

TESTE 2 DE GEOMETRIA

Jorge Nuno Silva

3 de Junho de 2005

1. Das seguintes transformações $\mathbb{RP}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ diga quais as que são transformações projectivas e determine as respectivas matrizes.

(a) $t : [x, y, z] \mapsto [2, x, y - z]$

(b) $t : [x, y, z] \mapsto [2x, x + 17z, y - z]$

(c) $t : [x, y, z] \mapsto [2x^3, x + z, y + 2z]$

2. Determine a imagem do Ponto $[1, 0, -1]$ e da Recta $x - y + z = 0$ pela transformação projectiva associada à matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Enuncie o Teorema Fundamental da Geometria Projectiva.
4. Exiba uma transformação projectiva que transforme os Pontos $[0, 1, -1]$, $[-2, 0, 1]$, $[1, -2, 1]$, $[1, -1, 1]$, respectivamente nos Pontos $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[1, 1, -1]$, $[2, 1, 1]$, ou justifique que tal transformação não existe.
5. Determine o cross-ratio $(ABCD)$ onde $A = [4, 2, 6]$, $B = [1, 2, 3]$, $C = [8, 1, 9]$, $D = [-4, 1, -3]$.
6. Determine as imagens, relativamente à inversão na circunferência unitária, dos seguintes conjuntos.
- (a) Pontos $(4, 3)$, $(-4, 3)$, $(-4, -3)$, $(4, -3)$
- (b) Circunferência de centro $(1, 1)$ e raio $\sqrt{2}$.
- (c) Circunferência de centro $(1, 0)$ e raio $1/2$.
- (d) Recta $x + y = 1$

(e) Recta $x + y = 0$

7. Seja $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$t(z) = -i\bar{z} + 1 + 2i.$$

- (a) Mostre que t é uma isometria.
 - (b) Interprete t como composição de uma reflexão, uma rotação e uma translação.
 - (c) Interprete t como composição de reflexões.
8. A figura mostra a fotografia aérea de três carros (A, B, C) que se afastam ao longo de uma estrada que parece desaparecer ao longe. As distâncias à esquerda referem-se à fotografia. Sabendo que a distância real entre os carros B e C é de 7 km, qual é a distância real a que o carro A está do carro C? Justifique.

