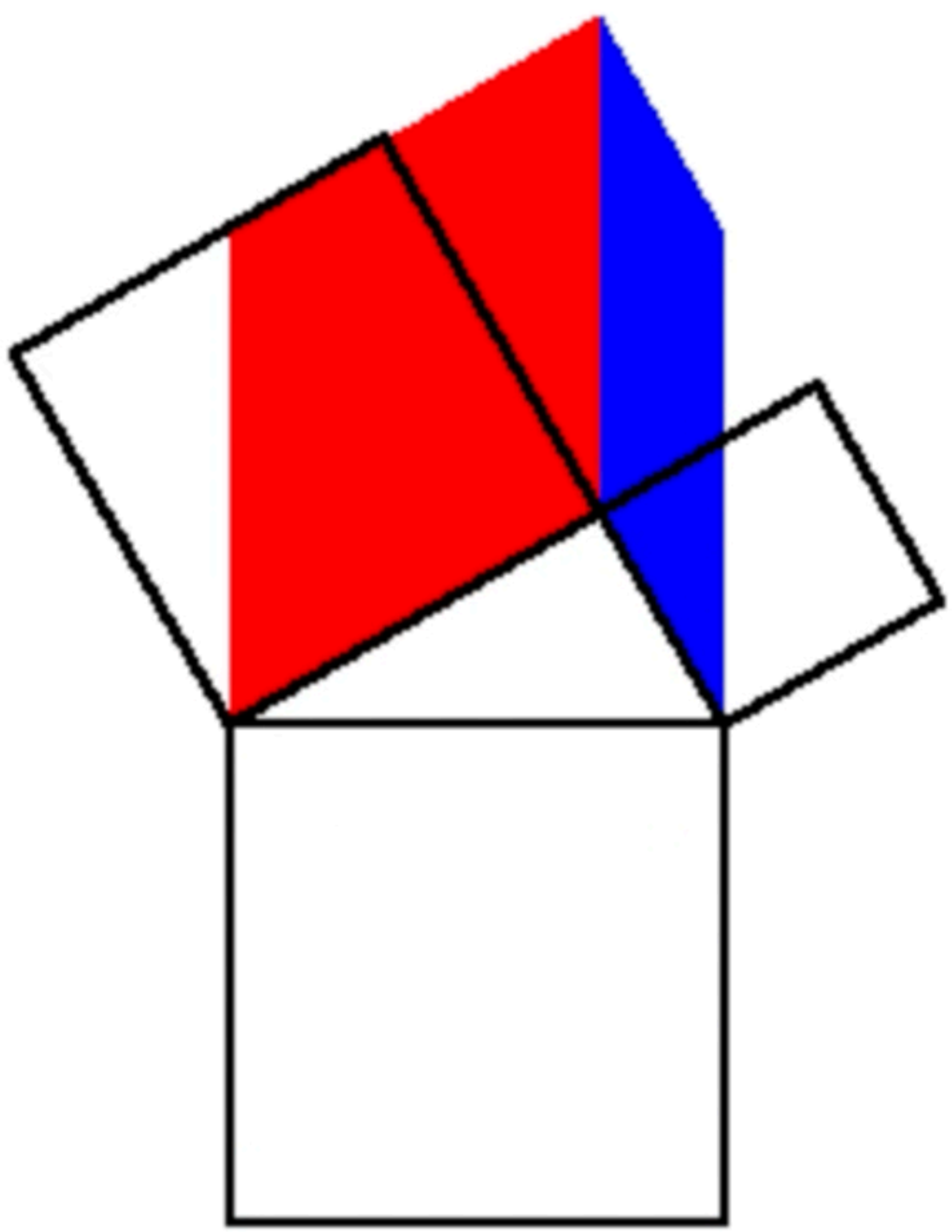


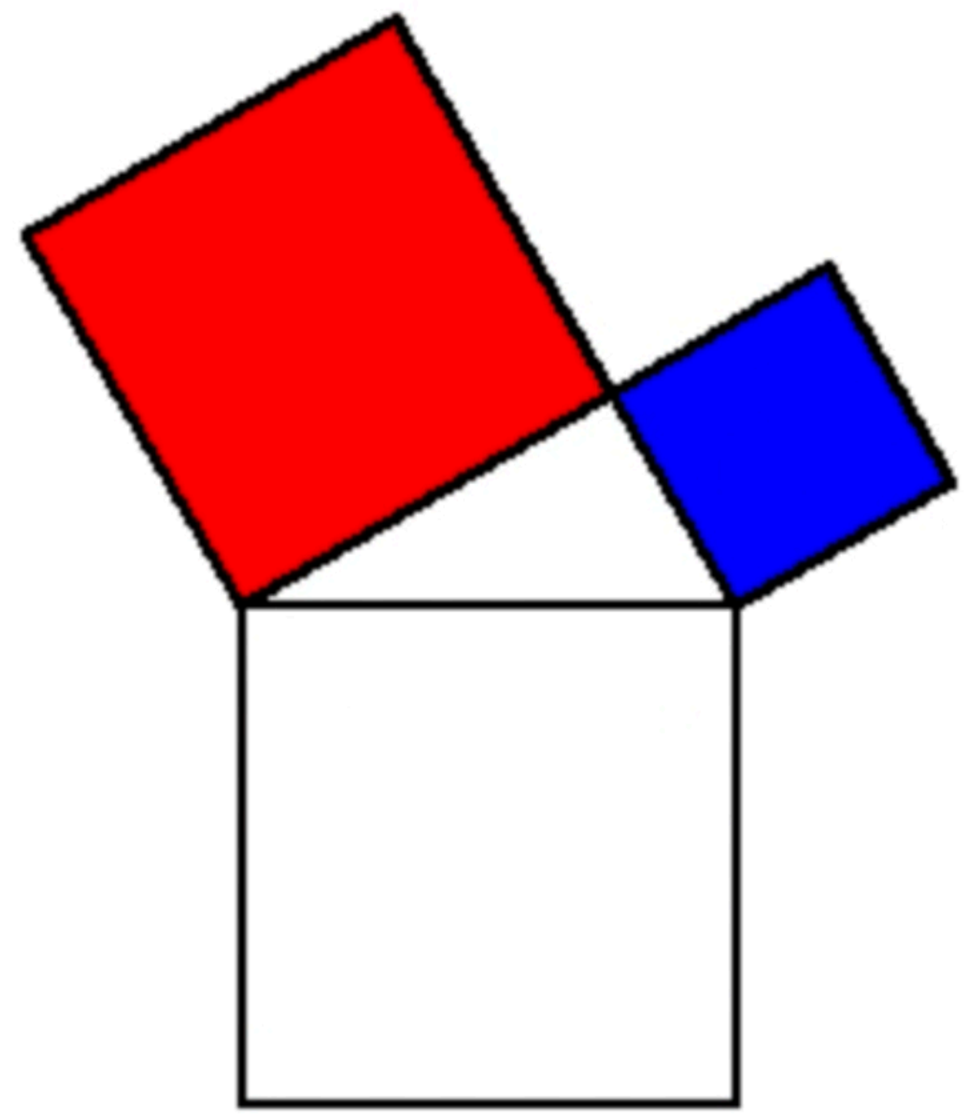
Teorema de Pitágoras











Boa Ordem!

Qualquer subconjunto (não vazio) de

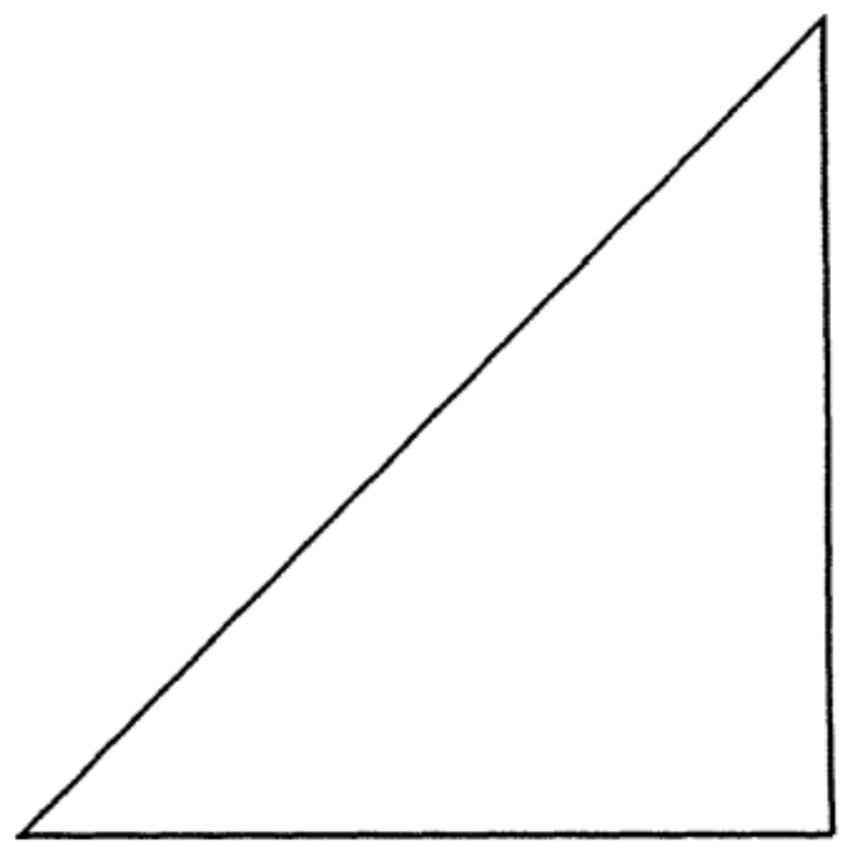
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

tem elemento mínimo.

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

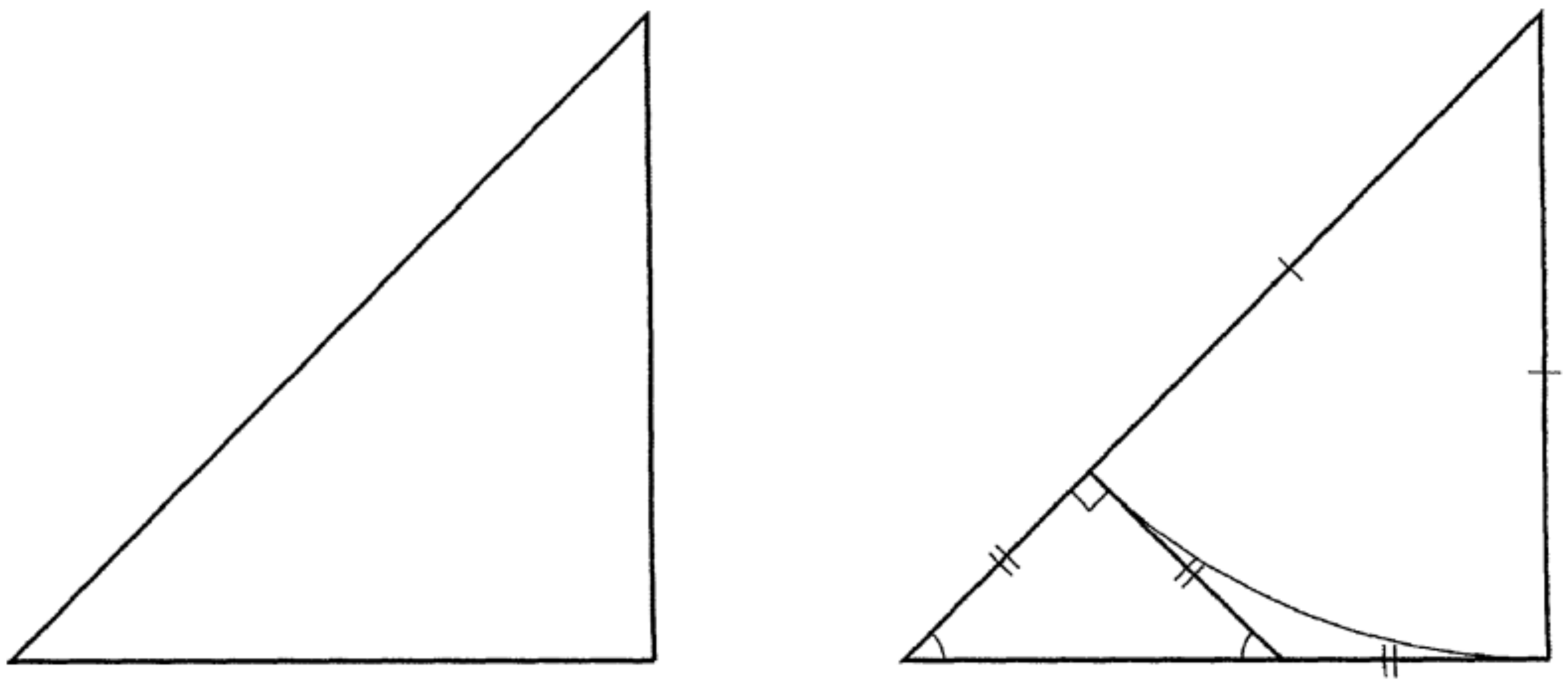
Se

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ então esta é a medida da hipotenusa de um triângulo rectângulo isósceles de catetos unitários.



Multiplicando por n obtemos um triângulo rectângulo isósceles de lados inteiros. Tem de haver um que é o menor de todos (na medida da hipotenusa).

Mas a construção seguinte mostra que dado um destes, obtemos un menor facilmente!



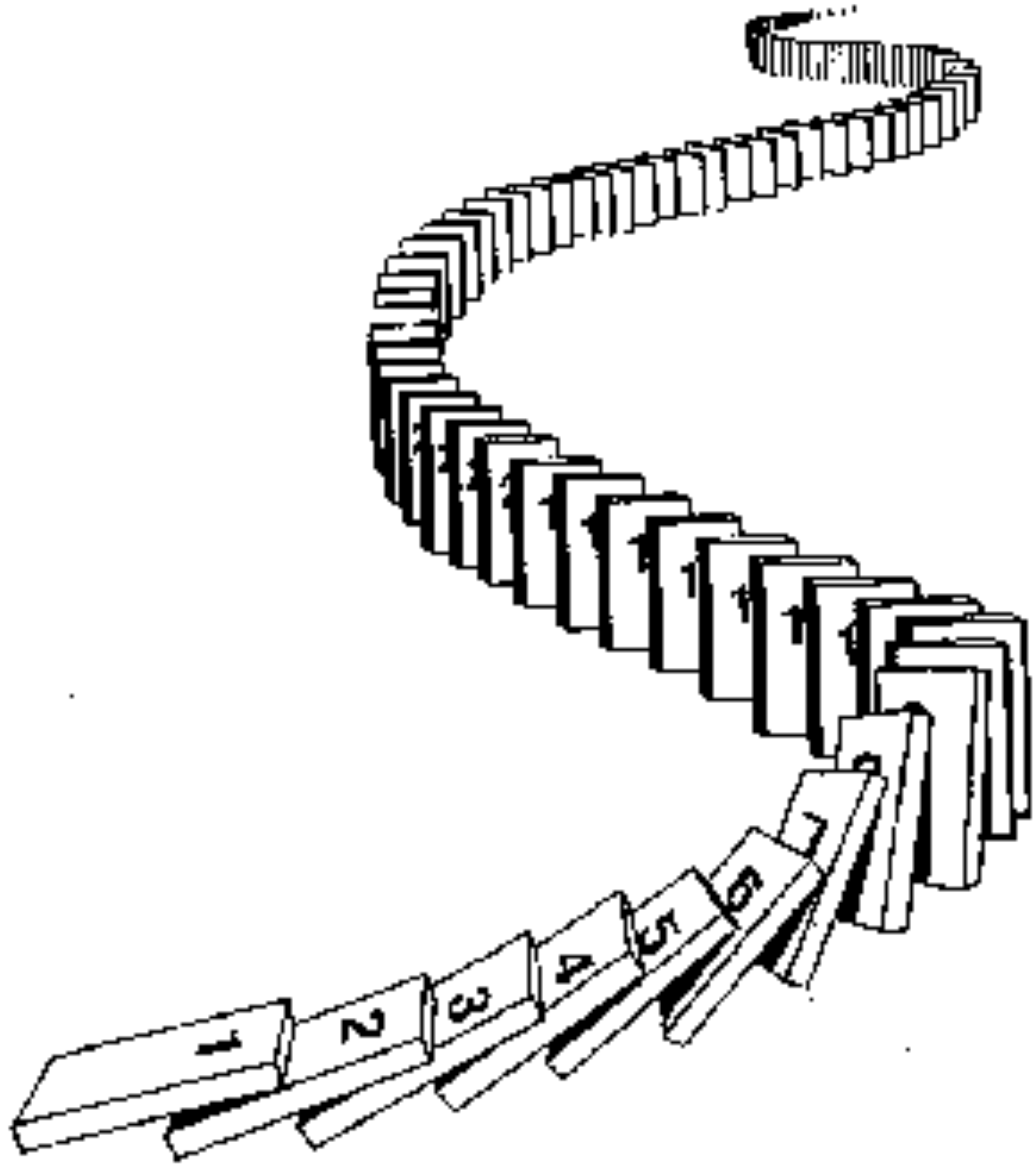
Logo, por redução ao absurdo, fica provado que a raíz de 2 não é racional.

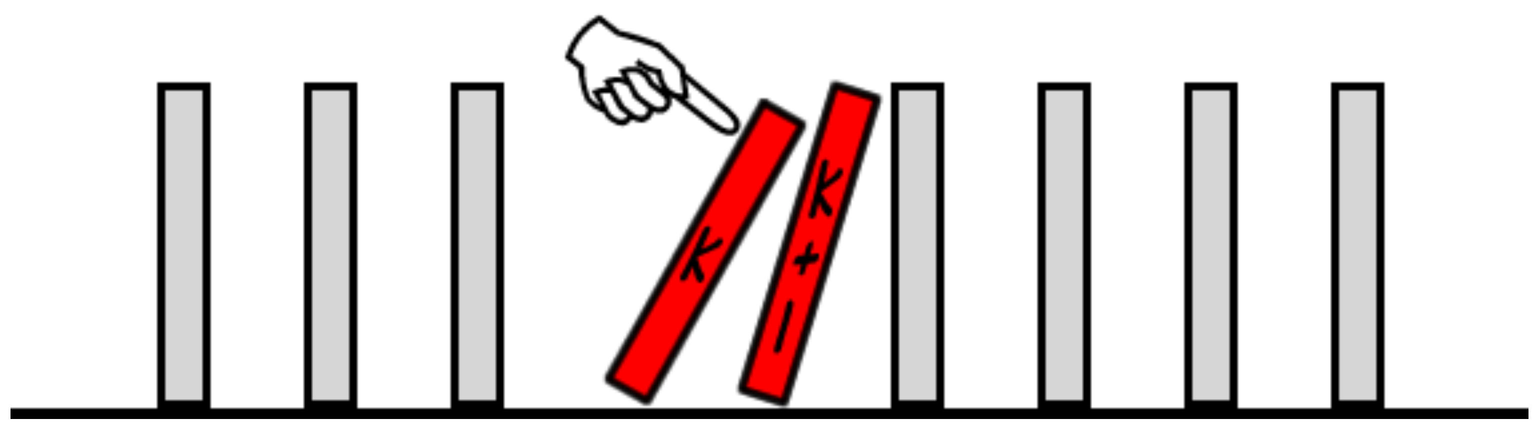
Indução

Seja S um conjunto de números naturais tal que:
S contém o número 1.
O sucessor de qualquer elemento de S também pertence a S.

Então S é o conjunto de todos os números naturais.

[Nota: o sucessor de n é $n+1$]


1
2
3
4
5
6
7


k
k+1


gifbin.com

Princípio de Indução

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in S \\ \forall k, k \in S \Rightarrow k+1 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Para $n \geqslant 1$ temos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 \cdots + (2n-1) = n^2$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$$

Seja a um número real, $a > -1$. Mostre que

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant 0)$$

A importância do caso-base na aplicação do Princípio de Indução

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} + \pi$$

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n$$

Prove que todas as mulheres loiras têm olhos azuis estabelecendo, por indução, que se num conjunto de mulheres loiras uma delas (pelo menos) tiver olhos azuis, então todas têm olhos azuis.

Isto é, para todos os números naturais n, tem-se:

Se L é um conjunto de n mulheres loiras tais que uma delas, pelo menos, tem olhos azuis, então todas as mulheres do conjunto L têm olhos azuis.

Seja S o conjunto dos números naturais para os quais a proposição é verdadeira. Relembremos o que temos de verificar:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in S \\ \forall k, k \in S \Rightarrow k+1 \in S \end{array}\right\} \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Para o passo de indução talvez ajude notar que, por exemplo para k=3, se tem

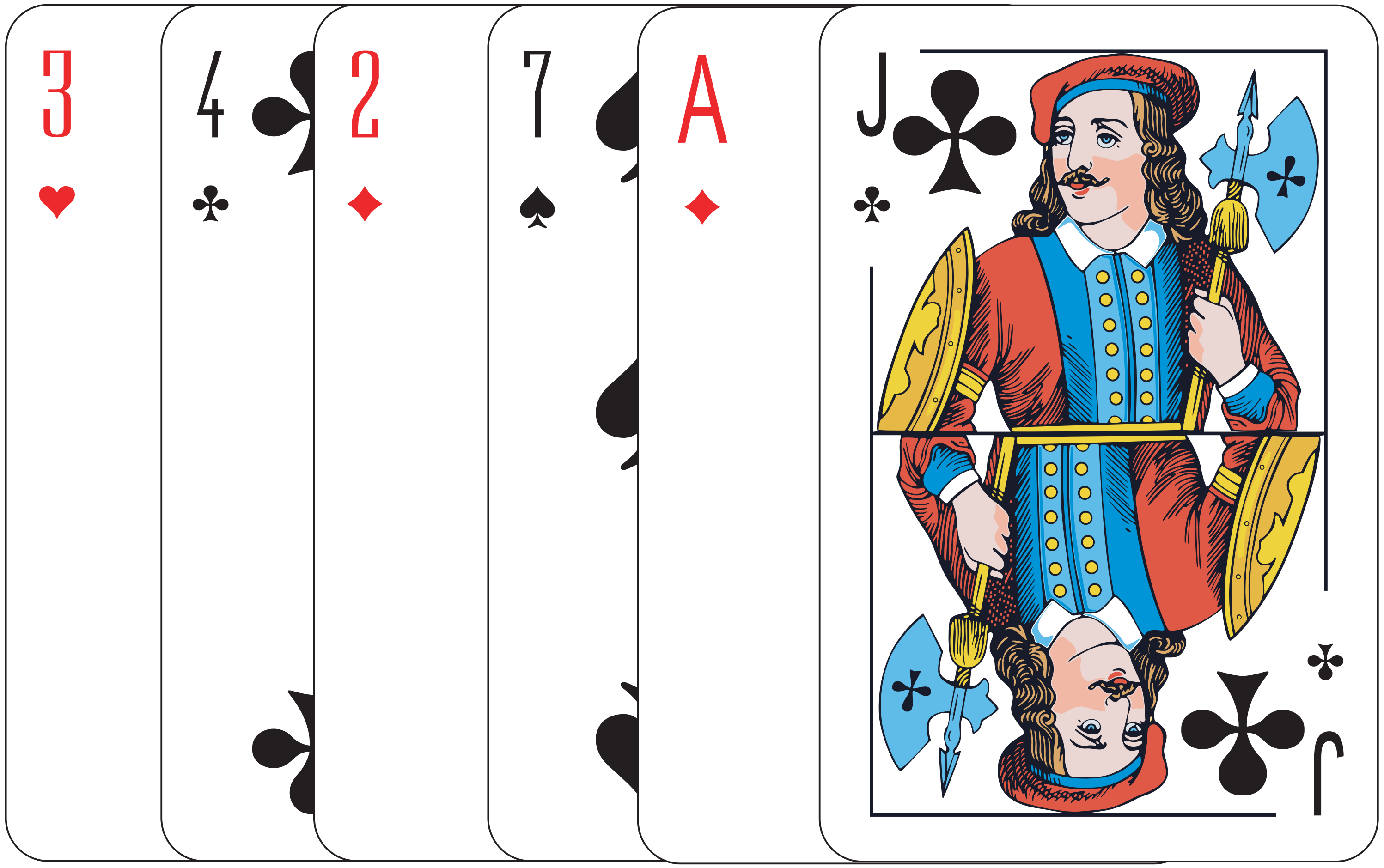
$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{a_1, a_2, a_3\} \cup \{a_1, a_3, a_4\}$$

No primeiro dia os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 são metidos numa caixa e, imediatamente após isso feito, o 1 é retirado.
No segundo dia entram cem números (a começar no 11) e o 2 é retirado.
No terceiro entram os mil números naturais seguintes e o menor da caixa é retirado (era o 3).
...
No *n*-ésimo dia entra a *n*-ésima potência de 10 de números e um é retirado.

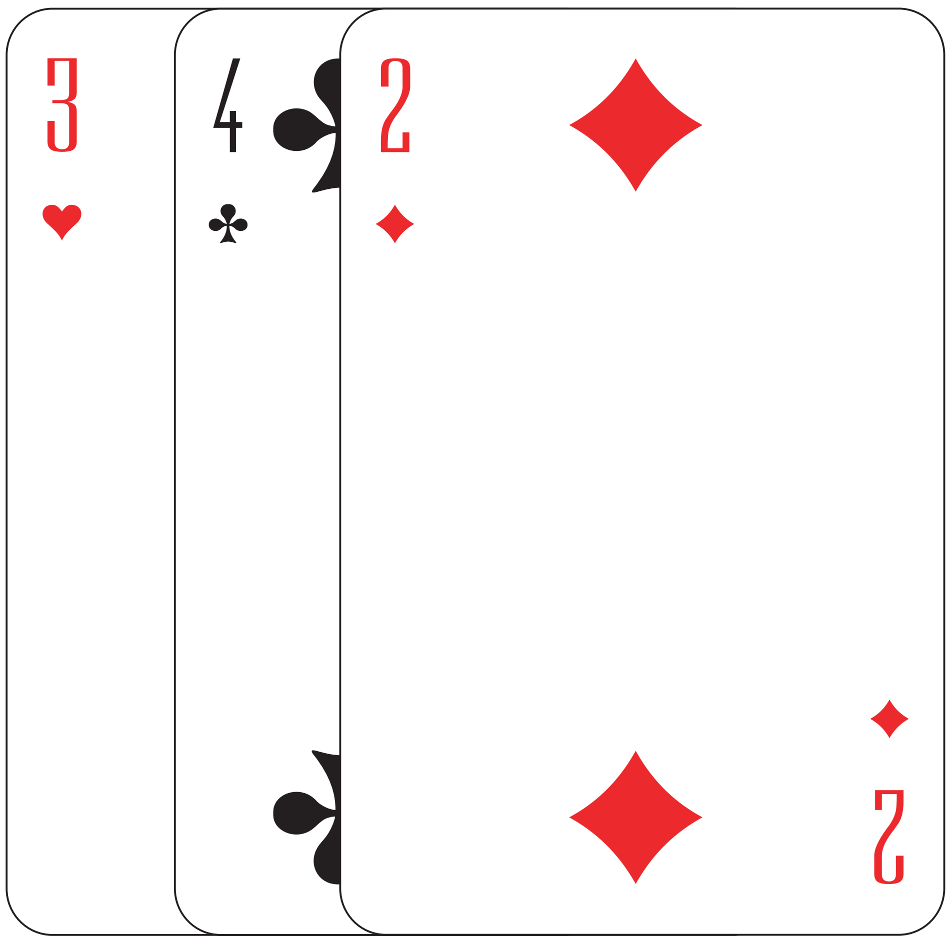
No fim dos tempos, qual é o conteúdo da caixa?...

Gilbreath

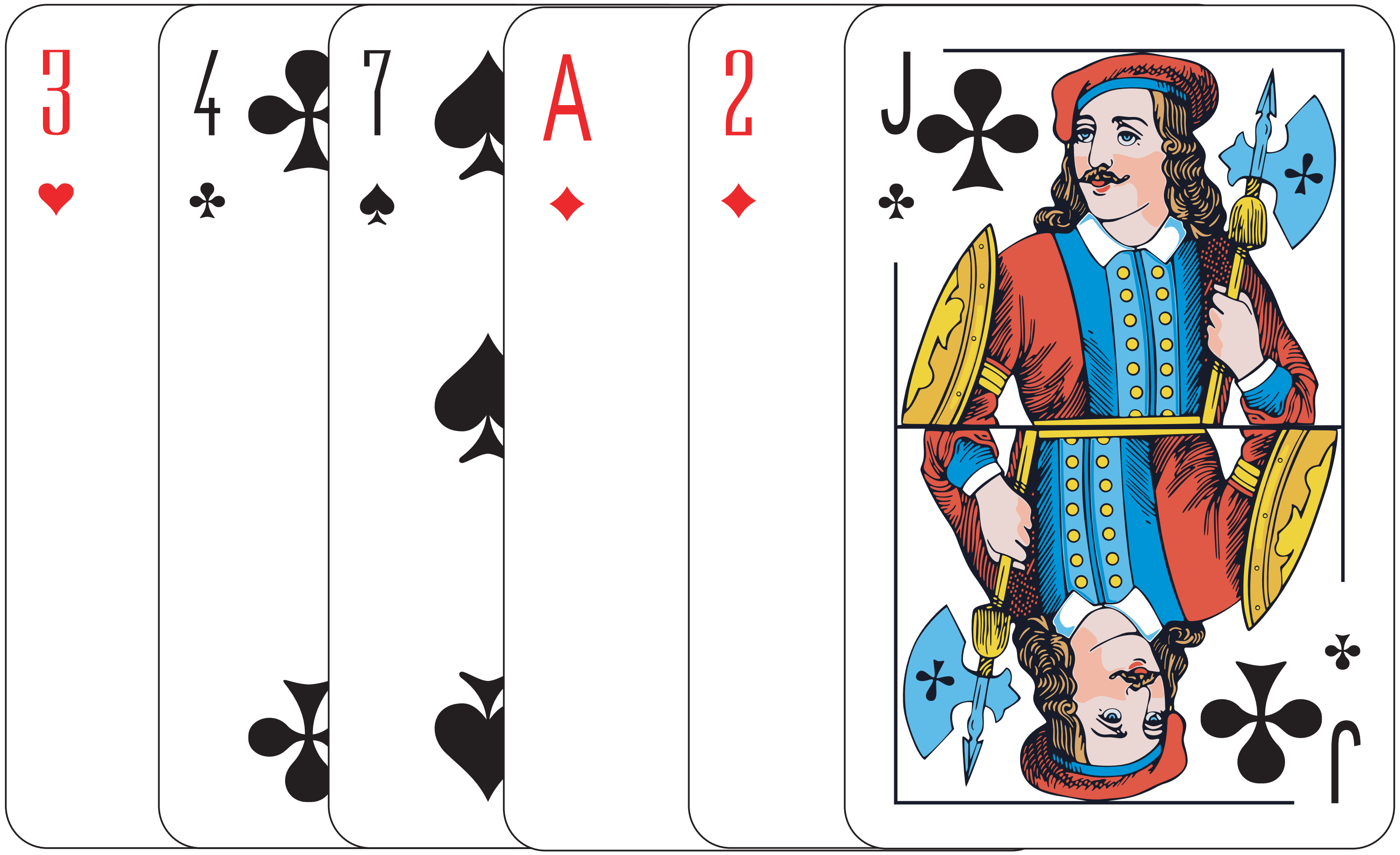
Gilbreath



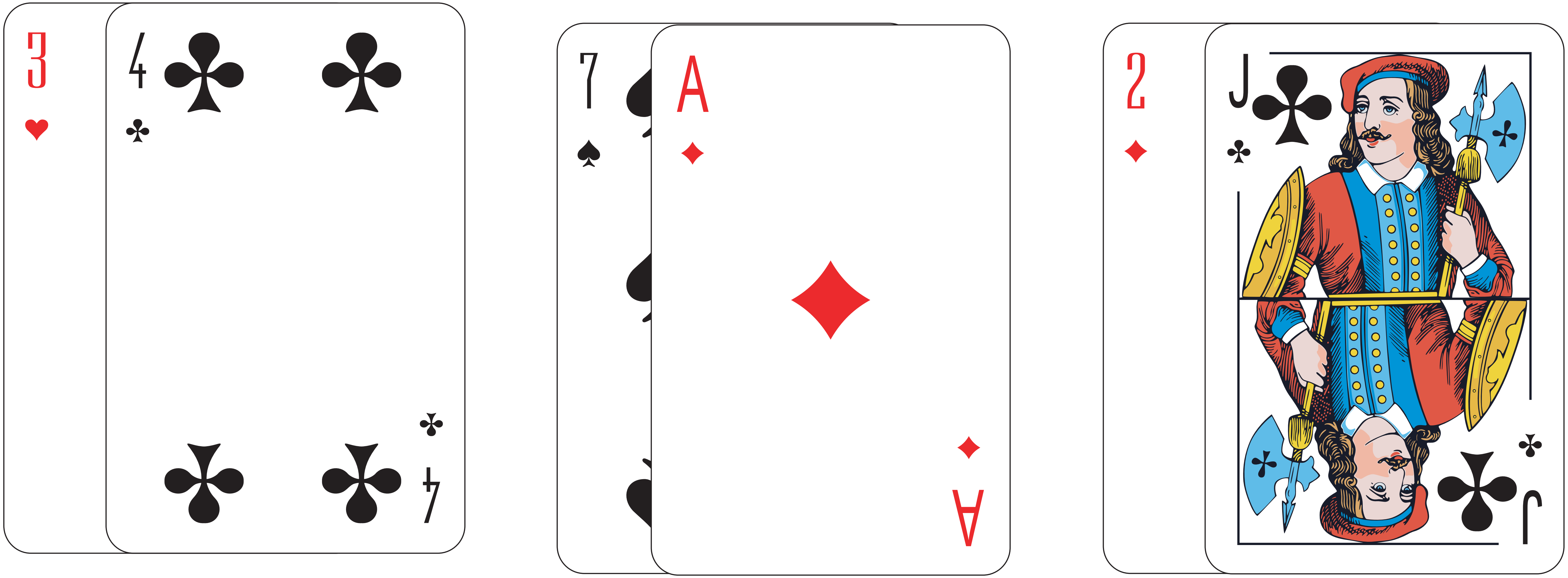
Gilbreath



Gilbreath



Gilbreath



Na ilha Penantopólis todos os habitantes nascem e vivem todas as suas vidas com um chapéu na cabeça. Os chapéus podem ser vermelhos ou azuis. Os nativos não dispõem de espelhos e não querem indagar sobre a cor do próprio penante, se bem que todos sejam muito racionais e tenham óptimas capacidades dedutivas.

A razão para este comportamento está numa lei terrível, de todos conhecida, mas a que todos parecem indiferentes: *quem souber que a cor do seu chapéu é azul deve suicidar-se logo após a reunião diária* (uma boa tradição) que sempre ocorre ao fim do dia.

A vida decorria serenamente em Penantopólis até que um náufrago deu à ilha e, numa das reuniões, tomou conhecimento dessa horrível lei. Admirado, o estrangeiro, que se chamava Fagundes, disse: “É curioso, porque vejo pelo menos uma pessoa com chapéu azul”.

Como continuará agora a vida em Penantopólis?

Vejamos, se houver somente uma pessoa com chapéu azul, esta, ao ouvir o estrangeiro, e vendo somente chapéus vermelhos, deduz imediatamente que se deve suicidar.

Se forem duas as pessoas com chapéu azul, chamemos-lhes *Ara* e *Breu*, então cada uma delas vê um chapéu azul, pelo que nada sucede na primeira noite. Mas na segunda, a nativa *Ara*, ao constatar que o *Breu* não se suicidou, compreende que é azul o seu próprio chapéu. O raciocínio do *Breu* é análogo. Temos dois suicídios na segunda noite.

O que se passa é que, se houver *n* pessoas com chapéus azuis, então elas matam-se na *n*-ésima noite.

A prova faz-se por indução.

Os casos $n=1$ e $n=2$ já foram analisados.
Suponhamos que, se houver *k* ilhéus com chapéus azuis, eles se suicidam à *k*-ésima noite.

Seja agora a *Zorra* um dos $k+1$ portadores de penante azul. Ela vê *k* chapéus azuis e não sabe se o total é *k* ou $k+1$. Mas, no fim da *k*-ésima noite, nada sucede, e *a Zorra* compreende que isso se deve ao facto de os *k* portadores de chapéu azul que ela vê também verem *k* chapéus azuis (e não $k-1$, o que sucederia se o seu chapéu fosse vermelho). Assim, na noite seguinte, tanto a Zorra como todos os outros da sua condição se suicidam. QED

O que causa esta vaga de suicídios? Sem a intervenção do Fagundes nada disto sucederia. Mas a sua intervenção é trivial, ele diz algo que todos sabem (se k for maior que 1). Se ele não introduz nada de novo, o que leva as pessoas a matarem-se?

Ilustremos com o caso em que há dois chapéus azuis, dos nativos *Ara* e *Breu*. Antes do estrangeiro chegar, a *Ara* sabia que o *Breu* tinha um chapéu azul e o *Breu* sabia que a *Ara* tinha um chapéu azul. Cada um deles parece saber mais do que a afirmação do Fagundes. Mas o que a *Ara* não sabia, e passou a saber, é que o *Breu* sabe que há pelo menos um chapéu azul; de forma semelhante, o *Breu* aprende do estrangeiro que a *Ara* sabe que há pelo menos um chapéu azul. Claro que podemos trocar os papéis da *Ara* e do *Breu* entre si, o que sucede a um sucede ao outro. Cada um deles passa a poder dizer ao outro: "Agora sei que sabes que há pelo menos um chapéu azul". É esta a novidade do Fagundes!

*

A Ana, a Laura e a Francisca numa festa. As três amigas recebem convites que trazem também a descrição de um jogo social que será praticado quando chegarem ao local da diversão. As regras são as seguintes: Ao entrar na casa o mordomo coloca na cabeça de cada uma delas um chapéu. Este só pode ser vermelho ou azul, e a escolha é feita por moeda ao ar pelo criado. Cada uma das três não pode ver o chapéu que tem na própria cabeça, mas vê com facilidade os que couberam às outras duas amigas. Num momento preciso, simultaneamente, as três convidadas tentam adivinhar a cor do chapéu que lhes coube, ou dizem ”passo!”.

Se pelo menos uma acertar e nenhuma errar, ganham, em conjunto, um bilião de euros. Caso contrário não ganham nada.
Ao ver o convite, disse a Laura: ”Bom, vocês passam e eu digo uma cor à sorte. Assim temos 50 por cento de chances de ganhar uma fortuna.
”Espera”, disse a Francisca, ”parece-me que há maneira mais inteligente de jogar...”

O que passou pela cabeça da Francisca?

A estratégia da Laura dá 50% de hipóteses de ganhar, mas a da Francisca garante 75%. Consiste no seguinte: cada uma deve passar se vê dois chapéus de cores diferentes e, se vê dois da mesma cor, deve apostar na cor contrária. Uma análise de todos os casos possíveis, 8, mostra que esta forma de jogar ganha em 6.

Um rei perverso tem por hábito colocar um puzzle aos condenados, mesmo antes de estes serem executados. Os que se saírem bem são poupados. Neste dia havia três condenados ao garrote. O rei mandou colocá-los em fila, de forma que o preso 3 vê o 1 e o 2, o segundo só vê o primeiro e este não tem qualquer contacto visual com os demais.
Disse o rei: ”Há três chapéus vermelhos e dois azuis, e é desses que vou tirar três e distribuir por vocês. Quem souber a cor do chapéu que lhe coube não será executado, antes partirá livre. Mas tem de ter a certeza absoluta e ser capaz de explicar as suas conclusões. Responda primeiro o prisioneiro 3, depois o 2 e finalmente o 1.”
E assim foi, o preso 3, por não saber a cor do chapéu que lhe coubera, foi morto. O número 2 teve igual sorte. Mas o prisioneiro 1 salvou-se! Como?

O que pensou o prisioneiro 1: para o 3 morrer é porque não viu dois azuis, e, sabendo isto, o 2 só morreu porque não viu um azul, portanto o 2 viu um chapéu vermelho, o meu.

Outro rei, outros condenados, o mesmo vício do jogo. As regras são bem conhecidas dos prisioneiros, que se reunem mesmo antes de o jogar, para tentar escolher uma boa estratégia (se é que existe uma!). Desta vez são colocados chapéus em todos os 38 condenados, que podem ser vermelhos ou azuis. Cada um vê os chapéus dos outros, mas não o próprio. A um sinal do rei todos devem tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Quem acertar vive, quem errar morre. O jogo efectuou-se e 19 presos sobreviveram. Disse o rei: "Tivestes sorte!" Respondeu Spartacus, um dos sobreviventes: "Nunca matarás mais de metade de nós!"

Poderá Spartacus ter razão?

Os jogadores organizam-se em pares. Para cada par (x,y) o prisioneiro x diz a cor do chapéu que vê em y, e y diz a cor contrária à do chapéu que vê em x. Se o par tiver dois chapéus da mesma cor, salva-se x, se tiverem cores diferentes, salva-se y. Assim, metade sobrevive, e Spartacus tem razão.

O rei da estória anterior irritou-se e, no dia de execuções seguinte, mudou as regras. Agora os 59 prisioneiros são colocados em fila. Cada um recebe um chapéu que pode ser vermelho ou azul. O último da fila (o 59) vê todos os outros, o 58 vê todos menos o 59, etc. Começando pelo 59, cada preso deve tentar adivinhar a cor do seu chapéu. Se acertar, vive, se errar morre. Mas a execução só é efectuada no dia seguinte. Por isso, cada preso ouve os palpites dos prisioneiros que o precedem, mas não sabe se são bons ou maus. Isto é, o prisioneiro genérico, na posição i, vê os chapéus dos presos $1, 2, \ldots, i-1$ e ouve os palpites dos presos $i+1, i+2, \ldots, 59$. O rei concede uma reunião aos 59 condenados antes do jogo fatal. Desta vez, pelo aspecto feliz dos prisioneiros, poucos irão morrer.

Quantos se podem, de certeza, salvar?

O último prisioneiro, que é o primeiro a falar, grita "vermelho" se vir um número ímpar de chapéus vermelhos, e grita "azul" se vir um número par de chapéus vermelhos. Assim, o próximo prisioneiro já pode deduzir a cor do seu chapéu assim como todos os outros. No máximo, morrerá um prisioneiro!

Vinte e três prisioneiros chegam a uma cadeia onde o carcereiro lhes explica as regras da casa, antes de lhes permitir uma reunião geral, ao que se seguirá o confinamento em celas individuais sem possibilidade de comunicação.

Há uma sala na cadeia onde se encontram dois interruptores, que não servem para nada de especial, cada um tem duas posições possíveis: ON e OFF. Quando lhe apetece, o carcereiro escolhe aleatoriamente um prisioneiro, leva-o a esta sala, onde o detido deve escolher um dos interruptores e alterar o seu estado (de ON para OFF, ou de OFF para ON), após o que será devolvido à sua cela. Não se conhece o estado inicial dos interruptores. O carcereiro garante que todos os prisioneiros irão a esta sala uma infinidade de vezes. Se, em qualquer altura, algum prisioneiro disser que está convencido de que já todos visitaram esta sala pelo menos uma vez, vão todos em liberdade (se tal corresponder à verdade) ou são todos fuzilados (se for mentira).

Há alguma estratégia, que os presos possam combinar na reunião, que lhes garanta a libertação?

Os prisioneiros, na sua reunião prévia, escolhem um deles, chamemos-lhe α. Sejam os interruptores designados por A e B. Cada vez que um prisioneiro, que não seja o α, for à sala dos interruptores, deve mudar o A para ON se estiver OFF, caso contrário deve alterar o estado do B. Mas só deve efectuar esta operação no A duas vezes, a partir daí deve sempre operar no B. O α, de cada vez que encontrar o A ON deve alterá-lo para OFF e contabilizar esse movimento, se o A estiver OFF, deve alterar o B.

Resumindo, o A serve para o α contar as idas dos outros prisioneiros à sala, o B só serve para cumprir a obrigatoriedade de alterar um interruptor quando se escolhe não mexer no A.

Quando a contagem do α atingir 44, ele estará certo que todos os presos já se deslocaram à sala. É necessário recorrer a esta táctica de contar cada prisioneiro duas vezes porque não se conhece o estado inicial de A. Ao atingir 44, ou 22 mudaram A (duas vezes cada um), que no início estava OFF, de OFF para ON, ou 21 o mudaram duas vezes e um uma vez, se no começo A estava ON. De qualquer forma, há a certeza de todos terem visitado a sala em questão.

Há cem bolas, numeradas de 1 a 100, mas iguais em tudo o resto.

Há um grupo de pessoas que sabem que uma ou duas bolas são falsas.

Sabem também que as falsas pesam menos do que as outras (e que todas as falsas têm o mesmo peso).

Há uma balança de pratos.

Há uma pessoa, seja ela o Viriato, que sabe que há exactamente duas bolas falsas (e sabe quais são).

O Viriato pode usar a balança o número de vezes que quiser. A sua tarefa consiste em comunicar às outras pessoas, através das pesagens, que há exactamente duas bolas falsas.

Restrição: no processo, o Viriato não pode comunicar a natureza de nenhuma bola aos seus amigos (isto é, eles não podem ficar a saber, com 100% de certeza, se uma dada bola é falsa ou verdadeira).

Este problema é de fácil resolução. O Viriato coloca 50 bolas em cada prato, tendo o cuidado de colocar as duas bolas falsas em pratos distintos.

O problema que propomos agora é o de considerar a situação em que todos sabem que das cem bolas há duas ou três falsas (com os mesmo peso), sendo que o Viriato sabe que na realidade são três (e sabe quais são).

O número de pesagens permitidas é ilimitado, mas finito.

Como deve proceder o Viriato para "dizer" aos seus amigos que há três bolas falsas, sem revelar a natureza de nenhuma delas?

Viriato deve separar três conjuntos de 32 bolas, cada um com uma bola falsa. Usando a balança duas vezes ele mostra que os três têm o mesmo peso. Retira agora as falsas e uma legítima qualquer, substituindo-as pelas quatro que tinham ficado fora dos três conjuntos. Novamente, Viriato obtém equilíbrio em duas pesagens. Esta situação não poderia suceder se existissem somente duas bolas falsas.

PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Se tivermos *n+1* objectos e *n* gavetas… então pelo menos uma gaveta ficará com mais do que um objecto!

Objecto = carta de jogar

Gaveta = naipe

Ficamos a saber que em cada 5 cartas há repetição de naipe!

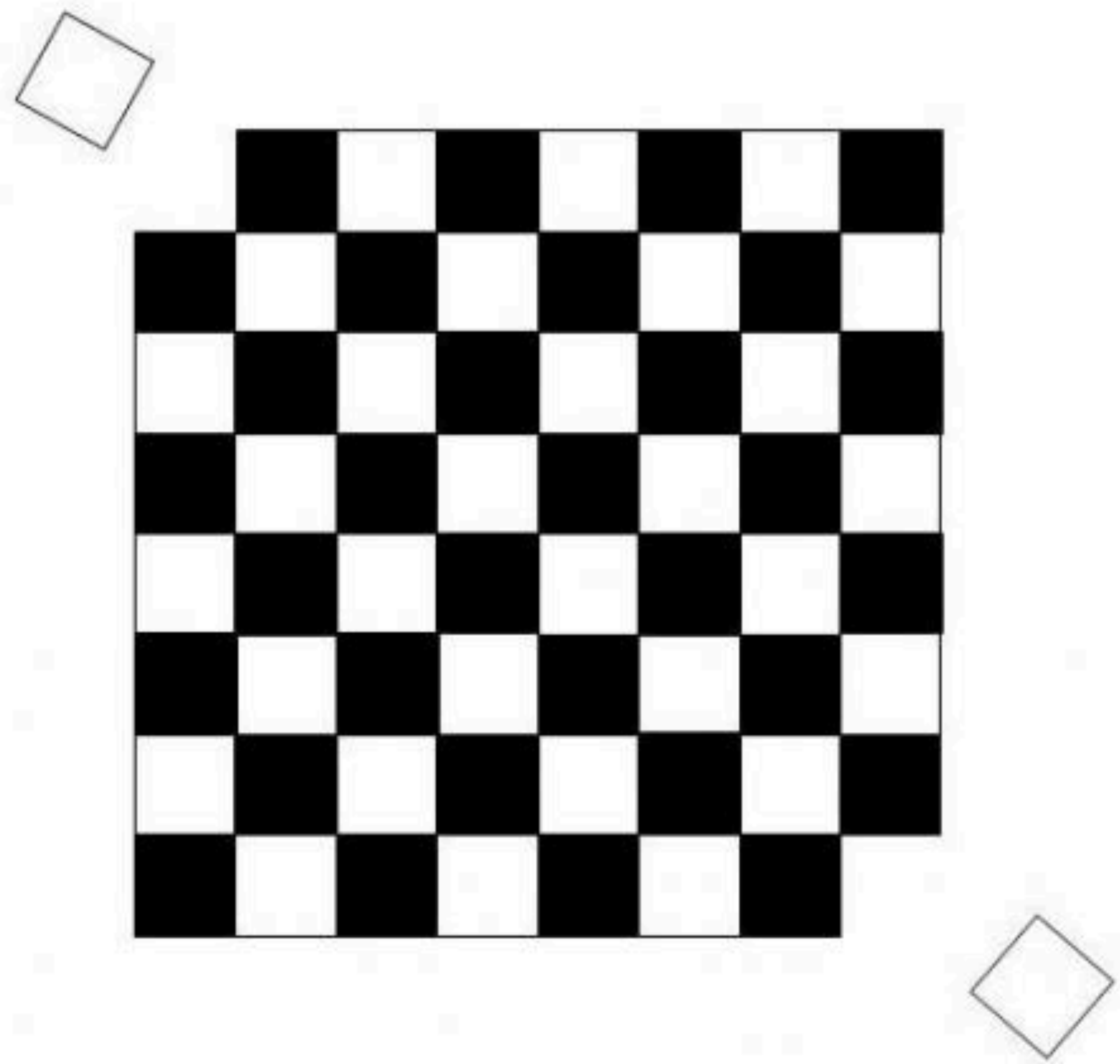
Em Lisboa há pelo menos duas pessoas com o mesmo número de cabelos na cabeça (carecas não contam).

Ninguém tem mais de 300 000 cabelos.
Há 1 000 000 de não carecas em Lisboa.

Suponha que tem um conjunto com 51 números diferentes, todos de 1 a 100. Prove que dois desses números somam exactamente 100.

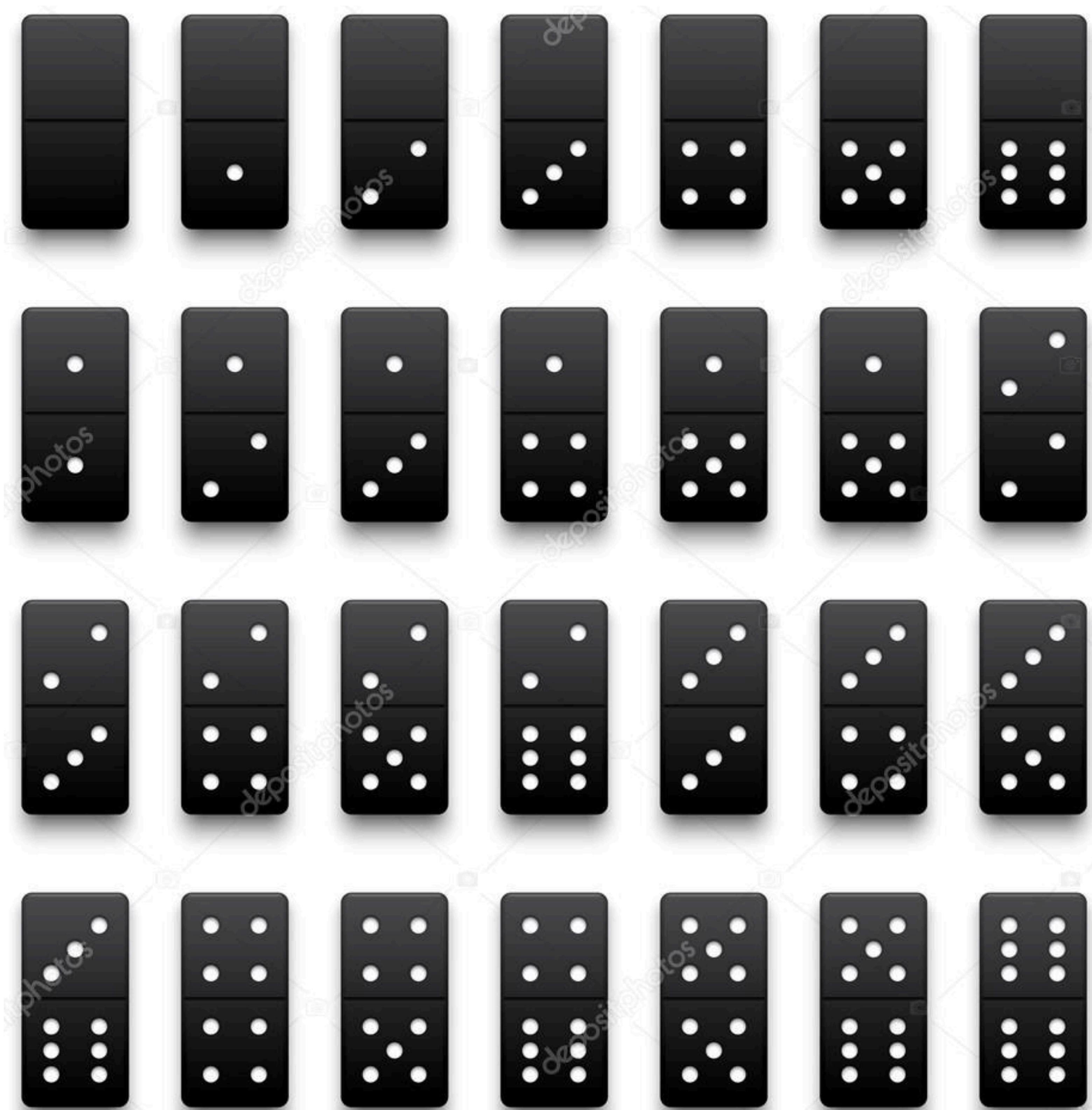
As gavetas:

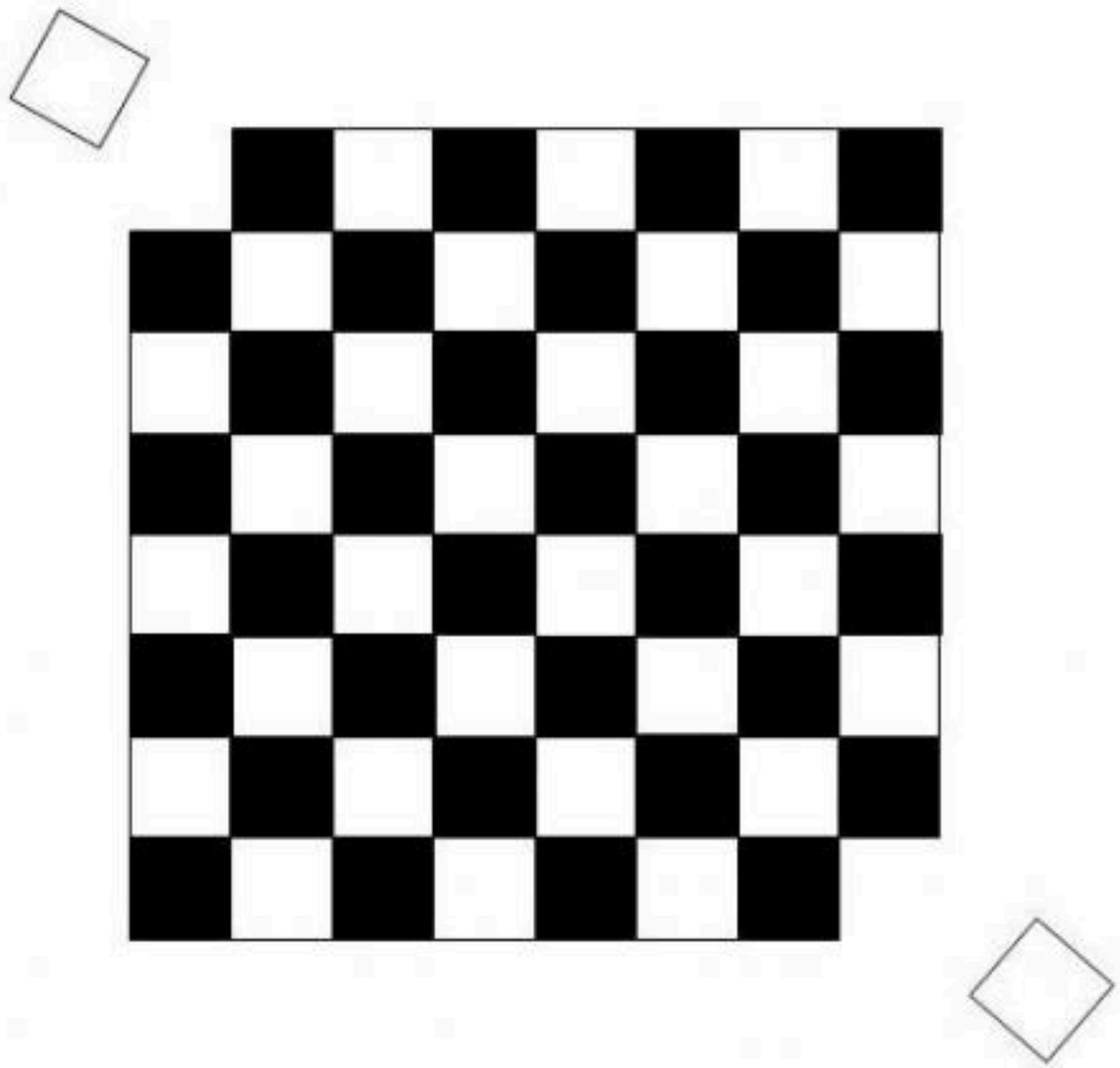
$$S_1 = \{1, 99\}, S_2 = \{2, 98\}, \ldots, S_{49} = \{49, 51\}, S_{50} = \{50\}$$

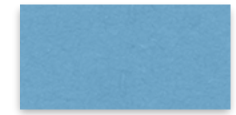


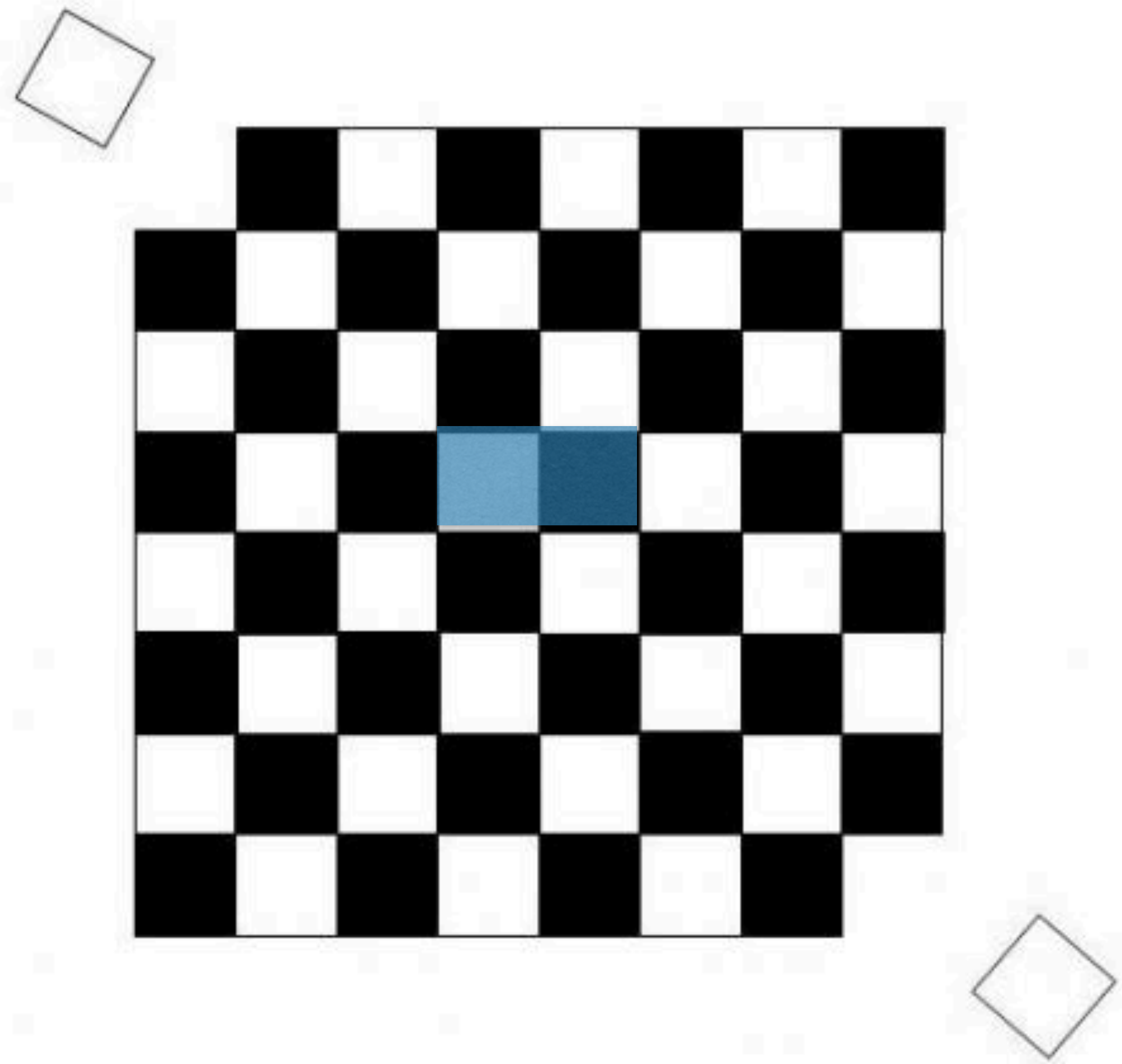
É possível pavimentar o tabuleiro mutilado com peças de dominó?

Cada peça tapa duas casas do tabuleiro





Uma peça de dominó 



Portanto a pavimentação cobre o mesmo número de casas brancas e negras...