

ELEMENTOS DE GEOMETRIA 2k3/2k4

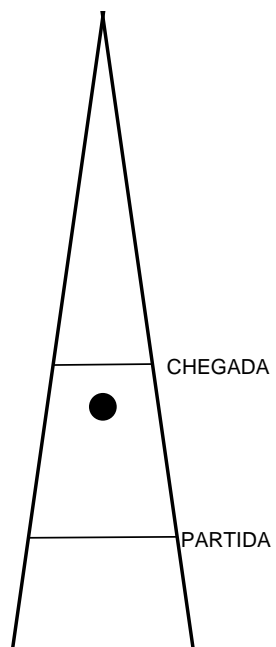
Exame

Jorge Nuno Silva

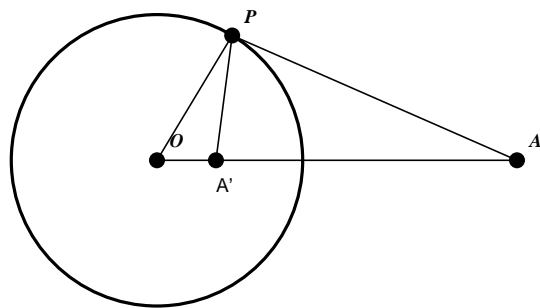
9 de Janeiro de 2004

1. Dê um exemplo original de uma geometria do plano. Justifique a sua resposta.
2. (a) Determine uma transformação afim s , tal que $s(0,0) = (4,4)$, $s(2,0) = (4,2)$, $s(0,1) = (3,4)$.
(b) s é euclidiana?
(c) Determine a imagem da recta $y = 3x + 1$ por s .
3. Determine uma equação da Recta que contém os Pontos $[0, 2, 7]$, $[0, 2, -3]$.
4. Seja π o plano de imersão $z = -1$. Quais são os Pontos ideais de π ? Qual é o ponto de π que representa o Ponto $[1, 2, 2]$?
5. Sejam $A = [3, 2, 1]$, $B = [2, 1, 1]$, $C = [8, 5, 3]$, $D = [0, -1, 1]$. Determine
(a) $(ABCD)$.
(b) $(ACBD)$.
(c) $(ADBC)$.
(d) $(ACDB)$.
6. Determine uma transformação projectiva t tal que: $t([1, 0, 1]) = [2, 1, 0]$, $t([1, 1, 0]) = [2, 1, 1]$, $t([1, 1, 1]) = [0, 2, 1]$, $t([0, 2, 3]) = [3, 0, 1]$.

- Um ciclista pedala numa pista em linha recta, entre a PARTIDA e a CHEGADA, que distam 100 km entre si. Uma fotografia aérea, durante a sua prova, mostra a sua imagem a $\frac{3}{4}$ do percurso. Na foto, a distância entre PARTIDA e CHEGADA é de 2cm, e a estrada parece desaparecer 4 cm atrás da CHEGADA. Que distância faltava percorrer ao ciclista no momento em que a fotografia foi tirada?



8. Seja C uma circunferência no plano, centrada em O , com raio r . Para um ponto do plano $A \neq O$, seja A' na semi-recta OA tal que o produto dos comprimentos OA' e OA verifica $OA' \cdot OA = r^2$. Seja t a aplicação definida assim $A \mapsto A'$. A t chama-se *inversão* em C .



(a) Se C é a circunferência de raio 1 centrada na origem de \mathbb{R}^2 , quais

são os inversos de $(2, 0)$, $(0, -0.5)$, $(-1, 0)$?

- (b) Mostre que $t \circ t = id$.
- (c) Mostre que se P está em C e B está na semi-recta OA , e verifica $\angle OPB = \angle OAP$, então os triângulos $\triangle OPB$ e $\triangle OAP$ são semelhantes. Conclua que $B = A'$.
- (d) Descreva um método euclidiano para, dado $A \neq O$, construir A' .