ELEMENTOS DE GEOMETRIA – Exercícios

Mestrado em Matemtica para o Ensino - DMFCUL

2004/2005

1. Determine a equação da circunferência com centro $(2, 1)$ e raio 3.

2. Determine os pontos de intersecção da recta $y = x + 2$ com a circunferência do exercício anterior.

3. Determine se as circunferências

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 2 = 0\,, x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$

   se intersectam ortogonalmente. Determine a equação da recta que contém os pontos de intersecção.

4. Seja E a parábola $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ com equação paramétrica $x = at^2$, $y = 2at$ e foco F. Sejam P, Q pontos de E, correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2, respectivamente.

   (a) Se PQ define um ângulo recto no vértice da parábola, O, mostre que $t_1 t_2 = -4$.

   (b) Se $t_1 = 2$ e PQ é perpendicular a OP, mostre que $t_2 = -4$.

5. Considere a hipérbole rectangular $xy = c^2$ $(c > 0)$ de equação paramétrica $x = ct$, $y = c/t$. Sejam P, Q pontos da hipérbole, correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2, respectivamente.

   (a) Determine a equação da corda PQ.

   (b) Determine as coordenadas do ponto N, em que a corda encontra o eixo dos xx.

   (c) Determine o ponto médio de PQ.

   (d) Mostre que $OM = MN$ (O é a origem)

6. Determine o declive da tangente ao ciclóide com equações paramétricas

$$x = t - \sin t\,, \qquad y = 1 - \cos t$$

no ponto correspondente a t ($t \neq$ múltiplo de π).

7. Determine a equação da tangente à curva de R^2

$$x = 1 + 4t + t^2\,, \qquad y = 1 - t$$

no ponto correspondente a $t = 1$.

8. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad (a > b > 0\,, b^2 = a^2(1 - e^2)\,, 0 < e < 1)\,.$$

   (a) Se P tem coordenadas $(a\cos t, b\sin t)$, determine a equação da tangente à elipse em P.

   (b) Determine as coordenadas do ponto T onde a tangente da alínea anterior encontra a directriz $x = a/e$.

   (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $PF \perp TF$.

9. A recta vertical que passa num ponto P de uma hipérbole H

   ($x = 2\sec t$, $y = 3\tan t$) encontra o eixo dos xx em N. A tangente a H em P encontra o eixo dos xx em T.

   (a) Determine as coordenadas de N.

   (b) Determine as coordenadas de T.

   (c) Mostre que $ON \cdot OT = 4$ (O é a origem).

10. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad (a > b > 0\,, b^2 = a^2(1 - e^2)\,, 0 < e < 1)\,.$$

   (a) Se P tem coordenadas $(a\cos t, b\sin t)$, determine a equação da normal à elipse em P.

   (b) Determine as coordenadas do ponto Q onde a normal da alínea anterior encontra o eixo dos yy.

   (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $QF = e \cdot PF$.

11. Classifique as cónicas seguintes. Determine os respectivos centros/vértices e eixos.

    (a) $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0.$
    (b) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 7 = 0.$
    (c) $x^2 + xy + 4y^2 + 3x - 9 = 0.$
    (d) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0.$
    (e) $2x^2 - xy - 2y^2 - 2 = 0.$

12. Considere o $\triangle ABC$ com $AB = AC$. Mostre que $\angle ABC = \angle ACB$.

    [Sugestão: Considere a reflexão em relação à bissectriz de $\angle BAC$]

13. Determine quais das seguintes transformações $t : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}^2$ são euclidianas.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
    (c) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

14. As transformações euclidianas t_1 e t_2 são dadas por

    $$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    Determine a composição $t_1 \circ t_2$.

15. Determine as inversas das seguintes transformações euclidianas.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. Determine $t_2^{-1} \circ t_1$, onde

    $$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Determine quais das seguintes transformações são afins.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

    (c) $t(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$

18. Em cada caso dê um exemplo, caso exista. Justifique.

    (a) Uma transformação afim que não é euclidiana.

    (b) Uma transformação euclidiana que não é afim.

    (c) Uma transformação afim e euclidiana.

    (d) Uma transformação injectiva que não é euclidiana nem afim.

19. Determine $t_1 \circ t_2$, $t_2 \circ t_1$, $t_1 \circ t_1$, onde

$$t_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Determine as inversas das transformações afins.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

21. Mostre que a transformação $t(x) = 3x$ é afim, mas não uma projecção paralela.

22. Quais das seguintes são propriedades afins?

    (a) Distância.

    (b) Colinearidade.

    (c) Circularidade.

    (d) Medida de ângulo.

    (e) Ponto médio de segmento.

23. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

(a) $y = -2x$

(b) $2y = 3x - 1$

24. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

(a) $2x - 5y + 3 = 0$

(b) $3x + y - 4 = 0$

25. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ nos pontos

(a) $(0, -1), (1, 1), (-1, 1)$, respectivamente.

(b) $(-4, -5), (1, 7), (2, -9)$, respectivamente.

26. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, 1), (3, 2), (4, 1)$ nos pontos $(0, 1), (1, 2), (3, 7)$, respectivamente.

27. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, -1), (5, -4), (-2, 1)$ nos pontos $(1, 1), (4, 0), (0, 2)$, respectivamente.

28. Os pontos P, Q, R, R estão sobre uma recta, por esta ordem. As distâncias entre eles são 4, 2, 3 unidades, rerspectivamente. Determine as razões $PR : RS$ e $PS : SQ$.

29. Um ponto X está dentro do $\triangle ABC$, e as rectas AX, BX e CX encontram os lados opostos do triângulo nos pontos P, Q e R, respectivamente. As razões $AR : AB$, e $BP : BC$ são $1 : 5$ e $3 : 7$, respectivamente. Determine a razão $AC : AQ$.

30. Uma recta ℓ atravessa os lados, AB, BC e CA de um $\triangle ABC$ em R, P e Q, respectivamente. As razões $BC : CP$ e $CQ : QA$ são $3 : 2$ e $1 : 3$, respectivamente. Determine a razão $AR : RB$.