GEOMETRIA – Exercícios

Mestrado em Educação - DMFCUL

2002/2003

1. Determine a equação da circunferência com centro $(2, 1)$ e raio 3.

2. Determine os pontos de intersecção da recta $y = x + 2$ com a circunferência do exercício anterior.

3. Determine se as circunferências

$$2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 2 = 0\,, x^2 + y^2 - 4x + 2y$$

   se intersectam ortogonalmente. Determine a equação da recta que contém os pontos de intersecção.

4. Seja E a parábola $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ com equação paramétrica $x = at^2$, $y = 2at$ e foco F. Sejam P, Q pontos de E, correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2, respectivamente.

   (a) Se PQ define um ângulo recto no vértice da parábola, O, mostre que $t_1 t_2 = -4$.

   (b) Se $t_1 = 2$ e PQ é perpendicular a OP, mostre que $t_2 = -4$.

5. Considere a hipérbole rectangular $xy = c^2$ $(c > 0)$ de equação paramétrica $x = ct$, $y = c/t$. Sejam P, Q pontos da hipérbole, correspondentes a valores do parâmetro t_1, t_2, respectivamente.

   (a) Determine a equação da corda PQ.

   (b) Determine as coordenadas do ponto N, em que a corda encontra o eixo dos xx.

   (c) Determine o ponto médio de PQ.

   (d) Mostre que $OM = MN$ (O é a origem)

6. Determine o declive da tangente ao ciclóide com equações paramétricas

$$x = t - \sin t\,, \qquad y = 1 - \cos t$$

no ponto correspondente a t ($t \neq$ múltiplo de π).

7. Determine a equação da tangente à curva de $\mathbb{R}^2$

$$x = 1 + 4t + t^2\,, \qquad y = 1 - t$$

no ponto correspondente a $t = 1$.

8. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad (a > b > 0\,, b^2 = a^2(1 - e^2)\,, 0 < e < 1)\,.$$

   (a) Se P tem coordenadas $(a\cos t, b\sin t)$, determine a equação da tangente à elipse em P.

   (b) Determine as coordenadas do ponto T onde a tangente da alínea anterior encontra a directriz $x = a/e$.

   (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $PF \perp TF$.

9. A recta vertical que passa num ponto P de uma hipérbole H

   ($x = 2\sec t$, $y = 3\tan t$) encontra o eixo dos xx em N. A tangente a H em P encontra o eixo dos xx em T.

   (a) Determine as coordenadas de N.

   (b) Determine as coordenadas de T.

   (c) Mostre que $ON \cdot OT = 4$ (O é a origem).

10. Seja P um ponto da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad (a > b > 0\,, b^2 = a^2(1 - e^2)\,, 0 < e < 1)\,.$$

   (a) Se P tem coordenadas $(a\cos t, b\sin t)$, determine a equação da normal à elipse em P.

   (b) Determine as coordenadas do ponto Q onde a normal da alínea anterior encontra o eixo dos yy.

   (c) Seja F o foco com coordenadas $(ae, 0)$. Mostre que $QF = e \cdot PF$.

11. Classifique as cónicas seguintes. Determine os respectivos centros/vértices e eixos.

    (a) $x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 5y + 2 = 0$.
    (b) $x^2 + 3xy + 4y^2 - 7 = 0$.
    (c) $x^2 + xy + 4y^2 + 3x - 9 = 0$.
    (d) $x^2 + 2xy + y^2 - 7x + 3 = 0$.
    (e) $2x^2 - xy - 2y^2 - 2 = 0$.

12. Considere o $\triangle ABC$ com $AB = AC$. Mostre que $\angle ABC = \angle ACB$.

    [Sugestão: Considere a reflexão em relação à bissectriz de $\angle BAC$]

13. Determine quais das seguintes transformações $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são euclidianas.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
    (c) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

14. As transformações euclidianas t_1 e t_2 são dadas por

    $$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    Determine a composição $t_1 \circ t_2$.

15. Determine as inversas das seguintes transformações euclidianas.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$
    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. Determine $t_2^{-1} \circ t_1$, onde

    $$t_1(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Determine quais das seguintes transformações são afins.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

    (c) $t(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x$

18. Em cada caso dê um exemplo, caso exista. Justifique.

    (a) Uma transformação afim que não é euclidiana.

    (b) Uma transformação euclidiana que não é afim.

    (c) Uma transformação afim e euclidiana.

    (d) Uma transformação injectiva que não é euclidiana nem afim.

19. Determine $t_1 \circ t_2$, $t_2 \circ t_1$, $t_1 \circ t_1$, onde

$$t_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. Determine as inversas das transformações afins.

    (a) $t(x) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

    (b) $t(x) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

21. Mostre que a transformação $t(x) = 3x$ é afim, mas não uma projecção paralela.

22. Quais das seguintes são propriedades afins?

    (a) Distância.

    (b) Colinearidade.

    (c) Circularidade.

    (d) Medida de ângulo.

    (e) Ponto médio de segmento.

23. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

(a) $y = -2x$

(b) $2y = 3x - 1$

24. A transformação afim t é definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

determine as imagens das rectas

(a) $2x - 5y + 3 = 0$

(b) $3x + y - 4 = 0$

25. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ nos pontos

(a) $(0, -1), (1, 1), (-1, 1)$, respectivamente.

(b) $(-4, -5), (1, 7), (2, -9)$, respectivamente.

26. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, 1), (3, 2), (4, 1)$ nos pontos $(0, 1), (1, 2), (3, 7)$, respectivamente.

27. Determine a transformação afim que transforma os pontos $(1, -1), (5, -4), (-2, 1)$ nos pontos $(1, 1), (4, 0), (0, 2)$, respectivamente.

28. Os pontos P, Q, R, R estão sobre uma recta, por esta ordem. As distâncias entre eles são 4, 2, 3 unidades, rerspectivamente. Determine as razões $PR : RS$ e $PS : SQ$.

29. Um ponto X está dentro do $\triangle ABC$, e as rectas AX, BX e CX encontram os lados opostos do triângulo nos pontos P, Q e R, respectivamente. As razões $AR : AB$, e $BP : BC$ são $1 : 5$ e $3 : 7$, respectivamente. Determine a razão $AC : AQ$.

30. Uma recta ℓ atravessa os lados, AB, BC e CA de um $\triangle ABC$ em R, P e Q, respectivamente. As razões $BC : CP$ e $CQ : QA$ são $3 : 2$ e $1 : 3$, respectivamente. Determine a razão $AR : RB$.

31. $ABCD$ é um paralelogramo, e o ponto P divide AB na razão $2:1$; as rectas AC e DP encontram-se em Q, e as rectas BQ e AD encontram-se em R.

    (a) Determine as imagens dos pontos P, Q e R pela transformação afim t que transforma A, D e C em $(0,1)$, $(0,0)$ e $(1,0)$, respectivamente.

    (b) Considerando a imagem de $ABCD$ por t, determine as razões $BQ:QR$ e $AR:RD$.

32. O $\triangle ABC$ tem vértices $A(-1,2)$, $B(-3,-1)$ e $C(3,1)$. Os pontos $P(1,\frac{1}{3})$, $Q(1,\frac{3}{2})$ e $R(-\frac{5}{3},1)$ estão sobre BC, CA e AB, respectivamente.

    (a) Determine as razões em que P, Q e R dividem os lados do triângulo.

    (b) Determine se AP, BQ e CR são concurrentes.

33. O $\triangle ABC$ tem vértices $A(2,0)$, $B(-3,0)$ e $C(3,-3)$. Os pontos $P(-1,-1)$, $Q(1,3)$ e $R(-\frac{1}{4},0)$ estão sobre BC, CA e AB, respectivamente.

    (a) Determine as razões em que P, Q e R dividem os lados do triângulo.

    (b) Determine se P, Q e R são colineares.

34. Uma elipse toca os lados AB, BC, CD e DA de um paralelogramo nos pontos P, Q, R e S, respectivamente. Mostre que os comprimentos CQ, QB, BP e CR satisfazem

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{CR}{BP}\,.$$

35. determine a equação da imagem da parábola P de equação $y = x^2$ pela transformação t definida por

$$t(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

    Mostre que a imagem do vértice de P não é o vértice de $t(P)$.

    [Isto significa que *ser o vértice de uma parábola* não é uma propriedade afim.]

36. (a) Determine a, b, c, d tais que

$$[1, a, b] = \left[-\frac{1}{2}, 3, 4\right] , \quad [c, d, 2] = [3, 0, 1] .$$

(b) Quais das seguintes coordenada homogéneas representam o mesmo Ponto de $\mathbb{RP}^2$ que $[4, -8, 2]$?

i. $[1, 4, -2]$.
ii. $[\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}]$.
iii. $[-\frac{1}{2}, -2, 1]$.
iv. $[-2, 4, -1]$.
v. $[-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$.

37. Determine a equação de cada uma das Rectas em $\mathbb{RP}^2$:

(a) A Recta que contém os Pontos $[1, 2, 3]$ e $[3, 0, -2]$.
(b) A Recta que contém os Pontos $[1, -1, 1]$ e $[2, 1, -3]$.

38. Determine se os seguintes conjuntos de Pontos são colineares.

(a) $[1, -1, 0]$, $[1, 0, -1]$, $[2, -1, -1]$.
(b) $[1, 0, 1]$, $[0, 1, 2]$, $[1, 2, 3]$.

39. Determine o Ponto de intersecção de cada par de Rectas em $\mathbb{RP}^2$.

(a) As Rectas com equações $x - 2y + z = 0$ e $x - y - z = 0$.
(b) As Rectas com equações $x + 2y + 5z = 0$ e $3x - y + z = 0$.

40. Determine o Ponto de $\mathbb{RP}^2$ em que a Recta que contém os Pontos $[8, -1, 2]$ e $[1, -2, -1]$ encontra a Recta que contém os Pontos $[0, 1, -1]$ e $[2, 3, 1]$.

41. Determine o Ponto de $\mathbb{RP}^2$ em que a Recta que contém os Pontos $[1, 2, 2]$ e $[2, 3, 3]$ encontra a Recta que contém os Pontos $[0, 1, 2]$ e $[0, 1, 3]$.

42. Determine quais das seguintes transformações t de $\mathbb{RP}^2$ são transformações projectivas. Para as que forem, identifique as respectivas matrizes.

(a) $t : [x, y, z] \mapsto [2x, y + 3z, 1]$
(b) $t : [x, y, z] \mapsto [x, x - y + 3z, x + y]$

(c) $t : [x, y, z] \mapsto [2y, y - 4z, x]$

(d) $t : [x, y, z] \mapsto [x + y - z, y + 3z, x + 2y + 2z]$

43. Determine as imagens dos Pontos $[1, 2, 3]$, $[0, 1, 0]$, $[1, -1, 1]$ pela transformação projectiva t associada à matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

44. Sejam $t_1 : [x, y, z] \mapsto [2x + y, -x + z, y + z]$, $t_2 : [x, y, z] \mapsto [x + y, 3x - z, 4y - 2z]$ duas transformações projectivas de $\mathbb{RP}^2$ em $\mathbb{RP}^2$.

(a) Determine matrizes associadas a t_1 e t_2.

(b) Determine fórmulas para $t_2 \circ t_1$ e $t_2 \circ t_1^{-1}$.

(c) Determine a imagem da Recta $x + 2y + 3z = 0$ por t_1.

45. Determine matrizes associadas às transformações projectivas que transformam os Pontos $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$, $[1, 1, 1]$ nos Pontos:

(a) $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$.

(b) $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$.

(c) $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$.

46. Use os resultados do exercício anterior para determinar transformações projectivas que transformem:

(a) Os Pontos $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$ nos Pontos $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$.

(b) Os Pontos $[0, 1, 0]$, $[1, 0, 0]$, $[-1, -1, 1]$, $[2, 1, 1]$ nos Pontos $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$.

(c) Os Pontos $[0, 1, -3]$, $[1, 1, -1]$, $[4, 2, 3]$, $[7, 4, 3]$ nos Pontos $[-2, 0, 1]$, $[0, 1, -1]$, $[-1, 2, -1]$, $[-1, 1, -1]$.

47. Um Ponto U não pertence a nenhum dos lados do $\triangle ABC$ nem aos seus prolongamentos em $\mathbb{RP}^2$. As Rectas BC e AU encontram-se em P, CA e BU encontram-se em Q, AB e CU encontram-se em R. Mostre que P, Q e R não são colineares.

48. Para cada um dos conjuntos de Pontos A, B, C, D, calcule o cross-ratio $(ABCD)$.

    (a) $A = [2,1,3]$, $B = [1,2,3]$, $C = [8,1,9]$, $D = [4,-1,3]$.
    (b) $A = [2,1,1]$, $B = [-1,1,-1]$, $C = [1,2,0]$, $D = [-1,4,-2]$.
    (c) $A = [-1,1,1]$, $B = [0,0,2]$, $C = [5,-5,3]$, $D = [-3,3,7]$.

49. Determine as imagens dos pontos seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, $\mathcal{C}$.

    (a) $(3,-4)$
    (b) $(-1,1)$
    (c) $(9,0)$
    (d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

50. Determine as imagens das circunferências seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, $\mathcal{C}$.

    (a) Com centro em $(3,-4)$ e raio 5
    (b) Com centro $(1,2)$ e raio 3

51. Determine as imagens das rectas seguintes relativas à inversão na circunferência unitária, $\mathcal{C}$.

    (a) $y + 3x = 5$
    (b) $y + 2x = 0$

52. Seja t a transformação definida por

$$t(z) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\,i\right) z + 2i\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

    (a) Mostre que t representa uma isometria.
    (b) Interprete t como a composição de uma rotação com uma translação.
    (c) Interprete t como composição de reflexões.

53. Determine a imagem de cada um dos pontos sgeuintes pela inversão relativa à circunferência unitária.

    a) $-3 + 4i$.   b) $5 - 12i$.

54. Seja C a circunferência de raio 2 centrada em $1+i$.

    (a) Escreva a inversão em C do plano completo como uma transformação de $\widehat{\mathbb{C}}$.

    (b) Determine a imagem de i pela inversão em C.

55. Seja t a transformação linear generalizada dada por

$$t(z) = \begin{cases} -5iz + (2+6i) & z \in \mathbb{C} \\ \infty & z = \infty \,. \end{cases}$$

    Exprima t como composição de inversões no plano completo.