Actividade 1 – Gráficos

1. Trace o gráfico da função real de variável real $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

   (a) Utilize as teclas do cursor e a função $\boxed{\text{TRACE}}$ para explorar o gráfico.

   (b) Encontre um zero de f, com aproximação às milésimas, utilizando $\boxed{\text{ZOOM}}$ e $\boxed{\text{TRACE}}$.

   (c) Encontre os outros zeros de f, com aproximação às milésimas, recorrendo ao gráfico e a uma tabela.

   (d) Determine, com aproximação às milésimas, um máximo de f, utilizando $\boxed{\text{ZOOM}}$ e $\boxed{\text{TRACE}}$

   (e) Determine os extremos relativos de f utilizando $\boxed{\text{CALC}}$.

   (f) Elabore um pequeno texto sobre as diversas formas de obter os pontos relevantes do gráfico de uma função.

Actividade 2 – Transformações, deslocamentos e famílias de funções

1. Considere uma função, real de variável real, f, polinomial de grau superior a 1, e g, trigonométrica.

   (a) Represente os gráficos de $f(x)$, $f(x)+1$, $g(x)$ e $g(x)-2$.

   (b) Faça as experiências que considerar necessárias para responder à questão:
   Dado o gráfico de uma funcão $h(x)$ qual é a influência do parâmetro k no gráfico de $h(x)+k$?

   (c) Represente os gráficos de $f(x-2)$, $g(x)$ e $g(x+\frac{\pi}{6})$.

   (d) Faça as experiências que considerar necessárias para responder à questão:
   Dado o gráfico de uma funcão $h(x)$ qual é a influência do parâmetro k no gráfico de $h(x-k)$?

   (e) Justifique, analiticamente, as conclusões a que chegou nas alíneas b) e d).

   (f) Estude a influência do parâmetro $k \in \mathbb{R}$ no gráfico de $k.h(x)$.

2. Considere a função $f(x) = \sin(cx)$, $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Estude a influência de c no gráfico da função.

   (b) Escreva um pequeno texto onde descreva a influência dos parâmetros reais a, b e c no gráfico da função $f(x) = a + b\sin(cx)$

   (c) Sem utilizar a calculadora represente no papel o gráfico da função $g(x) = -3 + \frac{1}{2}\sin(2x)$

3. Dada uma função f, real de variável real, relacione o seu gráfico com os das funções:

   (a) $-f(x)$

   (b) $f(-x)$

   (c) $\mid f(x) \mid$

   (d) $f(\mid x \mid)$

4. Seja f a função cujo gráfico se encontra representado na figura. Esboce, em utilizar a calculadora,o gráfico de

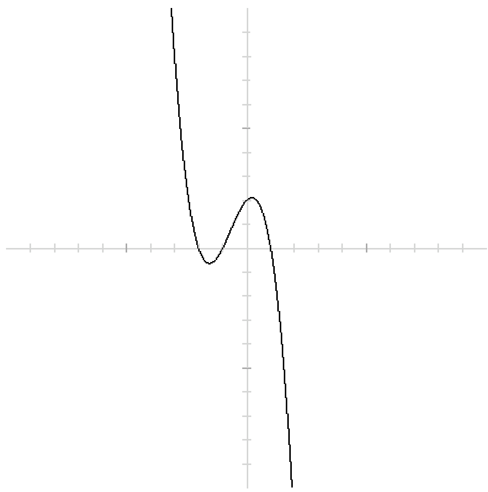
   (a) $3 - f(x-1)$

   (b) $-f(x) + 2$

   (c) $-f(-x)$

   (d) $\mid f(x) \mid +1$

   (e) $f(\mid x \mid) - 2$



Actividade 3 – Igualdades e desigualdades

1. Em quantos pontos se intersectam os gráficos das funções:
   (a) $y_1 = x^3 - 3x$ e $y_2 = x^2$
   (b) $y_1 = 2x^4$ e $y_2 = 4^x$

2. Resolva grafica e analiticamente a inequação:
   (a) $x^3 - 3x^2 + 1 < \frac{1}{2}x^2 - 3$
   (b) Visualize, na calculadora, a região do plano acima do gráfico de $y_1 = x^3 - 3x^2 + 1$ e abaixo de $y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 3$.

3. Resolva graficamente as inequações:
   (a) $|x^3 - 15x = 1| < 2x - 3$
   (b) $\frac{2x}{x-3} \leq x$
   (c) $|x^4 - 15x^+1| < 7 - 2x$
   (d) $|x^5 - 122x^2 + 1| > |x^3 - 15|$

4. Quais as abcissas dos pntos para os quais o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x + 3$ fica "acima" ou "sobre" o gráfico de $g(x) = 3x - 2$?

Actividade 4 – Derivadas

1. Considere a função real de variavel real definida por

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x + 1$$

.

   (a) Indique o valor da derivada da função no ponto de abcissa $x = -0,9$ utilizando 3 processos diferentes:

      i. Usando DRAW e pedindo a tangente no ponto.

      ii. Usando CALC.

      iii. usando MATH.

   (b) Represente o gráfico de f', função derivada de f.

   (c) Utilize a tabela da função derivada para calcular $f'(0)$, $f'(3)$ e $f'(4,5)$.

2. Trace o gráfico da função real de variavel real definida por

$$f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 2$$

.

   (a) Quais são os intervalos de crescimento da função? E os intervalos onde a função é decrescente?

   (b) Trace o gráfico da função derivada fazendo $Y2 = nDeriv(Y1, X)$ (Nota: nDeriv encontra-se no menu MATH). Mude o estilo do gráfico colocando o cursor à esquerda de $Y2$ e pressionando ENTER

   (c) Analise a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função.

   (d) Se a primeira derivada é crescente a segunda derivada é positiva ou negativa?

   (e) Se a primeira derivada decresce a segunda derivada é positiva ou negativa?

   (f) Trace o gráfico da segunda derivada e observe os intervalos onde a primeira derivada é crescente ou decrescente. Verifique se existem algumas diferenças relativamente ao que que observou nas alíneas anteriores.

3. O gráfico de uma função tem a concavidade para cima quando a primeira derivada é crescente. O que pode dizer quanto ao gráfico de $f'(x)$ quando o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade virada para cima?

Actividade 5 – Limites da calculadora

Sendo indiscutível o importante papel actual da calculadora na aula de Matemática é, no entanto, indispensável conhecer as suas limitações e identificar situações onde a sua utilização pode conduzir a erros. Vejamos alguns exemplos:

1. $\sqrt{2}$ é um número racional?
   Se a diferença entre dois números fôr zero eles são iguais.
   Calcule $\sqrt{2}-\frac{19601}{13860}$ e $\sqrt{2}-\frac{768398401}{543339720}$. Pode concluir que $\sqrt{2}$ é um número racional?

2. Calcule $\sqrt{10^6-(10^8-2x10^{-8})^2}$ com a calculadora e analiticamente e explique as diferenças obtidas.

3. Trace os gráficos das funções $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+1}$ e $g(x)=x-2$. Trata-se da mesma função?

4. Represente graficamente a função definida por $i(x)=\frac{x^2-2}{x^3-3}$. Qual parece ser o seu domínio?

5. Trace o gráfico da função $h(x)=\frac{1}{x}$ utilizando o rectângulo de visualização $[-100,100]x[-100,100]$. O que observa?

6. Represente graficamente a função real de variável real $f(x)=\frac{2x^4-3x^2+1}{3x^4-x^2+x-1}$ e descreva o gráfico obtido quando utiliza:

   (a) O Zoom std.

   (b) A janela de visualização $[-2,2]x[-2,2]$.

   (c) A janela de visualização $[0.5,1]x[-2,2]$.

7. Determine os zeros de $f(x)=(x-1,25)^2$ utilizando $\boxed{\text{CALC}}$. O que sucede? Que explicação pode dar para isso?

8. Represente graficamente a função:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x-2 & se \quad x<3 \\ x-1 & se \quad x\geq 3 \end{cases}$$

   Para o fazer tem dois processos:

   1º: $y_1=(x^2-x-2)(x<3)+(x-1)(x\geq 3)$

2º: $y_1 = (x^2 - x - 2)|(x < 3), \quad y_2 = (x - 1)|(x \geq 3)$

Qual parece ser, num caso e no outro, o domínio de continuidade de f?

(Nota: Os símbolos $>$, $<$, $\geq$ e $\leq$ encontram-se em $\boxed{\text{2nd}}/\boxed{\text{MATH}}/\boxed{\text{TEST}}$.)

9. Tentemos determinar, com a calculadora, $\lim_{x\to 0}\left(2 + x + \frac{1}{10^{10}x}\right)$:
   (a) Observe o gráfico da função no rectângulo de visualização decimal. Qual parece ser o domínio da função? e o domínio de continuidade?
   (b) Utilize a tecla $\boxed{\text{TRACE}}$ para "intuir" o limite pedido.
   (c) Calcule o limite analiticamente.
   (d) Altere o rectângulo de visualização de modo a que, graficamente, seja possível intuir o valor do limite.
10. Considere a sucessão de números naturais de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.Comente os resultados obtidos quando calcula:
    (a) os termos de ordem 10^2, 10^5, 10^{10}, 10^{11} e 10^{12}.
    (b) os termos de ordem 2^{30}, 2^{31} e 2^{32}.
    (c) os termos de ordem 10^{13}, 10^{14} e 10^{15}.
11. Considere a função $f(x) = \tan x$ e observe os vários gráficos que obtém quando, com o Zoom Trig, faz variar o parâmetro $xres$:. Idem com a função $g(x) = \sin(100\pi x)$.

Actividade 6 – Exercícios de exame, problemas...

1. Considere a função, real de variável real, definida por $f(x) = x^3 - 3x^2$ e determine, se possível, os valores dos parâmetros reais a, b e c de modo que $g(x) = af(x+b) + c$:

   (a) Tenha um único zero.

   (b) Não tenha zeros reais.

   (c) Tenha um zero para $x = -10$.

   (d) Tenha, simultaneamente, um máximo para $x = 2$ e um mínimo para $x = 0$.

2. **Campanha publicitária**
   Uma fábrica de refrigerantes resolveu fazer uma campanha publicitária para divulgação do seu novo néctar de manga. A evolução da percentagem da população que conhece a bebida é dada por:

   $$P(t) = \frac{175}{2 + 33.e^{-0,1t}}$$

   (P, em percentagem e t em dias a partir do início da campanha.)

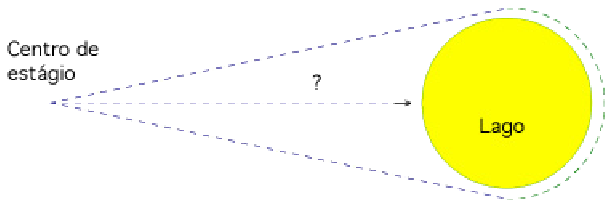
   (a) Que percentagem da população conhecia a bebida no início da campanha?

   (b) Se a campanha continuasse indefinidamente toda a gente ficaria a conhecer a bebida? Se não, qual seria a percentagem da população a conhecê-la?

   (c) Ao fim de 22 dias qual era a taxa de crescimento da população que conhecia a bebida?

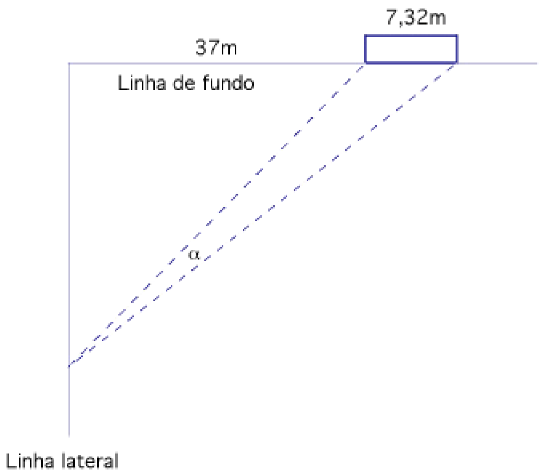
   (d) Em que momento o número de pessoas que conhecia a bebida aumentou mais rapidamente?

3. **O treino do atleta**
A federação de atletismo tem um centro de estágios situado num campo plano onde também existe um lago artificial de forma circular, com 1km de diâmetro.



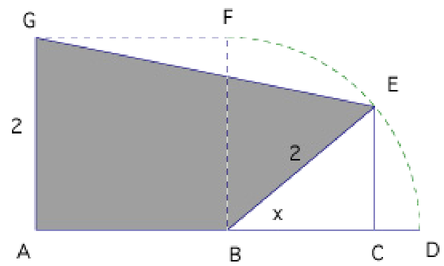
Todas as manhãs um atleta sai do centro de estágios e faz uma corrida à volta do lago seguindo a trajectória mais curta, o que corresponde a 8 km. Qual é a distância entre o centro de estágios e o lago?

4. Goooolo...? Final do campeonato do Mundo de 2006, Portugal defronta a poderosa equipa do Yemen. Cristiano Ronaldo corre ao longo da linha lateral à procura do melhor momento para rematar à baliza. Claro que o vai fazer quando estiver nas melhores condições, ou seja, quando o ângulo com que vê a baliza for o maior possível. A que distância da linha de fundo deve rematar?



5. Na figura está representado um polígono sombreado $[ABEG]$. sabe-se que:

   - $[ABFG]$ é um quadrado de lado 2
   - DF é um arco da circunferência de centro em B; o ponto E move-se ao longo desse arco e, em consequência, o ponto C desloca-se sobre o segmento $[BD]$, de tal forma que se tem sempre $[EC] \perp [BD]$.
   - x designa a amplitude, em radianos, do $\angle CBE$.



   (a) Mostre que a área, A, do polígono $[ABEG]$ pode ser dada, em função de x por:

   $$A(x) = 2(1 + \sin x + \cos x)$$

   (b) Quais são os valores de x para os quais a área do polígono é 4,3? (Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico ou gráficos obtido(s), bem como as coordenadas relevantes de alguns pontos. Apresente os valores pedidos na forma de dízima, arredondados às décimas.)

Actividade 7 – Estatística – Argumentos de peso

No quadro que se segue estão representados os pesos, em kg, dos 30 atletas de luta livre do Clube Desportivo do Peso.

52	60	59	92	71	55	49	76	80	47
51	53	48	73	75	64	65	68	70	52
64	55	76	53	75	54	70	53	56	55

1. Coloque os pesos na lista L1.
2. Coloque-os por ordem crescente.
3. Determine a média e o desvio padrão da distribuição.
4. Obtenha o valor máximo, o mínimo, a mediana, o 1º e o 2º quartil.
5. Faça o histograma da distribuição. Altere a escala de maneira a que o histograma obtido lhe dê as frequências dos dados agrupados em classes de 10 kg de amplitude.
6. Faça um segundo histograma com os dados agrupados em classes de 5 kg. Qual dos histogramas prefere? Porquê?
7. Guarde a lista atribuindo-lhe um nome à sua escolha.

Actividade 8 – Estatística – Faltas por doença

O Departamento de Recursos Humanos da empresa Toucansado registou o número de dias de falta por doença de uma amostra dos seus empregados no 2º semestre de 2004:

Nº de dias de doença	Nº de empregados
0	1
1	4
2	19
3	16
4	14
5	8
6	5
7	10
8	3
9	5
10	1

1. Qual é a população que deu origem à amostra? Qual é a variável em estudo? De que tipo é a variável em estudo? Qual é a dimensão da amostra?
2. Construa uma tabela de frequências simples e acumuladas.
3. Aumente a tabela acrescentando as colunas de frequências relativas simples e acumuladas.
4. Olhando apenas para as colunas de frequências relativas acumuladas indique o 1º e o 3º quartis da distribuição.
5. Represente graficamente a distribuição de frequências absolutas simples
6. Quais são a *média*, *moda* e *mediana* da distribuição? Qual o significado destes valores na situação estudada?
7. Qual é o desvio padrão?
8. Faça o gráfico de extremos e quartis e o de "caixa de bigodes" e compare-os.

Actividade 9 – Estatística – Pesos e alturas

Na tabela seguinte estão representados as alturas, em metros, e os pesos, em quilos, dos atletas de Vela do Clube Náutico da Covilhã.:

Altura	Peso	Altura	Peso
1,61	51	1,62	55
1,61	48,5	1,69	54
1,65	50	1,61	56
1,67	60	1,65	60
1,60	51	1,76	64
1,65	72	1,61	47
1,77	52	1,63	65
1,78	73	1,77	80
1,62	65	1,59	31
1,86	81		

1. Coloque as alturas na L1 e os pesos na L2.
2. Determine a média e o desvio padrão da altura dos velejadores.
3. Ordene os atletas por ordem crescente dos pesos não esquecendo que cada altura tem de se manter associada ao peso correspondente.
4. Apresente um gráfico com a nuvem de pontos desta situação. Que tipo de correlação existe entre as duas variáveis?
5. Qual é o *coeficiente de correlação* existente entre a altura e o peso dos atletas? Que significado atribui à conclusão que tirou?
6. Represente graficamente a recta de regressão e verifique se passa pelo ponto (altura média, peso médio).

Actividade 10 – Estatística – Vícios privados

A polícia entrou de surpresa na cave do nº 7 da Rua Alves dos Reis e prendeu 25 indivíduos que jogavam ilicitamente tendo, posteriormente, registado o número de notas que cada um deles possuia e a quantia correspondente em dinheiro. Com os dados recolhidos foi elaborada a tabela:

Nº de notas	Nº pessoas	Quantia (euros)
0	1	0
1	2	50, 100
2	3	55, 150, 25
3	5	350, 50, 115, 170, 405
4	0	
5	8	340, 75, 315, 40, 430, 130, 185, 100
6	4	265, 425, 510, 190
7	3	485, 270, 390

1. Construa uma tabela de frequências relativas da variável "número de notas".
2. Construa o *polígono de frequências*, o *histograma* e o *diagrama de extremos e quartis* da distribução relativamente ao número de notas.
3. Considere a variável "quantia" e construa o *histograma* com os dados agrupados em classes de amplitude 100.
4. Estude a distribuição bidimensional "número de moedas – quantia" construindo o diagrama de dispersão e a recta de regressão.