

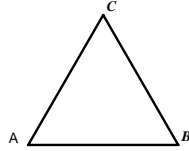
# Elementos de Geometria

## Exame Final

Jorge Nuno Silva

30 de Junho de 2006

1. Considere um triângulo equilátero  $T$  no plano, isto é, o conjunto de três segmentos como na figura abaixo.



Dê exemplo de uma geometria cujo conjunto de pontos seja  $T$ .

2. (a) Enuncie o Teorema Fundamental da Geometria Afim.  
(b) Determine uma transformação afim  $t$  que verifique  $t(1, 0) = (0, 1)$ ,  $t(0, 1) = (1, 1)$ ,  $t(2, 1) = (0, 2)$ , ou mostre que tal transformação não existe. Qual é a imagem da recta  $y = 2x$  por  $t$ ?
3. Determine uma equação da Recta que contém os Pontos  
(a)  $[5, 0, 1]$ ,  $[1, 4, 3]$ .  
(b)  $[1, 3, 1]$ ,  $[1, 2, 3]$ .
4. Seja  $\pi$  o plano de imersão  $x + y + z = -1$ .  
(a) Quais são os Pontos ideais de  $\pi$ ?  
(b) Qual é o ponto de  $\pi$  que representa o Ponto  $[2, 2, 1]$ ?  
(c) Qual é o Ponto correspondente ao ponto de  $\pi$  de coordenadas  $(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$ ?  
(d) Determine a recta que representa em  $\pi$  a Recta  $x - y = 0$ .

(e) Determine a Recta que corresponde à recta de  $\pi$  que contém os pontos  $(-1, 0, 0)$ ,  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ .

5. A seguinte transformação  $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$  é uma transformação projectiva? Justifique a sua resposta.

$$[x, y, z] \mapsto [3x - 2y, x - 3z, 2x + y - z].$$

6. Determine o cross-ratio  $(ABCD)$  dos Pontos com coordenadas homogêneas  $A = [1, 1, \frac{3}{2}]$ ,  $B = [2, 3, 3]$ ,  $C = [8, 1, 12]$ ,  $D = [12, -3, 18]$ .

7. Esboce a seguinte cónica, indicando todos os elementos que julgar relevantes:

$$4x^2 - 4xy + 7y^2 - 24 = 0.$$

8. A transformação  $t$  é definida por  $t(x, y) = (x - y, y - x)$

(a)  $t$  é euclidiana? Justifique.

(b)  $t$  é afim? Justifique.

(c) Determine a imagem da recta  $2y = -x$  por  $t$ .

9. Considere  $(\mathbb{R}^2, G)$  onde  $G$  é o conjunto de todas as rotações em torno do ponto  $(1, 2)$  por um ângulo de  $\theta^\circ$  onde  $\theta$  é um número racional. Trata-se de uma geometria? Justifique.

10. (a) Enuncie o Teorema de Menelau.

(b) Considere o paralelogramo ABCD e dois pontos em lados paralelos E, F. Seja G o ponto de intersecção de EA com FD e H o ponto de intersecção de EB com FC. Mostre que a recta por G e H contém o centro do paralelogramo.

