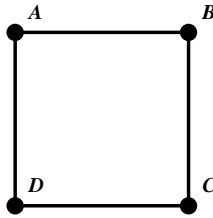


EXAME DE GEOMETRIA

Jorge Nuno Silva

17 de Junho de 2005

1. Considere um quadrado Q no plano, isto é, o conjunto de quatro segmentos como na figura abaixo.



Dê exemplo de uma geometria cujo conjunto de pontos seja Q .

2. Determine uma transformação afim t que verifique $t(0, 0) = (0, 1)$, $t(1, 0) = (1, 1)$, $t(0, 1) = (0, 2)$, ou mostre que tal transformação não existe. Qual é a imagem da recta $y = 2x$ por t ?
3. Determine uma equação da Recta que contém os Pontos
 - (a) $[0, 5, 1]$, $[1, 4, 3]$.
 - (b) $[2, 3, 1]$, $[1, 2, 3]$.
4. Seja π o plano de imersão $x + y + z = 1$. Quais são os Pontos ideais de π ? Qual é o ponto de π que representa o Ponto $[1, 2, 1]$?
5. A seguinte transformação $t : \mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é uma transformação projectiva? Justifique a sua resposta.

$$[x, y, z] \mapsto [2x - 3y, 2x - z, x + y - z].$$

6. Determine o cross-ratio $(ABCD)$ dos Pontos com coordenadas homogêneas $A = [2, 2, 3]$, $B = [2, 3, 3]$, $C = [16, 2, 24]$, $D = [12, -3, 18]$.
7. Determine as imagens, relativamente à inversão na circunferência unitária, dos seguintes conjuntos.
- Pontos $(3, 3)$, $(-4, 1)$, $(-4, 0)$, $(-3, -3)$
 - Circunferência de centro $(2, 2)$ e raio $2\sqrt{2}$.
 - Circunferência de centro $(1, 1)$ e raio $1/2$.
 - Recta $x - y = 1$
 - Recta $x - y = 0$
8. Seja $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$t(z) = i\bar{z} - 1 + i.$$

- Mostre que t é uma isometria.
 - Interprete t como composição de uma reflexões, rotação e translação.
 - Interprete t como composição de reflexões.
9. No quadrilátero $ABCD$, AB e CD encontram-se em P , AD e BC encontram-se em Q . As diagonais AC e BD encontram PQ em X e Y , respectivamente.

Mostre que $\frac{PX}{XQ} = -\frac{PY}{YQ}$.

