Lógica

Jorge Nuno Silva
Gabinete: B309 do Complexo II (UL)
Tel: 790 4908, email: jnsilva@lmc.fc.ul.pt
web: http://ptmat.lmc.fc.ul.pt/˜jnsilva

1 Aquecimento (Problemas)

1. Dois jogadores, alternadamente, partem uma barra de chocolate 6×8 por um dos vincos até que só haja quadrados 1×1. O jogador que primeiro se vir impedido de jogar perde. Quem ganha este jogo, o primeiro ou o segundo a jogar?

2. Dois jogadores, primeiro A e depois B, escolhem alternadamente um número inteiro positivo, verificando as seguintes regras:

   i) Nenhum pode escolher um número superior a um limite superior, M, acordado entre os jogadores previamente.

   ii) Nenhum número pode ser um divisor dum número já escolhido.

   O primeiro jogador que não puder jogar perde.

   Por exemplo, com M=10, um jogo possível seria: A escolhe 10 (eliminando, pela regra ii), os números 1,2,5,10);

   B escolhe 4 (eliminando somente o 4)

   A escolhe 7

   B escolhe 8

   neste momento os números sobreviventes são 3,6 e 9. Agora se A escolhe 3 então B escolhe 9 e ganha, mas A pode escolher 6, deixando a B 6 e 9 como escolhas possíveis, portanto A ganha.

   Mostre que, seja qual for o limite máximo M, existe sempre uma estratégia ganhante para A. [Não se pede que exiba essa estratégia, pede-se que mostre que uma tal estratégia tem necessariamente de existir].

3. Há três pilhas de pedras, respectivamente com 10, 15, 20 pedras. Cada jogada consiste em escolher uma das pilhas e dividi-la em duas pilhas menores. Perde quem não conseguir jogar. Quem ganha este jogo?

4. Os números 1, ..., 20 são escritos numa linha. Dois jogadores alternam colocando $+$ ou $-$ entre quaisquer dois números consecutivos da lista. Quando todos os espaços estiverem ocupados a expressão é calculada. O primeiro jogador ganha se o resultado for par, o segundo ganha se o resultado for ímpar. Quem ganha?

   O Princípio das Gavetas, também conhecido por Pigeon Hole Principle, Princípio de Dirichlet, etc diz que *se n+1 objectos se distribuem por n gavetas então pelo menos uma gaveta fica com pelo menos dois objectos.*

   Uma versão um pouco mais geral diz que *se n objectos se distribuem por k gavetas onde n é maior que mk, então uma gaveta fica com pelo menos m+1 objectos.*

5. Uma gaveta duma cómoda tem 50 meias brancas e 50 meias pretas. Quantas meias se devem tirar, de olhos fechados, de forma a ter de certeza duas meias da mesma cor?

6. O pinhal de Leiria tem um milhão de pinheiros. Cada pinheiro tem no máximo 600 000 agulhas. Mostrar que há, no pinhal de Leiria, pelo menos dois pinheiros com o mesmo número de agulhas.

7. Dados doze números inteiros quaisquer, mostre que a diferença de dois deles é divisível por 11.

8. Não há ninguem com mais de 500 000 cabelos na cabeça. Mostre que em Lisboa há pessoas com exactamente o mesmo número de cabelos.

9. Seis pessoas estão numa sala. Mostre que três delas se conhecem entre si, ou três delas são estranhas umas às outras.

10. Das 1985 pessoas presentes numa reunião nenhuma fala mais de cinco línguas, mas, em cada conjunto possível de três pessoas, pelo menos duas têm uma língua comum. Prove que pelo menos uma língua é falada por, pelo menos, duzentas pessoas presentes na reunião.

11. Em FaVe uma pessoa diz: "Sou um Fa".

    Que se pode concluir?

12. Numa conferência em FaVe cada participante disse aos outros: "Sois todos Fas".

    Quantos Ves estavam na conferência?

13. Num concurso de TV uma pessoa tem de escolher uma de entre três portas. Sabe-se que atrás de uma delas está um mercedão, e atrás de cada uma das outras está um cabrito. A pessoa tenta a sua sorte e escolhe uma das portas. Antes de a abrir o apresentador abre uma das restantes, exibindo um cabrito, e pergunta "*antes que eu abra a porta que escolheu, quer trocar pela outra que ainda está fechada?*

    Qual é a resposta mais inteligente a esta pergunta? (Deve assumir-se que um mercedão é mais valioso que um cabrito).

14. Numa carruagem de combóio estão seis pessoas: A, B, C, D, E, F. Cada uma delas é de uma das seguintes localidades: Viseu, Coimbra, Taveiro, Santarem, Milfontes, Abrantes. Sabe-se que

    (a) A e o homem de Viseu são médicos.
    (b) E e a mulher de Coimbra são professores.
    (c) C e a pessoa de Taveiro são engenheiros.
    (d) B e F participaram na guerra em África, mas a pessoa de Taveiro nunca foi à tropa.
    (e) A pessoa de Milfontes é mais velha que A.
    (f) A pessoa de Abrantes é mais velha que C.
    (g) Em Santarem B e o homem de Viseu descem do combóio.
    (h) No entroncamento C e o homem de Milfontes descem do combóio.

    Descubra quem é donde e qual a respectiva profissão.

15. Se cada letra representa um dígito diferente descodifique as operações aritméticas

    i) SEND+MORE=MONEY
    ii) ONE+FOUR=FIVE

16. Em FaVe há duas pessoas fisicamente indistinguíveis com as seguintes características. O Sábio Verdadeiro (SV) diz sempre a verdade e o Bronco Mentiroso mente sempre, mas há mais uma diferença essencial: SV acredita em todas as proposições verdadeiras, BM acredita nas falsas.

Vejamos que eles dão a mesma resposta a qualquer pergunta. Por exemplo, se a pergunta for "1+1=2?" o SV acredita que de facto a aritmética está correcta e diz "Sim". O BM pensa que 1+1 não é 2, mas como é inverdadeiro, diz que acredita que sim, isto é, responde "Sim".

Você encontra estas duas personagens mas não sabe qual é qual. Será que há uma pergunta que possa fazer a um deles que esclareça a identidade de cada um? (Sugestão: a resposta é afirmativa). Dê um exemplo. Porque é que isso não contradiz o facto, notado acima, de eles responderem o mesmo às mesmas perguntas?

17. Qual é a coisa, qual é ela, que é maior que Deus, os mortos alimentam-se dela, e se as pessoas vivas a comem morrem?

18. Na ilha de FasiVesi há dois tipos de pessoas. Os Vesis dizem sempre a verdade ou não respondem. Os Fasis mentem sempre ou não respondem. Se uma pergunta é feita de tal forma que, se respondessem, estariam a trair a sua natureza, os habitantes, naturamente, calam-se.

    i) Exiba uma pergunta à qual um Fasi possa responder sim ou não, mas à qual um Vesi não pode responder.

    ii) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder sim ou não mas um Fasi não pode responder.

    iii) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder não mas não pode responder sim, à qual um Fasi não pode responder.

    iv) Exiba uma pergunta à qual um Vesi pode responder sim mas não pode responder não, à qual um Fasi não pode responder.

    v) Exiba uma pergunta à qual nem um Fasi nem um Vesi pode responder.

19. No planeta Og há quatro tipos de nativos: os verdes, os vermelhos, os do norte e os do sul. Os verdes nortenhos e os vermelhos do sul dizem sempre a verdade, os verdes do sul e os vermelhos do norte mentem sempre.

    (a) De noite, sem luz, encontra um nativo. Que pergunta sim-não lhe pode fazer para ficar a saber a sua cor?

    (b) Um terráqueo (T) chega a Og e encontra, numa noite muito escura, um nativo (N). Passa-se o seguinte diálogo:

        T: Você é vermelho?

T: Você é do sul?

T: Você não responde?

N: Se eu respondesse não às suas duas primeiras perguntas estaria a mentir pelo menos uma vez.

É possível determinar a cor e o hemisfério do nativo?

(c) Num dia claro e luminoso o terráqueo encontrou um nativo que lhe disse: "Sou um verde do norte". O terráqueo pensou um pouco e disse: "Não sei de que hemisfério ele é."

De que cor era o nativo?

(d) Dois nativos, A, B, dizem o seguinte.

A: Sou verde do norte.

B: Sou verde.

B: Sou do norte.

Pode deduzir-se o tipo de algum deles?

(e) Um nativo diz: "Se sou verde então sou do sul". Qual é o seu hemisfério e a sua cor?

2 Cálculo Proposicional

Conectivos. A linguagem do cálculo proposicional. Semântica.

2.1 Notas

2.1.1 Linguagem

Negação $\neg$. Traduz ”não é verdade que...”.

Tabela de verdade:

A	¬ A
V	F
F	V

Conjunção $\wedge$. Traduz ”e”, ”mas”, ...

Tabela de verdade:

A	B	A ∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção $\vee$. Traduz ”ou” (não exclusivo).

Tabela de verdade:

A	B	A ∨ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional $\rightarrow$. Traduz ”se...então...”.

$A \rightarrow B$ significa ”se A então B”, ”B se A”, ”A só se B”, ”A é condição suficiente para B”, ”B é condição necessária para A”, ...

Em $A \rightarrow B$ o antecedente (hipótese) é A e consequente (tese) é B.

$B \rightarrow A$ é a *recíproca* de $A \rightarrow B$.

$(\neg A) \rightarrow (\neg B)$ é a *inversa* de $A \rightarrow B$.

$(\neg B) \rightarrow (\neg A)$ é a *contrarecíproca* de $A \rightarrow B$.

Tabela de verdade:

A	B	A → B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional $\leftrightarrow$. $A \leftrightarrow B$ traduz "A sse B (A se, e só se, B)", "A é equivalente a B", "A é condição necessária e suficiente para B", "A desde que B", "A a menos que ¬B", "A a não ser que ¬B", ...

Tabela de verdade:

A	B	A ↔ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Linguagem do Cálculo Proposicional

- **Letras Proposicionais**: A, B, ...
- **Conectivos**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- **Parenteses**: (,).

Regras para fazer fórmulas:

1. Se A é uma letra proposicional então A é uma fórmula.
2. Se A e B são fórmulas então cada uma das seguintes expressões também é uma fórmula:

$$(\neg A)\,,\,(A \wedge B)\,,\,(A \vee B)\,,\,(A \rightarrow B)\,,\,(A \leftrightarrow B).$$

3. Nada mais é fórmula.

Convenção dos Parenteses. Ordem pela qual se aplicam os conectivos: $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ (mesmo nível de prioridade), $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

2.1.2 Argumentos

Tautologia é uma fórmula cuja tabela de verdade só apresenta o valor V.

Exemplo: $A \vee \neg A$.

Contradição é uma fórmula cuja tabela de verdade só apresenta o valor F.

Exemplo: $A \wedge \neg A$.
P **implica tautologicamente** Q se $P \to Q$ é uma tautologia. Escreve-se $P \Rightarrow Q$.

Exemplo: $P \Rightarrow P \vee Q$.
P **é tautologicamente equivalente** a Q se $P \leftrightarrow Q$ é tautologia. Escreve-se $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplo: $P \Leftrightarrow P \wedge P$.
$P_1, ..., P_n$ **implicam tautologicamente** Q se $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$ é tautologia.
Teorema: $P_1, ..., P_n$ implicam tautologicamente Q sse quando os valores de verdade de $P_1, ..., P_n$ são todos V, o de Q também é V.
Argumento é um conjunto de premissas—$P_1, ..., P_n$— e uma conclusão, Q. O argumento é **válido** se

$$P_1, ..., P_n \Rightarrow Q$$

isto é, se $P_1, ..., P_n$ implicam tautologicamente Q.

Para estabelecer a validade de um argumento recorremos a uma demonstração (ou prova). Um **contra-exemplo** mostra que um dado argumento não é válido. Um contra-exemplo é uma atribuição de valores de verdade às letras proposicionais de forma a que as premissas sejam todas V e a conclusão seja F.

Para construir demonstrações necessitamos de **regras de inferência**.
Regra da Tautologia—T Uma fórmula Q pode deduzir-se das fórmulas $P_1, ..., P_n$ se $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$.

Em particular, se Q é uma tautologia, Q pode deduzir-se do conjunto vazio.

Alguns casos particulares que saem desta regra (ver também lista das tautologias úteis):
R1 $P, P \to Q$, conclusão: Q.
R2 $\neg Q, P \to Q$, conclusão: $\neg P$.
R3 $\neg P, P \vee Q$, conclusão: Q.
R4 $\neg(\neg P)$, conclusão: P. P, conclusão: $\neg(\neg P)$.
Demonstração formal (versão 1) de Q com premissas $P_1, ..., P_n$ é uma sequência finita de fórmulas $R_1, ..., R_m$, tal que $R_m = Q$, e R_i é uma premissa ou se pode deduzir dos R_j's anteriores usando uma regra de inferência.

Notação:

$$P_1, ..., P_n \vdash Q.$$

Regra das Premissas—P Uma premissa pode ocorrer em qualquer linha de uma prova.

Nota: De uma "regra de inferência" falsa (ie, que não preserve a verdade) pode deduzir-se uma contradição. De uma contradição tudo se pode deduzir.

Regra da Prova Condicional—PC Se Q se pode deduzir de P e de um conjunto de premissas Γ, então $P \to Q$ pode deduzir-se de Γ. Isto é, se $\Gamma, P \vdash Q$ então $\Gamma \vdash P \to Q$.
Prova formal (versão 2) de Q a partir das premissas $P_1, ..., P_n$ é uma sequência finita de pares ordenados $(\alpha_1, R_1), ..., (\alpha_m, R_m)$ onde cada α_i é um conjunto de fórmulas e cada R_i é uma fórmula, verificando:

1. $\alpha_m \subset \{P_1, ..., P_n\}$, $R_m = Q$.
2. Cada R_i é uma premissa original ou pode ser deduzida das R_j's anteriores usando uma regra de inferência.
3. Se R_i é uma premissa então $\alpha_i = \{R_i\}$.
4. Se R_i se deduz das anteriores R_j's usando uma regra de inferência então α_i é definido pela regra (α_i é o conjunto de fórmulas de que R_i depende).

Regra da Prova Indirecta—PI Se $Q \wedge \neg Q$ se pode deduzir de um conjunto de premissas Γ e de $\neg P$ então P pode deduzir-se de Γ.
Em símbolos: Se $\neg P, \Gamma \vdash Q \wedge \neg Q$ então $\Gamma \vdash P$.
Cábula Útil para fazer demonstrações:

1. Para provar $P \wedge Q$ provar separadamente P e Q e usar
$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$
2. Para provar $P \to Q$ usar P como premissa, deduzir Q e usar a regra PC.
3. Para provar $P \vee Q$
   (a) Provar P e usar $P \vdash P \vee Q$ ou provar Q e usar $Q \vdash P \vee Q$.
   (b) Tomar $\neg P$ como premissa, deduzir Q, usar regra PC para obter $\neg P \to Q$. Usar depois
$$\neg P \to Q \vdash P \vee Q.$$
4. Para provar $P \leftrightarrow Q$ provar $P \to Q$ e $Q \to P$ e usar
$$P \to Q, Q \to P \vdash P \leftrightarrow Q.$$

se estas falharem...

5. Prova indirecta: Para provar P tomar $\neg P$ como premissa e tentar deduzir uma contradição.

6. (a) Para provar P tente-se encontrar uma fórmula Q tal que se deduzam $Q \to P$ e $\neg Q \to P$. Depois usar a regra

$$Q \to P, \neg Q \to P \vdash P.$$

   (b) Para provar R a partir de $P \vee Q$ provar $P \to R$ e $Q \to R$ e usar a regra correspondente à tautologia 8 para obter $P \vee Q \to R$.

2.1.3 Tautologias Úteis

1. (Modus Ponens)

$$P \wedge (P \to Q) \to Q$$

2. (Modus Tollendo Tollens)

$$\neg Q \wedge (P \to Q) \to \neg P$$

3. (Modus Tollendo Ponens)

$$\neg P \wedge (P \vee Q) \to Q$$

4. (Simplificação)

$$P \wedge Q \to P$$

5. (Adição)

$$P \to P \vee Q$$

6. (Adjunção)

$$P \to (Q \to P \wedge Q)$$
$$(P \to Q) \wedge (P \to R) \to (P \to Q \wedge R)$$

7. (Silogismo hipotético)

$$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to (P \to R)$$

8. (Hipótese Alternativa)

$$(P \to Q) \wedge (\neg P \to Q) \to Q$$
$$(P \vee Q \to R) \leftrightarrow (P \to R) \wedge (Q \to R)$$

9. (Absurdo)

$$(P \to Q \wedge \neg Q) \to \neg P$$
$$P \wedge \neg P \to Q$$

10. (Terceiro Excluído)

$$P \vee \neg P$$

11. (Contradição)

$$\neg(P \wedge \neg P)$$

12. (Comutatividade)

$$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$$
$$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$$

13. (Associatividade)

$$P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$$
$$P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$$

14. (Distributividade)

$$P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

15. (De Morgan)

$$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$$

16. (Dupla Negação)

$$\neg(\neg P) \leftrightarrow P$$

17. (Regras para o Condicional)

$$(P \to Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$$
$$\neg(P \to Q) \leftrightarrow P \wedge \neg Q$$

18. (Regras para o Bicondicional)

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

19. (Idempotência)

$$P \vee P \leftrightarrow P$$
$$P \wedge P \leftrightarrow P$$

20. (Contrarecíproca)

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$
$$(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow \neg P)$$
$$(\neg P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow P)$$

21. (Inport-Export)

$$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$$

22. (Absorção)

$$P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$$
$$P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$$

2.2 Problemas

1. Traduza cada uma das frases para a linguagem do cálculo proposicional. [Atribua letras às proposições atómicas e use conectivos e parenteses.]

   (a) O Óscar e a Alice vão à escola.

   (b) O Óscar inscreveu-se em Lógica, mas a Alice não.

   (c) Nem o Óscar nem a Alice gostam do Pôncio.

   (d) Se o Óscar sai com a Alice então o Pôncio não.

   (e) O Óscar sai com a Alice ou o Pôncio sai com a Alice, mas não ambos.

   (f) O Óscar passa a Lógica só se estudar.

   (g) O Óscar não passa a Lógica a não ser que faça o trabalho de casa e estude.

   (h) O Óscar não passa a Lógica se não fizer o trabalho de casa nem estudar.

   (i) Não é verdade que Óscar passe a Lógica desde que faça o trabalho de casa e estude.

   (j) Uma condição suficiente para Óscar passar a Lógica é que ele estude e faça o trabalho de casa.

   (k) Se o Óscar não estudar e fizer o trabalho de casa então ele não passa a Lógica.

   (l) Se o Óscar e a Alice trabalharem a um ritmo constante então não há perda nem ganho de eficiência quando trabalham juntos.

   (m) Se perder o meu combóio chego 10 minutos atrazado, assumindo que o próximo vem à tabela.

   (n) Vamos hoje ao parque desde que o carro não se estrague e não chova.

   (o) Se Lógica é difícil o Óscar e a Alice só passam se estudarem.

   (p) Se duas rectas são complanares uma condição necessária e suficiente para serem paralelas é que não se intersectem nem coincidam.

   (q) Se Q é um quadrilátero então Q é um paralelogramo sse os seus lados opostos são paralelos e iguais.

(r) Se a função f é contínua no intervalo (a, b) então f tem um máximo em $[a, b]$ ou f não é contínua em a e b.

(s) Uma condição suficiente para a função f ter um máximo em $[a, b]$ é que f seja contínua em (a, b) e que f seja contínua em ambos a e b.

(t) Se f' está definida num intervalo (a, b), uma condição necessária e suficiente para f ser crescente em (a, b) é que f' seja positiva em (a, b).

(u) Uma condição necessária e suficiente para f' ser positiva em (a, b) é que f' esteja definida em (a, b) e f seja crescente em (a, b).

(v) Se $I = \int_a^b f(x)dx$ e A é uma aproximação de I obtida pelo método do trapézio então $A \geq I$ se $f'' > 0$ para $x \in [a, b]$.

(w) Se 3 e 4 forem substituir x e y, respectivamente, na desigualdade $2x + y < x + 3y$ obtemos a desigualdade $10 < 15$.

(x) Se v_1, v_2, v_3 são três vectores de $\mathbb{R}^3$ aplicados na origem, então o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente independente sse os três vectores estão no mesmo plano.

2. Atribua letras às proposições atómicas e traduza cada uma das seguintes frases numa fórmula lógica.

(a) Se a Alice passou a Lógica ou a Geometria então ela foi aceite na universidade.

(b) Se a Alice não passar a Lógica e a Geometria então não será aceite em Harvard nem Yale.

(c) Não é verdade que se o Óscar arranjar emprego se case com a Alice.

(d) Óscar procurará emprego se chumbar, a não ser que vá para uma escola técnica.

(e) O Óscar e a Alice acabam a licenciatura só se passarem a Lógica.

(f) Uma condição necessária e suficiente para que três pontos A, B, C estejam na mesma recta é que a distância de A a C seja a soma da distância de A a B com a distância de B a C.

(g) Se f é contínua e diferenciável em $[a, b]$, então há uma tangente horizontal ao gráfico de f entre a e b ou $f(a)$ e $f(b)$ não se anulam simultaneamente.

(h) Uma condição necessária para f ser contínua em $x = a$ é que $f(a)$ esteja definido e $\lim_{x\to a} f(x)$ exista.

(i) Se x é um número inteiro então exactamente um número de entre x e $x+1$ é par.

(j) Se f é contínua mas não integrável em (a, b) então f não está definida simultanemante em a e b.

(k) Se A é uma proposição falsa então a proposição condicional $A \to B$ tem a forma $F \to V$ ou $F \to F$, conforme B é verdadeira ou falsa, respectivamente.

(l) Se f é uma função e f tem derivadas contínuas $f^{(n)}$ numa vizinhança de 0, V, para $n = 0, 1, 2, \ldots$ então

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad \text{para} \quad x \in V$$

sse o resto, $R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ converge para zero quando n cresce sem limite.

3. Determine a recíproca, inversa e contra-recíproca de cada uma das seguintes proposições condicionais.

(a) Se v é paralelo a w então $|v \cdot w| = \|v\|\|w\|$.

(b) Duas rectas intersectam-se se não são paralelas.

(c) Se o Óscar se licenciar ele vai procurar emprego ou inscrever-se num curso de mestrado.

(d) Se a Alice se licenciar e se inscrever num curso de mestrado então a sua licenciatura não é de Matemática.

(e) Se a Alice se licenciar com boa média a Matemática ela vai ter uma bolsa para se inscrever num curso de mestrado.

(f) Passar a Álgebra é uma condição necessária para o Belo se licenciar.

(g) Uma condição suficiente para um triângulo satisfazer o Teorema de Pitágoras é ser um triângulo rectângulo.

(h) Uma condição necessária para dois triângulos serem semelhantes é que tenham lados iguais.

(i) Um triângulo é equilátero só se os seus três ângulos são iguais ou os seus três lados são iguais.

(j) Três pontos estão sobre a mesma circunferência sse não forem colineares.

4. Determine a tabela de verdade de cada uma das fórmulas seguintes.

   (a) $A \to (B \to \neg A)$
   (b) $(A \wedge B \to C) \leftrightarrow (A \to C) \vee (B \to C)$
   (c) $A \vee \neg B \to C \wedge \neg A$
   (d) $A \wedge \neg A \to B \wedge \neg C$
   (e) $(A \wedge \neg B \wedge C \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge \neg C \wedge \neg D)$

5. Mostre que cada um dos seguintes pares de fórmulas partilham a mesma tabela de verdade.

   (a) $A \vee (A \wedge B)$, A
   (b) $A \wedge (A \vee B)$, A
   (c) $A \leftrightarrow B$, $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
   (d) $\neg(A \wedge B)$, $\neg A \vee \neg B$
   (e) $A \to B$, $\neg A \vee B$
   (f) $\neg(A \to B)$, $A \wedge \neg B$
   (g) $A \to (B \to C)$, $A \wedge B \to C$
   (h) $A \vee B \to C$, $(A \to C) \wedge (B \to C)$

6. Construa uma árvore a partir de letras proposicionais para cada uma das seguintes fórmulas.

   (a) $A \to (B \to \neg A)$
   (b) $\neg A \wedge B \leftrightarrow (B \to C \vee A)$
   (c) $A \vee \neg B \to (\neg(C \wedge B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B)$
   (d) $A \wedge (B \vee \neg C) \to A \wedge (D \to C)$
   (e) $\neg(A \wedge (B \leftrightarrow C)) \vee D \to C \wedge \neg D$

3 Argumentos

Tautologias. Regra para tautologias. Regra para as premissas. Regra da implicação. Prova indirecta.

3.1 Notas

3.1.1 Argumentos

Tautologia é uma fórmula cuja tabela de verdade só apresenta o valor V.

Exemplo: $A \vee \neg A$.

Contradição é uma fórmula cuja tabela de verdade só apresenta o valor F.

Exemplo: $A \wedge \neg A$.

P **implica tautologicamente** Q se $P \to Q$ é uma tautologia. Escreve-se $P \Rightarrow Q$.

Exemplo: $P \Rightarrow P \vee Q$.

P **é tautologicamente equivalente** a Q se $P \leftrightarrow Q$ é tautologia. Escreve-se $P \Leftrightarrow Q$.

Exemplo: $P \Leftrightarrow P \wedge P$.

$P_1, ..., P_n$ **implicam tautologicamente** Q se $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \to Q$ é tautologia.

Teorema: $P_1, ..., P_n$ implicam tautologicamente Q sse quando os valores de verdade de $P_1, ..., P_n$ são todos V, o de Q também é V.

Argumento é um conjunto de premissas—$P_1, ..., P_n$— e uma conclusão, Q. O argumento é **válido** se

$$P_1, ..., P_n \Rightarrow Q$$

isto é, se $P_1, ..., P_n$ implicam tautologicamente Q.

Para estabelecer a validade de um argumento recorremos a uma demonstração (ou prova). Um **contra-exemplo** mostra que um dado argumento não é válido. Um contra-exemplo é uma atribuição de valores de verdade às letras proposicionais de forma a que as premissas sejam todas V e a conclusão seja F.

Para construir demonstrações necessitamos de **regras de inferência**.

Regra da Tautologia—T Uma fórmula Q pode deduzir-se das fórmulas $P_1, ..., P_n$ se $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \Rightarrow Q$.

Em particular, se Q é uma tautologia, Q pode deduzir-se do conjunto vazio.

Alguns casos particulares que saem desta regra (ver também lista das tautologias úteis):

R1 $P, P \to Q$, conclusão: Q.

R2 $\neg Q, P \to Q$, conclusão: $\neg P$.

R3 $\neg P, P \vee Q$, conclusão: Q.
R4 $\neg(\neg P)$, conclusão: P. P, conclusão: $\neg(\neg P)$.
Demonstração formal (versão 1) de Q com premissas $P_1, ..., P_n$ é uma sequência finita de fórmulas $R_1, ..., R_m$, tal que $R_m = Q$, e R_i é uma premissa ou se pode deduzir dos R_j's anteriores usando uma regra de inferência.

Notação:

$$P_1, ..., P_n \vdash Q.$$

Regra das Premissas—P Uma premissa pode ocorrer em qualquer linha de uma prova.

Nota: De uma "regra de inferência" falsa (ie, que não preserve a verdade) pode deduzir-se uma contradição. De uma contradição tudo se pode deduzir.
Regra da Prova Condicional—PC Se Q se pode deduzir de P e de um conjunto de premissas Γ, então $P \rightarrow Q$ pode deduzir-se de Γ. Isto é, se $\Gamma, P \vdash Q$ então $\Gamma \vdash P \rightarrow Q$.
Prova formal (versão 2) de Q a partir das premissas $P_1, ..., P_n$ é uma sequência finita de pares ordenados $(\alpha_1, R_1), ..., (\alpha_m, R_m)$ onde cada α_i é um conjunto de fórmulas e cada R_i é uma fórmula, verificando:

1. $\alpha_m \subset \{P_1, ..., P_n\}$, $R_m = Q$.

2. Cada R_i é uma premissa original ou pode ser deduzida das R_j's anteriores usando uma regra de inferência.

3. Se R_i é uma premissa então $\alpha_i = \{R_i\}$.

4. Se R_i se deduz das anteriores R_j's usando uma regra de inferência então α_i é definido pela regra (α_i é o conjunto de fórmulas de que R_i depende).

Regra da Prova Indirecta—PI Se $Q \wedge \neg Q$ se pode deduzir de um conjunto de premissas Γ e de $\neg P$ então P pode deduzir-se de Γ.

Em símbolos: Se $\neg P, \Gamma \vdash Q \wedge \neg Q$ então $\Gamma \vdash P$.
Cábula Útil para fazer demonstrações:

1. Para provar $P \wedge Q$ provar separadamente P e Q e usar

$$P, Q \vdash P \wedge Q.$$

2. Para provar $P \rightarrow Q$ usar P como premissa, deduzir Q e usar a regra PC.

3. Para provar $P \vee Q$

(a) Provar P e usar $P \vdash P \vee Q$ ou provar Q e usar $Q \vdash P \vee Q$.

(b) Tomar $\neg P$ como premissa, deduzir Q, usar regra PC para obter $\neg P \to Q$. Usar depois

$$\neg P \to Q \vdash P \vee Q.$$

4. Para provar $P \leftrightarrow Q$ provar $P \to Q$ e $Q \to P$ e usar

$$P \to Q, Q \to P \vdash P \leftrightarrow Q.$$

se estas falharem...

5. Prova indirecta: Para provar P tomar $\neg P$ como premissa e tentar deduzir uma contradição.

6. (a) Para provar P tente-se encontrar uma fórmula Q tal que se deduzam $Q \to P$ e $\neg Q \to P$. Depois usar a regra

$$Q \to P, \neg Q \to P \vdash P.$$

(b) Para provar R a partir de $P \vee Q$ provar $P \to R$ e $Q \to R$ e usar a regra correspondente à tautologia 8 para obter $P \vee Q \to R$.

3.2 Problemas

A. Para cada um dos seguintes pares de frases, use tabelas de verdade para decidir se se tem

   i) **(a)** $\Rightarrow$ **(b)**,
   ii) **(b)** $\Rightarrow$ **(a)**,
   iii) **(a)** $\Leftrightarrow$ **(b)**,
   iv) nenhuma das anteriores.

   1. **(a)** $A \to (B \to \neg C)$, **(b)** $A \to (\neg B \to C)$.
   2. **(a)** $A \wedge B \to \neg C$, **(b)** $A \to (C \to \neg B)$.
   3. **(a)** $(A \wedge B) \wedge \neg C$, **(b)** $C \to (B \to A)$
   4. **(a)** A, **(b)** $A \vee (B \wedge C)$.
   5. **(a)** A, **(b)** $(A \wedge B) \vee C$.
   6. **(a)** $A \vee B \vee C$, **(b)** $A \vee (\neg A \wedge B) \vee (\neg B \wedge C) \vee \neg C$.
   7. **(a)** $(A \vee B) \wedge C$, **(b)** $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge C$.
   8. **(a)** $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$, **(b)** $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$.
   9. **(a)** $A \wedge B \wedge C$, **(b)** $(A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg C) \wedge (C \vee \neg A)$.
   10. **(a)** $(A \to B) \vee C$, **(b)** $(A \leftrightarrow B) \wedge C$
   11. **(a)** $(A \to B) \to C$, **(b)** $A \to (B \to C)$.
   12. **(a)** $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$, **(b)** $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$.

B. Cada uma das seguintes fórmulas é uma tautologia que se obtém por intermédio de uma substituição numa das tautologias úteis que listámos. Em cada caso identifique a tautologia utilizada e a correspondente substituição.

   1. $(A \vee B) \vee (C \wedge D) \leftrightarrow (A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee D)$.
   2. $\neg A \wedge (\neg A \to B \vee C) \to B \vee C$.
   3. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee (\neg B \wedge C))$.
   4. $(A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge C) \leftrightarrow A \wedge B$.
   5. $(A \wedge B \wedge C \to D \wedge \neg D) \to \neg(A \wedge B \wedge C)$.
   6. $A \wedge \neg A \to A \vee \neg A$.
   7. $(A \wedge \neg A) \vee \neg(A \wedge \neg A)$.

8. $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \wedge (C \vee \neg C)$.
9. $\neg(A \vee \neg B \vee C) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg(\neg B \vee C)$.
10. $(A \wedge B \rightarrow C \vee D) \leftrightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C \vee D))$.

C. Traduza cada um dos argumentos seguintes para notação lógica, usando as letras sugeridas para as proposições atómicas. Decida sobre a validade de cada um usando tabelas de verdade.

1. Se o Óscar está na aula então a Maria ou a Alice também. A Maria não está na aula. Logo a Alice está na aula se o Óscar está na aula. (O, M, A).
2. Se o Óscar está na aula a Maria também, e se a Maria está na aula o Gato também está. O Óscar está na aula a menos que o Gato esteja na aula. Logo a Maria não vai à aula. (O, M, G).
3. Se o Óscar vai à aula então a Alice vai à aula só se o Gato vai à aula. O Gato vai à aula. Logo se o Óscar vai à aula a Alice também. (O, A, G).
4. Se o Óscar e o Gato vão ambos à aula a Alice também vai. O Gato vai à aula. Logo ou a Alice vai à aula ou o Óscar não vai à aula. (O, G, A).
5. Se O Óscar e o Gato vão à aula então ou a Maria ou a Alice vai à aula. Não é verdade que ou o Óscar ou a Maria vai à aula. Logo ou o Óscar ou a Alice vai à aula. (O, G, M, A).
6. Se o Óscar e o Gato vão à aula então a Maria e a Alice também vão. Não é verdade que o Gato vá à aula só se a Alice for à aula. Logo o Óscar não vai à aula. (O, G, M, A).
7. Uma condição necessária e suficiente para o Óscar ir à aula é que a Maria ou a Alice vá à aula. Uma condição suficiente para a Alice ir à aula é que o Gato vá. Contudo, o Gato não vai à aula a não ser que a Maria vá, e a Alice vai só se o Óscar for. Logo a Alice vai à aula se e só se o Óscar for. (O, M, A, G).
8. Se o Óscar for à aula então nem a Maria nem a Alice vão. Se a Alice não for à aula então o Gato também não vai, mas se a Maria não for então o Gato vai. Logo o Óscar não vai à aula. (O, M, A, G).

D. Construa uma prova formal para cada um dos argumentos válidos do problema C. Produza contra-exemplos para os argumentos não válidos.

E. Usando tabelas de verdade decida sobre a validade dos seguintes argumentos.

1. **Premissas:** $O \to M \vee V$, M, $V \to O$
   Conclusão: O.
2. **Premissas:** $O \to (V \leftrightarrow G)$, $\neg M \to (V \wedge \neg G)$
   Conclusão: $\neg O \vee M$.
3. **Premissas:** $O \to M$, $G \to V$, $\neg M \vee \neg V$, $G \vee \neg M$
   Conclusão: $O \leftrightarrow \neg G$.
4. **Premissas:** $O \to V$, $G \to M$, $G \to O \vee \neg M$, $G \vee \neg M$, $M \vee \neg V$
   Conclusão: $O \leftrightarrow G$.
5. **Premissas:** $O \wedge G \to V$, $V \to \neg M$, $\neg J \to M$, $M \to \neg J$
   Conclusão: $G \to (O \to J)$.
6. **Premissas:** $\neg O \to \neg V$, $O \to \neg G \vee M$, $\neg M$
   Conclusão: $\neg G \vee \neg V$.
7. **Premissas:** $(M \to O) \wedge (G \to V)$, $M \vee G$, O
   Conclusão: $O \wedge V$.
8. **Premissas:** $M \vee V \to G$, $G \to V$, $O \to \neg J \vee \neg V$
   Conclusão: $O \to (M \to \neg J)$.

F. Construa uma prova formal para cada um dos argumentos válidos do problema E. Produza contra-exemplos para os argumentos não válidos.

G. Utilizando letras para as proposições atómicas, traduza cada um dos argumentos seguintes em notação lógica. Se o argumento é válido, prove-o formalmente, caso contrário exiba um contra-exemplo.

1. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$. É verdade que $a < b$, mas não se tem $a < c$. Logo $b < c$ é falso.
2. Se $a > 0$ então uma condição necessária e suficiente para $b > c$ é que $a \cdot b > a \cdot c$. É verdade que se tem $a \cdot b > a \cdot c$. Logo $b > c$.
3. Se $a > 0$ e $b > c$ então $a \cdot b > a \cdot c$, e se $a \not> 0$ mas $b > c$, então $a \cdot b \not> a \cdot c$. Logo $a > 0$ se e só se $a \cdot b > a \cdot c$.
4. Se $a < 0$ e $0 < b$, então $a < b$. Se $0 < c$ e $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$. Acontece que $a < 0$ e $0 < c$. Logo $0 < b$ só se $a \cdot c < b \cdot c$.
5. Uma condição necessária e suficiente para $b < c$ é que $-c < -b$. Além disso, se $a + (-c) \not< a + (-b)$, então $b \not< c$. Logo $b < c$ sse $a + (-c) < a + (-b)$.

6. Se $a < 0$ e $b \not< 0$ então $a \cdot b \leq 0$. Se $a \cdot b \leq 0$, então se $b < 0$ tem-se $a \not< 0$. Se $a \cdot b \not\leq 0$ então ou se tem $a < 0$ e $b < 0$, ou $a \not< 0$ e $b \not< 0$. Se $a \cdot b \leq 0$ e $b \not< 0$ então $a < 0$. Logo, uma condição necessária e suficiente para $a \cdot b \leq 0$ é que $a < 0$ sse $b \not< 0$.

7. $a < 0$ ou $b < 0$. Tem-se também que $a \cdot b \leq 0$ se $a < 0$ e $b \not< 0$ ou se $b < 0$ e $a \not< 0$. Logo, se não se tiver simultaneamente $a < 0$ e $b < 0$ então $a \cdot b \leq 0$.

8. (a) Defina-se uma função f por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 0 \\ 5 & \text{se} \quad x \not< 0 \end{cases}$$

Logo $f(x) = x$ ou $f(x) = 5$.
[Sugestão: Seja Z: $x < 0$; X: $f(x) = x$; F: $f(x) = 5$].

(b) Defina-se uma função g por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x < 2 \\ 6 & \text{se} \quad x \not< 2 \end{cases} .$$

onde $f(x)$ foi definida na alínea anterior. Assuma que $x < 0$ ou $x \not< 2$. Logo $g(x) = x$ ou $g(x) = 6$.
[Sugestão: Se Z: $x < 0$ e T: $x < 2$, então $0 \leq x < 2$ é $\neg Z \wedge T$. Seja X: $g(x) = x$; F: $g(x) = 5$; S: $g(x) = 6$].

(c) Seja g a função definida acima. Assuma que nem $g(x) = 5$ nem $g(x) = 6$. Logo $g(x) = x$.

9. Se f é contínua em $(a, b]$, então f tem um máximo em $[a, b]$ se estiver definida em a. Se f não estiver definida em a, então existe um ponto c entre a e b tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. Se existe um tal ponto c entre a e b tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$, então f tem um máximo em $[a, b]$.

   (a) Logo f tem um máximo em $[a, b]$.

   (b) Logo, se f é contínua em $(a, b]$, então f tem um máximo em $[a, b]$.

   [Use as letras C, M, D, B para as proposições atómicas].

10. Uma condição necessária para f ter um máximo em $[a, b]$ é que f seja contínua em $(a, b]$ e f esteja definida em a. Uma condição necessária e suficiente para f ter um máximo em $[a, b]$ é que exista um ponto c entre a e b tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo o $x \in [a, b]$. De facto, existe um ponto c entre a e b tal que $f(c) \geq f(x)$ para

todo o $x \in [a, b]$. Logo f é contínua em $(a, b]$ e f está definida em a. [Use as letras do problema 9].

11. Se x é substituído por um e dois na desigualdade $x^2 + 1 > x + 1$, obtemos $2 > 2$ e $5 > 3$, respectivamente. Contudo $2 \not> 2$, mas $5 > 3$. Logo não substituímos x por um na desigualdade $x^2 + 1 > x + 1$, mas sim por dois. [Use as letras A, B, C: $2 > 2$, e D: $5 > 3$ para as proposições atómicas].

12. Se x é substituído por um e dois na desigualdade $x^2 + 1 > x + 1$, obtemos $2 > 2$ e $5 > 3$, respectivamente. Contudo não se tem $2 > 2$ mas $5 > 3$. Logo não substituímos x por um e por dois na desigualdade $x^2 + 1 > x + 1$. [Use as letras do problema 11].

H. Dê uma prova formal de cada um dos argumentos válidos seguintes.

1. **Premissas:** $A \to (B \to C)$, $C \to \neg D$, $\neg E \to D$
   Conclusão: $B \to (A \to E)$.
2. **Premissas:** $A \vee B$, $C \to \neg A$, $B \to D$, $C \to \neg D$
   Conclusão: $\neg C$.
3. **Premissas:** $(A \vee B) \vee C$, $A \to (D \leftrightarrow \neg E)$, $B \to \neg(\neg D \vee E)$, $E \to \neg(C \vee D)$, $\neg E \to C \wedge D$
   Conclusão: $D \leftrightarrow \neg E$.
4. **Premissas:** $(A \to B) \vee (A \wedge \neg C)$, A, $C \to \neg B$, $\neg C \to B$
   Conclusão: $\neg C$.
5. **Premissas:** $(A \to B) \wedge (C \to \neg D)$, $(E \to \neg B) \wedge (\neg F \to D)$, $\neg E \vee F \to G$, $\neg B \to D$, $A \vee C$
   Conclusão: $B \wedge G$.
6. **Premissas:** $A \wedge C \to D$, $B \wedge C \to D$, $\neg A \wedge \neg B \to E \vee F$, $G \to \neg E$, $F \to H$, $C \wedge \neg D$
   Conclusão: $\neg G \vee H$.
7. **Premissas:** $A \wedge (B \vee C)$, $A \wedge B \to D \wedge \neg F$, $A \to (C \to \neg(D \vee \neg F))$
   Conclusão: $D \leftrightarrow \neg F$.
8. **Premissas:** $A \wedge B \to C$, $A \vee E$, $G \to (\neg C \wedge \neg D)$, $A \leftrightarrow B$, $A \to C$, $C \to \neg D$, $B \to D$
   Conclusão: $\neg A \wedge (G \to E)$.
9. **Premissas:** $\neg A \to C \vee D$, $B \to E \wedge F$, $E \to D$, $\neg D$
   Conclusão: $(A \to B) \to C$.

10. **Premissas:** $A \to B$, $C \to \neg B$, $\neg C \to D$, $A \wedge \neg D$
Conclusão: $E \to F$.
11. **Premissas:** $B \to A$, $\neg A \vee C$, $C \to D \vee E$, $D \to F \wedge \neg B$, $E \to \neg A \wedge F$, $F \to A$, $\neg B \vee G \to H \wedge I$, $H \to B$
Conclusão: $H \wedge \neg H$.
12. **Premissas:** $A \to (B \to C)$, $\neg A \to D \wedge \neg E$, $A \wedge B \to \neg C$, $D \to F \vee G$, $\neg B \to (G \to H)$, $E \vee (H \vee \neg G)$
Conclusão: $G \to H$.

4 Premissas

Consistência. Jogos lógicos.

4.1 Notas

4.1.1 Consistência

Consistente é um conjunto de premissas, Γ, do qual não é possível deduzir uma contradição. Isto é $\Gamma \nvdash Q \wedge \neg Q$.

Γ é consistente sse existe uma fórmula P tal que $\Gamma \nvdash P$.

Γ é consistente sse é possível atribuir valores de verdade às proposições atómicas de forma a que todas as proposições de Γ sejam simultaneamente verdadeiras.

4.1.2 Puzzles

Para resolver puzzles lógicos basta, muitas vezes, eliminar os casos que levam a deduzir contradições. Trata-se portanto de estudar a consistência de um ou mais conjuntos de proposições.

4.2 Problemas

A. Para cada um dos conjuntos de premissas seguintes atribua letras às proposições atómicas para traduzir para a linguagem do cálculo proposicional.

Decida sobre a consistência de cada um. Em caso de consistência atribua valores de verdade às proposições atómicas de forma a que as premissas sejam todas verdadeiras; caso contrário deduza formalmente uma contradição.

1. Se o Óscar estudar passa a Lógica. Se não estudar também passa. Contudo o Óscar não passa a Lógica.
2. Se o Óscar estudar ele passa a Lógica ou a Matemática. Contudo, o Óscar não estuda, mas passa a Lógica ou a Matemática.
3. Se a Maria estudar e o Óscar não a distrair, a Maria passa a Lógica e a Matemática. O Óscar não distrai a Maria. Contudo, a Maria chumba a matemática.
4. Se o Óscar estudar ele acaba o curso este semestre ou no próximo. Se acabar este semestre ele vai fazer um mestrado. Se acabar no próximo ele não vai fazer um mestrado. O Óscar estuda.
5. Se a Maria estudar ela vai acabar o curso. Se ela acabar o curso vai fazer um mestrado e casar-se. Se for fazer um mestrado a Maria não terá filhos este ano, mas se se casar então terá filhos este ano. A Maria não estuda mas acaba o curso.
6. A Maria acaba o curso a menos que se case. A Maria vai trabalhar se e só se se casar. Se ela for trabalhar então não pode ajudar a Ana nos trabalhos de casa. Se a Maria não ajudar a Ana nos trabalhos de casa, a Ana não acaba o curso. A Maria acaba o curso se e só se a Ana não acabar.
7. Se o Óscar estudar para o exame então ele não vai às docas na sexta-feira. Se o Óscar não estudar para o exame então ele não acaba o curso. Se ele não acabar o curso então não arranja emprego. Se o Óscar não for às docas na sexta-feira ele não encontrará a Ana. Contudo o Óscar arranja emprego e encontra a Ana.
8. Se o Óscar e a Alice têm a mesma idade então o Jorge e a Maria não têm a mesma idade. O Óscar e a Alice têm a mesma idade ou o Óscar é mais velho que a Alice. Se o Óscar é mais velho que

a Alice então ele é mais velho que a Maria. Não é verdade que se o Jorge e a Maria tiverem a mesma idade então o Óscar é mais velho que a Maria.

9. Se o Óscar e o Jorge acabarem os seus cursos, então um deles vai arranjar emprego. Se o Óscar arranjar emprego então o Jorge não. Se o Jorge acabar o curso então o Óscar não. Nenhum deles acabou o respectivo curso, mas um deles arranjou emprego.

10. Se o Óscar acabar o curso então o Jorge e a Alice também. Se o Óscar não acabar o curso então o Jorge acaba o curso e arranja um emprego. Se o Jorge acabar o curso então, se arranjar emprego, a Alice também arranja emprego. Se a Alice acabar o curso então o Jorge arranja emprego. Se a Alice arranjar emprego então o Jorge não acaba o curso.

11. Se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$. Se $a < b$ e $b \not< c$ então $a \not< c$. Se $a \not< b$ e $b < c$ então $a < c$. Contudo, $a < c$ sse $a < b$ e $b < c$ ou $a \not< b$.

12. Se $a < b$, então $b < c$ só se $a < c$. Se $a < b$ e $a < c$, então $b < c$ ou $b \not< c$. Se $b < c$ então $a \not< b$. Contudo, $b < c$ a não ser que $a \not< c$.

    Nos exercícios seguintes considere uma frase do tipo "P é verdadeira" uma proposição atómica.

13. Se a proposição condicional $A \to B$ é falsa então A é verdadeira e B é falsa. A proposição condicional $A \to B$ é falsa.

14. Uma condição necessária e suficiente para a proposição condicional $A \to B$ ser verdadeira é que ambas A e B sejam verdadeiras. Uma condição suficiente para B ser falsa é que A seja verdadeira. Uma condição necessária para a proposição condicional $A \to B$ ser verdadeira é que A seja verdadeira. Contudo, a proposição condicional $A \to B$ é falsa.

15. Se A é falsa a proposição condicional $A \to B$ é da forma $F \to V$ ou $F \to F$, conforme B é verdadeira ou falsa, respectivamente. A proposição condicional $A \to B$ é da forma $F \to V$ se B é verdadeira e A é falsa, mas nem B é verdadeira nem $A \to B$ é da forma $F \to F$.

16. Se A é verdadeira, a proposição condicional $A \to B$ é da forma $V \to V$ se B é verdadeira, e da forma $V \to F$ se B é falsa. Se B é falsa $A \to B$ é falsa. Contudo, $A \to B$ não é da forma $V \to V$, e é verdadeira.

17. Se A é falsa a proposição condicional $A \to B$ é verdadeira, e se A é verdadeira a proposição condicional $A \to B$ é verdadeira se B for verdadeira. Uma condição suficiente para $A \to B$ ser verdadeira é que A seja verdadeira e B seja falsa. Contudo, a proposição condicional $A \to B$ é falsa.

18. Se a função f é contínua no intervalo (a, b), então f tem um máximo e um mínimo em $[a, b]$ desde que f seja contínua em a e b. A função f não tem um máximo em $[a, b]$ só se f não for contínua em (a, b); f não tem um mínimo em $[a, b]$ só se f não for contínua em a. Se f tem um máximo em $[a, b]$ então f é contínua em b, mas se f tem um mínimo em $[a, b]$ então f não é contínua em b. Neste caso f é contínua em (a, b).

19. A função f é contínua em (a, b), f é contínua em a e b, e f tem um máximo em $[a, b]$, mas não tem mínimo em $[a, b]$. Se f é contínua em (a, b), então f tem um máximo e um mínimo em $[a, b]$ ou f não é contínua simultaneamente em a e b.

20. Se f é contínua em (a, b), então f tem um máximo em $[a, b]$ se f é contínua em a, e f tem um mínimo em $[a, b]$ se f é contínua em b. Se f tem um máximo em $[a, b]$, então f não é contínua em b. Se f é contínua em (a, b) então f é contínua em a e b. Se f tem um máximo em $[a, b]$ ou f não tem um mínimo em $[a, b]$, então f é contínua em (a, b). Se f é contínua em a ou se f não tem um máximo em $[a, b]$, então f é contínua em (a, b).

B. Decida sobre a consistência dos seguintes conjuntos de premissas. Fundamente as suas respostas, isto é, no caso de consistência atribua valores de verdade às proposições atómicas que tornem todas as premissas verdadeiras, no caso de inconsistência deduza uma contradição ou use tabelas de verdade para mostrar que as premissas não podem ser simultaneamente verdadeiras.

1. $A \wedge B$, $A \wedge \neg C$
2. $A \to B \wedge \neg C$, $A \wedge \neg B$
3. $A \vee B \to \neg C$, $A \wedge C$
4. $A \to B \vee C$, $A \wedge \neg B$
5. $A \to B$, $C \to \neg B$, $\neg C \to D$, $A \wedge \neg D$
6. $A \to (B \to C)$, $\neg D \to B$, $C \to D$, $C \to \neg A$, A
7. $A \to (B \leftrightarrow C)$, $B \to D$, $B \vee C \to \neg D$, $A \wedge \neg D$

8. $A \vee \neg(B \vee \neg C)$, $A \to D$, $\neg(A \wedge D)$, $B \to D$, $B \to C$
9. $A \leftrightarrow B \vee C$, $A \vee \neg D$, $\neg B \vee D$, $C \vee \neg D$, $B \leftrightarrow \neg A$
10. $A \leftrightarrow B \vee C$, $B \leftrightarrow \neg A$, $B \vee D$, $\neg C \vee \neg D$
11. $(A \vee B) \vee C$, $A \to (D \leftrightarrow \neg E)$, $\neg(\neg D \vee E)$, $E \to \neg(C \vee D)$, $\neg E \to C \wedge D$, $D \leftrightarrow \neg E$
12. $A \wedge B \to C$, $A \vee E$, $G \to (\neg C \wedge \neg D)$, $A \leftrightarrow B$, $A \to C$, $C \to \neg D$, $B \to D$, $A \vee (G \wedge \neg E)$
13. $A \to C$, $A \vee \neg B$, $C \to D \vee E$, $D \to F \wedge \neg B$, $E \to \neg A \wedge F$, $A \vee \neg F$, $\neg B \vee G \to H \wedge I$, $H \to B$
14. $A \wedge C \to D$, $B \wedge C \to D$, $\neg(A \vee B) \to E \vee F$, $G \to \neg E$, $\neg F \vee H$, $C \wedge \neg D$, $G \to H$
15. $A \to (B \to C)$, $\neg A \to D \wedge \neg E$, $A \wedge B \to \neg C$, $D \to F \vee G$, $B \vee (G \to H)$, $G \to E \vee H$, $G \wedge \neg H$

C. Num julgamento, quatro testemunhas—**A**rtur Jorge, **B**elmiro de Azevedo, **C**assius Clay e **D**esdémona— prestam declarações.

i) Determine, em cada caso, se os testemunhos são consistentes.

ii) Se os inocentes falam verdade e os culpados mentem, determine, se possível, quem é culpado e quem é inocente.

1. **A**rtur: O Belmiro ou o Cassius é culpado, mas eu estou inocente.

   Belmiro: Se a Desdémona é culpada então todos os outros somos inocentes.

   Cassius: Se o Belmiro é culpado eu sou inocente.

   Desdémona: O Artur ou o Belmiro é inocente.

2. **A**rtur: Se o Belmiro ou o Cassius é inocente então eu também sou.

   Belmiro: o Artur é culpado, e o Cassius ou a Desdémona também.

   Cassius: Se o Belmiro é inocente então a Desdémona é culpada.

   Desdémona: Se o Belmiro é culpado então o Cassius é inocente; contudo, o Belmiro está inocente.

3. **A**rtur: Das duas, uma: ou o Belmiro é culpado e o Cassius é inocente ou o Belmiro é inocente e o Cassius é culpado.

   Belmiro: Se o Artur ou a Desdémona é inocente, então o Cassius tmabém é.

Cassius: O Artur ou o Belmiro é culpado, mas eu sou inocente.

Desdémona: O Belmiro está inocente ou o Cassius é culpado se e só se o Belmiro está inocente e o Cassisus é culpado.

4. **A**rtur: Ou eu sou inocente ou a Desdémona é culpada.

   Belmiro: Se o Cassius é culpado então a Desdémona está inocente.

   Cassius: Se eu sou inocente então o Belmiro é culpado.

   Desdémona: Se o Artur está inocente então o Belmiro também.

5. **A**rtur: A Desdémona está inocente ou o Belmiro é culpado.

   Belmiro: O Cassius é inocente ou a Desdémona é culpada.

   Cassius: O Artur está inocente ou ou a Desdémona é culpada, e o Belmiro está inocente se e só se o Artur é culpado.

   Desdémona: o Artur está inocente se e só se ou o Belmiro ou o Cassius é inocente.

D. Quatro pessoas—**A**moruso, **B**ette Davis, **C**antona, **D**rulovic—têm quatro profissões: **L**adrão, **P**escador, **T**reinador de leões, **V**endedor de enciclopédias.

   i) Determine se as seguintes afirmações são consistentes. ii) Em caso afirmativo as profissão de cada um pode ser determinada de forma única?

   1. (a) V não é B nem C.
      (b) A não é P nem V.
      (c) B é V ou T.
      (d) C é V ou L.
   2. (a) P não é A nem B.
      (b) T não é A nem D.
      (c) V não é A nem C.
      (d) B é V ou L.
   3. (a) T não é A nem D.
      (b) V não é A nem B.
      (c) B é L ou P.
      (d) C é V ou L.
   4. (a) A não é L.
      (b) B não é P.

(c) C não é T.
(d) D não é V.
(e) V não é A nem B.
(f) L não é C nem D.
(g) T não é A nem D.

5. (a) L não é A nem D.
   (b) P não é B nem C.
   (c) T não é B nem C.
   (d) V não é C nem D.

E. Estamos na ilha FaVe, cujos habitantes são de dois tipos—mentirosos (**Fas**) e verdadeiros (**Ves**). Os mentirosos mentem sempre, os verdadeiros nunca mentem.

1. Encontramos três nativos—R, S, T—que dizem o seguinte:
   (a) R: Somos todos Ves.
   S: Exactamente um de nós é um Ve.
   T: Exactamente dois de nós são Ves.
   (b) R: Nenhum de nós é Ve.
   S: Exactamente um de nós é Ve.
   (c) R: S e T são do mesmo tipo.
   S: Eu e T somos Ves.
   T: S é Fa.
   (d) R: S e T são Fas.
   S: R é Ve.
   T: R é Ve.
   (e) R: S e T não são do mesmo tipo.
   S: R é um Ve.
   T: R é um Ve.

   Pode determinar-se, em cada caso, o tipo de cada pessoa? Justifique.

2. De novo em FaVe encontrmos três nativos—U, V, W— e perguntamos-lhes: *Quantos de vós sois Ves?* A primeira pessoa a responder, U, fá-lo na sua língua, que nós não entendemos. Depois...
   (a) V: U disse "Exactamente um de nós é um Ve".
   W: Não acreditem em V, V é um Fa.

(b) V: U disse "Exactamente um de nós é um Ve".
W: V disse a verdade.

(c) V: U disse "Todos somos Ves".
W: Isso é mentira, V é um Fa.

(d) V: U disse "Nenhum de nós é um Ve".
W: Se V mentiu então U é um Ve.

(e) V: U disse "V e W são Ves".
W: V não disse a verdade.

Em cada caso decida se o tipo de V e de W podem ser determinados de forma única.

3. Uma mutação genética aconteceu em FaVe: nasceu uma criança, o Sinão, que mente e diz a verdade alternadamente. Nunca se sabe se a sua primeira frase é falsa ou verdadeira.

(a) Encontramos três crianças na ilha—X, Y e Z—e sabemos que uma delas é o Sinão, outra é um Ve e a outra um Fa, mas não sabemos qual é qual. X diz três frases

X: Eu sou o Sinão.

X: Y é um Fa.

X: Z é um Ve.

Pode determinar-se o tipo de cada criança?

(b) O Sinão tem três irmãos—i1, i2, i3. Em cada sequência de frases cada uma destas crianças mente exactamente uma vez, mas não sabemos de antemão quando estão a mentir. Um dia as bolachas não estavam na caixa habitual...Os testemunhos foram os seguintes.

i1: · i1 e i2 roubaram bolachas.
· O Sinão também roubou bolachas, mas eu não.

i2: · Eu não roubei nenhuma bolacha, mas o Sinão roubou.
· i1 roubou algumas bolachas.

i3: · i2 roubou algumas bolachas mas o i3 não.
· Eu não roubei nenhuma bolacha.

Pode determinar-se quais as crianças que assaltaram a caixa das bolachas?

(c) Sobre um dia escolar do Sinão os seus irmãos disserem o seguinte.

i1: · Foi à aula de Matemática.

· Não foi à aula de História.
· Não foi à aula de Biologia.

i2: · Foi à aula de História.
· Foi à aula de Inglês.
· Não foi à aula de Matemática.

i3: · Foi à aula de Matemática.
· Foi à aula de História.
· Não foi à aula de Inglês.

Assumindo que cada criança mentiu exactamente uma vez, a que aulas assistiu o Sinão?

(d) Sobre um exame de Matemática disseram as criancinhas o seguinte.

i1: · A minha nota é menor que a do i2.
· i2 teve 70.
· i3 teve 30 mais do que o i2.

i2: · Tirei 60.
· Tirei 20 menos do que o i3.
· Tirei 10 mais do que o i1.

i3: · A minha nota é maior do que a do i2.
· A minha nota é 30 mais do que a de i1.
· A nota do i2 é 70.

Determine, se possível, a nota de cada petiz.

(e) Os pais perguntaram: *Quantos rebuçados tem cada um de vocês?* As respostas foram as seguintes.

i1: · O i2 tem sete.
· Eu tenho menos do que o i2.
· O i3 tem três mais do que o i2.

i2: · Eu tenho seis.
· Tenho menos dois do que o i3.
· Tenho mais um do que o i1.

i3: · Não sou o que tem menos.
· Tenho mais três do que o i1.
· O i1 tem nove.

Quantos rebuçados tem cada criança, assumindo que cada uma mente exactamente uma vez?

5 Aplicações do Cálculo Proposicional

Forma disjuntiva normal. Álgebra das fórmulas.

5.1 Notas

5.1.1 Forma Disjuntiva Normal

Dada uma tabela de verdade existe uma fórmula do cálculo proposicional com essa tabela de verdade.
Uma fórmula φ com variáveis proposicionais $P_1, P_2, ..., P_n$ diz-se na **forma disjuntiva normal** se for uma disjunção de conjunções da forma

$$X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_n$$

onde cada X_i é P_i ou $\neg P_i$, i=1, 2,..., n.
Cada fórmula do cálculo proposicional que não seja uma contradição é tautologicamente equivalente a uma fórmula em forma disjuntiva normal.

5.1.2 Álgebra das Fórmulas

ψ é uma **subfórmula** de uma fórmula φ se ψ é uma sequência de símbolos consecutivos de φ que é uma fórmula.

As subfórmulas de φ são as fórmulas que ocorrem na árvore de φ.
Regra das Fórmulas Tautologicamente Equivalentes (TE): Se φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 são fórmulas do cálculo proposicional tais que ψ_1 é subfórmula de φ_1, e se φ_2 se obtem de φ_1 substituindo alguma ocorrência de ψ_1 por ψ_2, com $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, então $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.
Algumas **Tautologias Úteis nas Simplificações**. Usamos o símbolo $\top$ para designar uma tautologia qualquer e $\perp$ para uma contradição genérica.

1. $(P \vee \neg P) \Leftrightarrow \top$
2. $(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \perp$
3. $\neg\top \Leftrightarrow \perp$
4. $\neg\perp \Leftrightarrow \top$
5. $(P \wedge \top) \Leftrightarrow \top$
6. $(P \wedge \perp) \Leftrightarrow P$
7. $(P \wedge \top) \Leftrightarrow P$

8. $(P \wedge \bot) \Leftrightarrow \bot$
9. $(P \vee P) \Leftrightarrow P$
10. $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$
11. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
12. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
13. $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
14. $(P \vee (P \wedge Q)) \Leftrightarrow P$
15. $(P \wedge (P \vee Q)) \Leftrightarrow P$
16. $((P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$
17. $((P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$
18. $((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \Leftrightarrow (P \vee (Q \wedge R))$
19. $((P \wedge Q) \vee (P \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge (Q \vee R))$
20. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
21. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
22. $(P \vee (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow (P \vee Q)$
23. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
24. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$
25. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q))$

5.2 Problemas

A. Forma disjuntiva normal.

1. Para cada uma das colunas (a)—(e) na tabela de verdade abaixo determine uma fórmula na forma disjuntiva normal que tem essa tabela de verdade

A	B	C	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

2. Para cada uma das colunas (a)—(e) na tabela de verdade abaixo determine uma fórmula na forma disjuntiva normal que tem essa tabela de verdade

A	B	C	D	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
V	V	V	V	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	F	F	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	V	F	F

3. Determine fórmulas na forma disjuntiva normal tautologicamente equivalentes a cada uma das seguintes.

   a) $A \to B$

b) $A \vee \neg B$

c) $\neg(A \wedge \neg B)$

d) $A \vee B \leftrightarrow \neg A$

e) $A \vee B \rightarrow C$

f) $A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$

g) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge C$

h) $((\neg A \leftrightarrow B) \vee C) \wedge (\neg B \wedge C)$

i) $\neg(A \rightarrow \neg B \wedge C) \wedge (A \vee B) \wedge \neg C$

j) $A \vee \neg B \rightarrow A \wedge \neg C \wedge D$

k) $(A \vee B \vee \neg C \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee B \vee C \vee \neg D)$

l) $(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee (C \wedge \neg D))$

m) $(A \rightarrow B \wedge \neg C) \rightarrow (A \vee D \rightarrow \neg B \wedge C)$

n) $\neg((A \vee B) \wedge (C \rightarrow D)) \rightarrow A \wedge \neg B \wedge \neg D$

B. Usando equivalências tautológicas, simplifique as fórmulas seguintes. [Usamos as convenções: $\overline{P} = \neg P$ e $PQ = P \wedge Q$].

1. $(Q \rightarrow P) \rightarrow P$
2. $(P \leftrightarrow Q) \vee Q$
3. $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
4. $P(PQ \vee ((\overline{P}\,\overline{Q}) \vee Q))$
5. $(\overline{P}(Q \leftrightarrow \overline{P})Q) \rightarrow \overline{P \vee Q}$
6. $\overline{P}Q(\overline{P} \leftrightarrow \overline{P \vee Q})$
7. $PQR \vee P\overline{Q}R \vee \overline{P}\,\overline{Q}R$
8. $P\overline{Q}R \vee \overline{P}\,\overline{Q}R \vee QR$
9. $(P \vee \overline{Q})R \vee P\overline{R} \vee (\overline{Q} \vee R)\overline{R}$
10. $PQR \vee \overline{P}QR \vee P\overline{Q}R \vee PQ\overline{R}$
11. $\overline{P}\,\overline{Q}R \vee \overline{P}Q\overline{R} \vee P\overline{Q}\,\overline{R} \vee PQ\overline{R}$
12. $PQR \vee \overline{P}QR \vee PQ\overline{R} \vee \overline{P}Q\overline{R}$
13. $PQR \vee P\overline{Q}R \vee \overline{P}\,\overline{Q}R \vee \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} \vee \overline{P}QR$
14. $\overline{P \vee Q} \vee R \vee P(QR \vee \overline{Q}\,\overline{R})$
15. $(P \vee Q)(\overline{P} \vee R)(Q \vee R)$
16. $(((P \vee Q)\overline{PQ}) \vee R)(\overline{(P \vee Q)\overline{PQ}R})$
17. $(P \vee (Q \vee R)\overline{QR})P \vee (Q \vee R)\overline{QR}$

18. $\overline{P}QR\overline{S} \vee \overline{P}Q\overline{R}\,\overline{S}$

19. $PQRS \vee PQR\overline{S} \vee \overline{P}QRS \vee \overline{P}QR\overline{S}$

20. $PQRS \vee P\overline{Q}RS \vee PQR\overline{S} \vee P\overline{Q}R\overline{S} \vee \overline{P}Q\overline{R}\,\overline{S} \vee \overline{P}Q\overline{R}S$

21. $\overline{P}\,\overline{Q} \vee P\overline{Q}RS \vee \overline{P}QR\overline{S} \vee P\overline{Q}\,\overline{R}\,\overline{S} \vee \overline{P}Q\overline{R}S$

22. $PRS \vee \overline{Q}RS \vee PR\overline{S} \vee P\overline{Q}\,\overline{R}\,\overline{S}$

23. $\overline{P}Q \vee RS \vee PR\overline{S} \vee \overline{P}\,\overline{Q}\,\overline{R} \vee P\overline{Q}\,\overline{R}\,\overline{S}$

24. $P\overline{Q}RS \vee PQ\overline{R}S \vee \overline{Q \vee R \vee S} \vee \overline{P \vee Q \vee R} \vee P(\overline{Q \vee R})$

25. $\overline{P\overline{R} \vee Q \vee (P\overline{R} \vee Q)\overline{S}}$

26. $PQRS \vee \overline{(R \vee S)(Q \vee R \vee \overline{S})(P \vee R \vee \overline{S})}$

6 Cálculo de Predicados

Termos e predicados. Quantificadores. Linguagens formais. Expressões proposicionais.

6.1 Notas

6.1.1 Termos e Predicados

Um **predicado** n-ário (ou relação n-ária) é um conjunto de n-uplos.
Se $n > 1$ o **domínio** de um predicado n-ário R é o conjunto dos $n-1$-uplos $(u_1, ..., u_{n-1})$ tais que para algum v se tem $(u_1, ..., u_{n-1}, v) \in R$.
f é uma **função de n variáveis** se f é uma relação $n+1$-ária tal que, para qualquer elemento do domíno de f, $(u_1, ..., u_n)$, existe um único v verificando $(u_1, ..., u_n, v) \in f$. Escreve-se $f(u_1, ..., u_n) = v$.
O **quantificador universal**, $\forall$ traduz "para todos", "para cada", "para qualquer", ...
O **quantificador existêncial**, $\exists$, traduz "existe", "existe um elemento", "existe pelo menos um elemento", ...

6.1.2 Linguagem Formal do Cálculo de Predicados

A linguagem formal do cálculo de predicados consiste em:
Variáveis: u, v, w, x, y, z, ..., e estas letras indexadas.
Constantes: a, b, ...,e, i, j, ..., t, e estas letras indexadas.
Símbolos funcionais: f, g, h, e estas letras indexadas.
Símbolos de predicados: A, B, C, ..., e estas letras indexadas.
Conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
Quantificadores: $\forall$, $\exists$.
Parenteses: (,).
Definição de **termo**:

1. As constantes e as variáveis são termos.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, ..., t_n$ são termos, então $f(t_1, ..., t_n)$ é um termo.
3. Nada mais é termo.

Se P é um símbolo de predicado n-ário e $t_1, ..., t_n$ são termos então $Pt_1 \cdots t_n$ é uma **fórmula atómica**.

Definição de **fórmula**:

1. Uma fórmula atómica é uma fórmula.
2. Se φ e ψ são fórmulas então
$$(\neg\varphi),\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi)$$
são fórmulas.
3. Se v é uma variável e φ é uma fórmula então
$$((\forall v)\varphi) \quad \text{e} \quad ((\exists v)\varphi)$$
são fórmulas.
4. Nada mais é fórmula.

O **alcance** de um quantificador que ocorre numa fórmula é o próprio quantificador junto com a mais pequena fórmula que o segue.
Uma **ocorrência** de uma variável, v, numa fórmula diz-se **muda** se estiver no alcance de um quantificador $(\forall v)$ ou $(\exists v)$. Caso contrário diz-se **livre**.
Uma variável diz-se **muda numa fórmula** se tiver pelo menos uma ocorrência muda nessa fórmula. Uma variável diz-se **livre numa fórmula** se tiver pelo menos uma ocorrência livre nessa fórmula.
Uma fórmula sem variáveis livres é uma **proposição (ou sentença)**. Caso contrário é uma **expressão proposicioal (ou condição)**.

6.2 Problemas

A. Traduza cada uma das seguintes frases para a linguagem do Cálculo de Predicados. Use as letras propostas para as constantes, símbolos de função e símbolos de predicado.

1. Todos os pássaros são animais. (Px, Ax)
2. Alguns gatos não têm cauda. (Gx, Cx)
3. Nem todas as plantas precisam de sol. (Px, Sx)
4. Nenhum aluno desta turma gosta de Física. (Ax, Tx, Fx)
5. Alguns estudantes gostam de Física e alguns gostam de Matemática. (Ex, Fx, Mx)
6. Alguns estudantes que gostam de Física também gostam de Matemática. (Ex, Fx, Mx)
7. O Óscar e a Maria são estudantes que gostam de Matemática. (o, m, Ex, Mx)
8. O aluno mais baixo desta turma gosta de Matemática mas não gosta de Física. (b, Mx, Fx)
9. Só estudantes que gostam de Física gostam de Matemática. (Ex, Fx, Mx)
10. De entre os estudantes do curso de Matemática só os que fizerem o trabalho de casa terão nota alta. (Ex, Mx, Tx, Ax)
11. O Óscar e o Jorge gostam da Maria. (o, j, m, Gxy)
12. Se a Maria é mais velha que a Virgínia e a Virgínia é mais velha que a Teresa, então a Maria é mais velha que a Teresa. (m, v, t, Vxy)
13. Todo o estudante que for mais velho que a Maria também é mais velho que a Virgínia. (m, v, Ex, Vxy)
14. Todos os professores são mais velhos que todos os estudantes. (Px, Ex, Vxy)
15. Todo o professor que for mais velho que o Óscar também é mais velho que algum estudante. (o, Px, Ex, Vxy)
16. Nem todos os professores que são mais velhos que o Óscar são mais velhos que todos os estudantes. (o, Px, Ex, Vxy)
17. Ninguém é mais velho que ele mesmo. (Vxy)

18. Se alguém é mais velho que o Óscar então todos os estudantes são mais velhos que o Óscar. (o, Ex, Vxy)
19. Qualquer estudante que goste de todos os professores também gosta de si mesmo. (Ex, Px, Gxy)

Nos exercícios 20—26 use os seguintes símbolos de predicados e constantes:

Fx: x é professor

Ex: x é estudante

Mx: x vai a um meeting

Axy: x está acompanhado de y

Pxy: x é progenitor de y

j: Jorge

m: Maria

20. Todos os estudantes e professores assistem ao meeting.
21. Nenhum estudante que assiste ao meeting é acompanhado de um professor.
22. Algum progenitor de um estudante não assistiu ao meeting.
23. Se todos os professores assistem ao meeting então algum estudante é acompanhado por um professor.
24. O Jorge e a Maria assistiram ao meeting mas nenhum deles foi acompanhado por um estudante.
25. Nenhum professor acompanhado pelo Jorge assistiu ao meeting.
26. Se nem o Jorge nem a Maria são acompanhados por um estudante, então nenhum estudante assiste ao meeting.

Nos exercícios 27—38 use os seguintes símbolos de predicados e constantes:

Ex: x é um estudante-piloto

Ix: x é instrutor

Cx: x é uma cidade

Vxyz: x pilota um avião para y acompanhado de z

c: Costa da Caparica

27. Algum estudante-piloto pilota um avião para a Costa da Caparica acompanhado por um instrutor.
28. Algum estudante-piloto pilota um avião para alguma cidade acompanhado por um instrutor.
29. Todos os instrutores têm um aluno que pilota, com eles, um avião para alguma cidade.
30. Quem pilota aviões para quaisquer cidades acompanhados de instrutores são os estudantes-pilotos.
31. Nem todos os instrutores que pilotam aviões para alguma cidade acompanhados de um instrutor são estudantes-pilotos.
32. Estudantes-pilotos que pilotam um avião para a Costa da Caparica acompanhados de um estudante-piloto são instrutores.
33. Somente um instrutor pode pilotar um avião para a Costa da Caparica acompanhado de um estudante-piloto.
34. Há um instrutor tal que todos os estudantes-pilotos voam para a Costa da Caparica com ele.
35. Nenhum instrutor voa para todas as cidades com um estudante-piloto.
36. Algum estudante-piloto que voa para todas as cidades sem companhia é um instrutor.
37. Nenhum estudante-piloto que não pilota um avião para todas as cidades com um instrutor é um instrutor.
38. Qualquer estudante-piloto que não pilota um avião para todas as cidades sem companhia não é instrutor.

Nos exercícios 39—50 use os seguintes símbolos de predicados e constantes:

Dx: x é um estudante

Ex: x é um exame

Pxy: x é um problema no exame y

Rxy: x resolve y

f(x,y): o x-ésimo problema no exame y

g(x): o problema mais fácil do exame x

h(x): o problema mais difícil do exame x

a: Alexandre

n: Natacha

1: um

2: dois

3: três

39. Nenhum estudante resolve o problema um do exame três.
40. Natacha resolve o problema mais difícil do exame um, mas não resolve o problema mais fácil do exame dois.
41. Se todos os estudantes resolverem o problema mais difícil do exame dois então o Alexandre e a Natacha também.
42. Todos os estudantes que resolvem o problema um do exame um também resolvem o problema mais fácil do exame um.
43. Se algum estudante resolve todos os problemas de todos os exames então algum estudante resolve o problema mais difícil de cada exame.
44. Algum estudante que resolve todos os problemas do exame um não resolve o problema um do exame dois.
45. Cada estudante resolve algum problema em cada exame.
46. Só estudantes resolvem todos os problemas de algum exame.
47. Nenhum aluno resolve todos os problemas dum exame.
48. Os estudantes que resolvem todos os problemas dum exame também resolvem todos os problemas de todos os exames.
49. Quem resolve um problema dum exame é um estudante.
50. Se algum estudante resolve algum problema de cada exame então algum estudante resolve o problema mais fácil de todos os exames.

B. Traduza cada uma das seguintes frases para a linguagem do Cálculo de Predicados. Utilize constantes, símbolos de predicado e de função da lista abaixo.

Assuma que as variáveis tomam valores no conjunto dos números inteiros.

Use as expressões matemáticas comuns, por exemplo: "x é múltiplo de y" é sinónimo de "y é um factor de x" e de "existe z tal que x=y·z.

$x > y$: x é maior que y

$x \geq y$: x é maior ou igual a y

$x = y$: x é igual a y

[Pode usar $x \not> y$ em vez de $\neg(x > y)$, etc.]

x+y: a soma de x e y

x·y: o produto de x e y

Pode também usar-se ”-1”, ”-2”, ”0”, ”1”, ”2”, etc. com o significado usual.

1. A propriedade comutativa da adição.
2. A propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição.
3. Alguns inteiros são múltiplos de três.
4. Nem todos os inteiros são múltiplos de cinco.
5. Dez é um múltiplo positivo de algum número.
6. Todos os múltiplos positivos de sete são maiores que cinco.
7. Nenhum múltiplo positivo de cinco é menor que sete.
8. Dois é o menor par positivo.
9. Existe o menor ímpar positivo.
10. Existe pelo menos um inteiro entre cinco e dois. [Pode assumir que se sabe que dois é menor que cinco].
11. Todos os inteiros têm inverso aditivo.
12. Nem todos os inteiros não nulos têm inverso multiplicativo.
13. A soma de dois ímpares é par.
14. O produto de um inteiro por um par é um par.
15. Algum ímpar é factor de todos os pares.
16. Cada par é múltiplo de algum ímpar.
17. Há dois inteiros que têm a mesma paridade e são ambos múliplos de sete.
18. Não é verdade que se dois números têm a mesma paridade então são ambos múltiplos de três.
19. Se dois números diferentes têm a mesma paridade então os seus quadrados também.
20. Qualquer par de inteiros distintos com a mesma paridade tem um inteiro entre eles.

Nos exercícios 21—24 assuma que uma equação linear tem a forma

$$u \cdot x + v = 0 \qquad u, v \in \mathbb{Z}$$

21. Algumas equações lineares têm soluções inteiras.
22. Uma equação linear tem soluções inteiras sse o coeficiente director é um divisor do termo constante.
23. Nenhuma equação linear tem duas soluções distintas.
24. Para qualquer equação linear, se os coeficientes são ambos ímpares então a solução também é ímpar, a menos que não haja solução inteira.

C. Traduza cada uma das seguintes fórmulas do Cálculo de Predicados para Português. Use o dicionário seguinte:

Cx: x é um gato

Dx: x é um cão

Tx: x tem cauda

Bxy: x morde y

Lxy: x gosta de y

1. $(\exists x)(Cx \land \neg Tx)$
2. $(\forall x)(Dx \to Tx)$
3. $(\exists x)(Cx \land (\forall y)(Dy \to Bxy))$
4. $(\forall x)(Cx \to (\forall y)(Dy \to \neg Lxy))$
5. $(\exists x)(\exists y)(Cx \land Dy \land Lxy)$
6. $(\forall x)(Cx \land Tx \to (\exists y)(Dy \land Bxy))$
7. $(\forall x)((\forall y)(Dy \to Bxy) \to Cx)$
8. $(\forall x)(Tx \land Bxx \to Dx)$
9. $(\forall x)(Tx \land (\exists y)(Dy \land Bxy) \to Cx)$
10. $(\exists x)(Cx \land (\forall y)(Dy \land \neg Ty \to Bxy \lor \neg Lxy))$

Para os exercícios 11—20 use o seguinte dicionário:

a: Alexandre

n: Natacha

Pxy: x é um problema no exame y

Ex: x é um exame

Mx: x é um homem

Wx: x é uma mulher

Sxy: x resolve y

11. $(\exists x)(Ex \land (\forall y)(Pyx \to Say))$
12. $(\forall x)(Ex \to (\exists y)(Pyx \land Sny))$
13. $(\exists x)(\exists y)(Ex \land Pyx \land Sny) \to (\exists u)(\exists v)(Eu \land Pvu \land Sav)$
14. $(\exists x)(Wx \land (\forall y)(\forall z)(Ey \land Pzy \to Sxz))$
15. $(\forall x)(Mx \to (\exists y)(\exists z)(Ey \land Pzy \land \neg Sxz))$
16. $(\forall x)((\exists y)(Ey \land (\forall z)(Pzy \to Sxz)) \to Mx)$
17. $(\forall x)(Wx \to (\exists y)(Ey \land (\forall z)(Pzy \to Sxz)) \land (\exists u)(Eu \land (\forall v)(Pvu \to Sav))$
18. $(\forall x)(Ex \to (\exists y)(Pyx \land Sny)) \to (\forall u)(Wu \to (\forall v)(Ev \to (\exists w)(Pwv \land Suw))$
19. $\neg(\exists x)(Wx \land (\exists y)(Ey \land (\forall z)(Pzy \land Sxz)))$
20. $(\exists x)(Mx \land (\exists y)(\forall z)(Ez \land Pyz \to Sxy))$

Nos exercícios 21—30 use o seguinte dicionário:

Ix: x é um inteiro

x<y: x é menor que y

x≤y: x é menor ou igual a y

x=y: x é igual a y

x+y: a soma de x e y

x−y: a diferença de x e y

x·y: o produto de x e y

Use os símbolos usuais para números reais e assuma que as variáveis tomam valores no conjunto dos números reais. "x≠y" é uma abreviatura de "¬(x=y)".

21. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$
22. $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \to (\exists z)((x < z \land z < y) \lor (y < z \land z < x)))$
23. $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$

24. $(\forall x)(\exists y)(x < y)$
25. $(\forall x)(x \neq 0 \to (\exists y)(x \cdot y = 1 \wedge (\forall z)(x \cdot z = 1 \to z = y)))$
26. $(\forall x)(\forall y)(Ix \wedge Iy \wedge y \neq 0 \to (\exists u)(\exists v)(Iu \wedge Iv \wedge 0 \leq v \wedge v < y \wedge x = u \cdot y + v))$
27. $(\exists x)(Ix \wedge 1 < x \wedge (\forall y)(\forall z)(Iy \wedge Iz \wedge x = y \cdot z \to (y = x \wedge z = 1) \vee (y = 1 \wedge z = x)))$
28. $(\forall x)((0 \leq x) \to (\exists y)(y \cdot y = x))$
29. $(\forall x)(Ix \wedge (\exists y)(Iy \wedge (\exists z)(Iz \wedge y = 2 \cdot z + 1 \wedge x = 5 \cdot y)) \to (\forall u)(Iu \to x \neq 2 \cdot u))$
30. $(\exists x)(Ix \wedge (\exists y)(Iy \wedge x = 5 \cdot y) \wedge (\forall z)(Iz \to x \neq 7 \cdot z))$

D. Traduza cada uma das seguintes frases para a linguagem do Cálculo de Predicados.

1. Todos os professores que fazem investigação gostam de ensinar. O Silveira é um professor que não gosta de ensinar. Há professores que não fazem investigação.
2. Zelda e Zanzibar são dois gatos que moram num celeiro. Zelda caça todos os ratos, mas Zanzibar não caça nenhum. Todos os ratos têm medo da Zelda, mas há ratos que não têm medo do Zanzibar. Nenhum rato vive no celeiro.
3. Cada problema é resolvido por algum aluno. O Óscar resolve alguns problemas. Algum estudante resolve todos os problemas. Nenhum estudante não resolve nenhum problema.
4. Todo o estudante estuda algum assunto com algum professor. Nenhum estudante estuda todos os assuntos com todos os professores. Há um assunto que todos os estudantes estudam com algum professor. Todo o estudante que estuda todos os assuntos sem outra companhia é um professor.
5. Alguém é atropelado todos os dias. O Óscar é atropelado na segunda-feira. O Óscar e a Capitulina são atropelados na terça-feira, mas ninguém é atropelado na sexta-feira.
6. Alguns inteiros são pares, alguns são ímpares. Nenhum inteiro é par e ímpar. Se um inteiro é par o seu sucessor é ímpar; se um inteiro é ímpar o seu sucessor é par.
7. Todo o inteiro é múltiplo de algum inteiro. Há um inteiro que só é múltiplo de si mesmo. Todo o inteiro é múltiplo de si mesmo.

8. Todo o inteiro tem pelo menos um inverso aditivo. Dois inteiros diferentes não têm o mesmo inverso aditivo. Se um inteiro tem x como inverso aditivo e outro tem -x como inverso aditivo, então a sua soma é zero, para qualquer x.

E. Identifique as ocorrências livres da variável x nas seguintes fórmulas:

1. $Px \wedge Qxy \to (\forall x)(Rx \to x)$
2. $(\forall x)(Px \to (\exists y)(Qy \wedge Rxy))$
3. $(\exists x)Px \to (\forall y)(Qy \wedge Rxy)$
4. $\neg(\exists x)(Px \wedge \neg Rx) \vee Qx$
5. $(\forall x)Qx \wedge (Rx \vee Pxy)$
6. $Ray \to (\forall x)(Qax \to Px \wedge Rax)$
7. $(\forall x)Qxa \to Rxa$
8. $(\exists y)(Pxy \wedge Qxa \wedge Ray)$
9. $(\forall x)(\forall y)Rxy \to Qx$
10. $(\forall y)((\exists x)Rxy \to Qxy)$
11. $(\forall x)((\exists y)Pxy \to (\forall z)(Rz \to Qxyz))$
12. $(\forall y)(Py \to (\exists z)(Qxz \wedge (\exists x)(Ryx \to Sxyz))$
13. $(\exists z)((\forall y)(\exists x)(Rxyz \wedge ((\forall x)(\exists y)Pxyz \to Qxyz))$
14. $(\forall x)(\exists y)(\exists z)Rxyz \to Sxy \wedge Txz$
15. $(\forall x)(Px \to (\exists y)(Qxy \wedge Rx)) \wedge (\forall z)Sxz$

F. Classifique cada uma das seguintes expressões como:

i) termos,
ii) fórmulas atómicas,
iii) fórmulas não atómicas,
iv) sentenças,
v) nenhum dos anteriores.

1. Cada estudante desta turma vai passar.
2. O aluno mais alto desta turma.
3. O Óscar é mais alto do que o aluno sentado na primeira cadeira da primeira fila.

4. Mariana ou Pedro.
5. O aluno com melhores notas da escola x.
6. x está entre 2 e y.
7. Flores.
8. Flores amarelas.
9. Amarelo.
10. Flores implica Inverno frio.
11. A flor mais bonita do jardim do x é amarela.
12. As flores do jardim do Pedro são amarelas ou vermelhas.
13. A Natércia escreve à máquina com rapidez e precisão.
14. Escreve à máquina com rapidez.
15. Com precisão.
16. $x - 2y^2 + z^3$.
17. $(\forall x)(7 < Px)$
18. $(\exists x)(\forall y)(x + y = 0)$
19. $x \cdot y = 7x^2 + 2y - 10$.
20. $1 \leq \sqrt{3}$.
21. $(x \vee y) < z$.
22. Px=Qxy.
23. $(\forall x)(x + y = 1) \vee (x + y > 1)$.
24. $(x + y = -(x + y))^2$.
25. $(\forall x)((\forall y)(x + y = 0) \rightarrow x = 0)$.
26. $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + z = y \leftrightarrow z = y - x)$.
27. $(\forall x) \wedge (\forall y)(x + y = y + x)$
28. $(\forall y)((\exists x)(x + y = x + y^2) \rightarrow y = 0 \vee 1)$
29. $(\forall x)((x < Px) \vee (Px < x))$
30. $(\forall x)((\exists y)(x + y = x) \rightarrow y = 0)$

G. Construa uma árvore a partir de fórmulas atómicas para cada uma das seguintes fórmulas.

1. $(\forall x)(Px \wedge Qa \rightarrow Rx)$
2. $(\exists x)((Px \wedge Qx) \wedge \neg Rx)$

3. $(\forall x)(Px \to (\exists y)(Qx \wedge Rxy))$
4. $(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Qxy \to \neg Rx))$
5. $(\exists x)Px \to (\forall y)(Px \wedge Qy \to Rxy)$
6. $(\forall x)(\exists y)Pxy \wedge (\exists z)(Pxy \wedge (Qz \vee Rxyz))$
7. $(\forall x)((\exists y)(Pxy \wedge Qxyx) \to Pax \wedge Rabx)$
8. $(\forall x)(Pxf(a) \to Qf(x)a) \vee (\exists y)(Pyf(y) \wedge Qaf(a))$
9. $(\forall x)(Px \wedge Qx) \to (\exists y)(Py \wedge Ryf(y))$
10. $(\exists x)((\forall y)(Px \wedge Py \to Qxy) \wedge (Px \vee Qxx))$

7 Estruturas Interpretativas

Verdade e falsidade em estruturas interpretativas.

7.1 Notas

7.1.1 Estruturas Interpretativas

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Listemos todos os símbolos de predicados, símbolos de funções e constantes que ocorrem em alguma fórmula de Γ:

Símbolos de predicados: $P_1, ..., P_k$

Símbolos de funções: $f_1, ..., f_l$

Constantes: $c_1, ..., c_m$.

Então $S = (\underline{U}, \underline{P_1}, ..., \underline{P_k}, \underline{f_1}, ..., \underline{f_l}, \underline{c_1}, ..., \underline{c_m})$ é uma **estrutura interpretativa** para Γ se

i) $\underline{U}$ é um conjunto não vazio. Chama-se-lhe **universo** de S.

ii) Se P_i é um símbolo de predicado n-ário então $\underline{P_i}$ é um subconjunto de $\underline{U}^n$, isto é,

$$\underline{P_i} \subset \underline{U}^n = \underbrace{\underline{U} \times \underline{U} \times \cdots \times \underline{U}}_{n\,vezes}$$

[Isto é equivalente a dizer que $\underline{P_i}$ é um predicado n-ário em $\underline{U}$].

iii) Se f_i é um símbolo de função de n variáveis, então $\underline{f_i}$ é uma função de $\underline{U}^n$ em $\underline{U}$, isto é,

$$\underline{f_i} : \underline{U}^n \to \underline{U}$$

iv) Se c_i é uma constante, então $\underline{c_i} \in \underline{U}$.

7.1.2 Verdade e Falsidade em Estruturas Interpretativas

Seja φ uma fórmula com, no máximo, n variáveis livres: $x_1, ..., x_n$. Seja S uma estrutura interpretativa para φ. Seja $\underline{a} = (\underline{a_1}, ..., \underline{a_n})$ um n-uplo de elementos de $\underline{U}$, onde $\underline{U}$ é o universo de S.

I. Seja t um termo em φ.

Caso 1. t é x_i ou a_i. Então $\underline{t}$ é $\underline{a_i}$.

Caso 2. t é $f(t_1, ..., t_m)$. Então $\underline{t}$ é $\underline{f}(\underline{t_1}, ..., \underline{t_m})$.

II. Seja φ uma fórmula atómica. Neste caso φ tem a forma $Rt_1...t_m$ onde $t_1, ..., t_m$ são termos. Seja $\underline{R}$ a interpretação de R em S e $\underline{t_1}, ..., \underline{t_m}$ as interpretações de $t_1, ..., t_m$, respectivamente. O n-uplo $\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $(\underline{t_1}, ..., \underline{t_m}) \in \underline{R}$.

[No caso de φ não conter variáveis livres a interpretação de φ em S independe de $\underline{a}$, portanto todos os n-uplos satisfazem a fórmula, ou nenhum o faz].

III. Seja φ obtida das fórmulas ψ e χ usando conectivos. Temos os seguintes casos:

Caso 1. φ é $\neg\psi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}$ não satisfaz ψ em S.

Caso 2. φ é $\psi \vee \chi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}$ satisfaz ψ em S ou $\underline{a}$ satisfaz χ em S.

Caso 3. φ é $\psi \wedge \chi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}$ satisfaz ψ em S e $\underline{a}$ satisfaz χ em S.

Caso 4. φ é $\psi \to \chi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}$ não satisfaz φ em S ou $\underline{a}$ satisfaz φ em S.

Caso 5. φ é $\psi \leftrightarrow \chi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}$ satisfaz φ e χ em S ou $\underline{a}$ não satisfaz φ nem χ em S.

IV φ é $(\forall v)\psi$ ou $(\exists v)\psi$. Seja $\underline{a}' = (\underline{a_1}, ..., \underline{a_n}, \underline{b})$. [A fórmula ψ pode ter v como variável livre; v é substituído por $\underline{b}$ nas interpretações abaixo].

Caso 1. φ é $(\forall v)\psi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}'$ satisfaz ψ em S para qualquer $\underline{b} \in \underline{U}$.

Caso 2. φ é $(\exists v)\psi$.
$\underline{a}$ **satisfaz** φ em S sse $\underline{a}'$ satisfaz ψ em S para algum $\underline{b} \in \underline{U}$.

Seja φ uma fórmula com, no máximo, n variáveis livres, S uma estrutura interpretativa para φ, $\underline{U}$ o universo de S.

1. φ é **verdadeira** em S sse qualquer n-uplo de elementos de $\underline{U}$ satisfaz φ.
2. φ é **falsa** em S sse nenhum n-uplo de elementos de $\underline{U}$ satifaz φ.

[Há fórmulas que não são verdadeiras nem falsas numa estrutura interpretativa, mas nenhuma fórmula pode ser verdadeira e falsa].

Uma fórmula φ é **válida (ou universalmente válida)** se φ é verdadeira em todas as estruturas interpretativas para φ.

7.2 Problemas

A. Para cada uma das seguintes fórmulas exiba uma estrutura interpretativa na qual a fórmula é verdadeira e outra onde é falsa.

1. $(\forall x)(Px \wedge Qx \rightarrow Rx)$
2. $(\exists x)(Px \wedge \neg Qx \wedge \neg Rx)$
3. $(\forall x)(Px \wedge \neg Qx \wedge \neg Rx)$
4. $Pa \wedge (\exists x)(Px \wedge \neg Qxb)$
5. $(\exists x)(Px \wedge Qxa) \rightarrow (\forall y)(Py \wedge Ry \rightarrow Qby)$
6. $(\forall x)(Px \wedge Qx \rightarrow (\exists y)(Ry \wedge \neg Sxy))$
7. $(\exists x)(Px \wedge \neg Qx \wedge (\forall y)(Rxy \rightarrow \neg Sxy))$
8. $(\exists x)Px \rightarrow (\forall y)(Qy \rightarrow Rxy)$
9. $(\forall x)(Px \rightarrow Qxa) \rightarrow (\exists y)(Py \wedge Ry \wedge \neg Qxy)$
10. $(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Qy \rightarrow (\exists z)(Rxy \wedge Sxyz))$
11. $(\exists x)(\forall y)(Px \wedge Ry \wedge Sxy \wedge (\exists z)(Pz \wedge Rx \wedge \neg Qxaz))$
12. $(\forall x)(Px \wedge Qxf(x) \rightarrow (\exists y)(\exists z)(Py \wedge \neg Qyz \wedge Rf(x)yz))$
13. $(\forall x)Rxf(x) \wedge (\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
14. $(\forall x)Rxx \vee (\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx) \vee (\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$
15. $(\forall x)(\forall y)(Rxy \vee Ryx) \wedge (\forall x)(\exists y)Rxy \wedge (\forall y)(\exists x)\neg Rxy$

B. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas determine uma estrutura interpretativa onde a última fórmula é falsa mas as restantes são verdadeiras.

1. $(\forall x)(Ax \rightarrow Bx)$
   $(\exists x)(Ax \wedge Bx)$
2. $(\exists x)(Px \wedge \neg Qx)$
   $(\forall x)(Px \rightarrow \neg Qx)$
3. $(\forall x)(Ax \rightarrow Bx)$
   $(\forall x)(Cx \rightarrow \neg Ax)$
   $(\exists x)(Cx \wedge \neg Bx)$
   $(\forall x)(Cx \rightarrow \neg Bx)$

4. $(\forall x)(Px \to Qx)$
   $\neg Pa$
   $\neg Qa$
5. $(\exists x)Px \to (\exists x)Qx$
   Qa
   $(\forall x)(Px \to Qx)$
6. $(\exists x)Dx \to Eab$
   $Fa \to (\exists x)Dx$
   $(\exists x)Fx$
   $\exists x)(Exb$
7. $(\forall x)(Px \to (\exists y)(Qy \land Rxy))$
   $(\exists x)(Px \land (\forall y)(Qy \to Rxy))$
8. $(\forall x)(Lxa \to \neg Lxb)$
   $(\forall x)(\exists y)Lxy$
   $(\exists x)\neg Lxb$
9. $(\forall x)(Px \to (\forall y)(Qy \to Rxy))$
   $(\forall x)(Px \to (\exists y)(\neg Rxy \land Sy))$
   $(\exists x)(Sx \land \neg Qx)$
10. $(\exists x)(Ex \land (\forall y)(Fy \to Gxy))$
    $(\forall x)(\forall y)(Ex \to (Gxy \leftrightarrow Hy))$
    $(\forall x)(Hx \leftrightarrow Fx)$
11. $(\forall x)((\forall y)(Rxy \to Sy) \to Sx)$
    $Rab \land Sa$
    Sb
12. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \land Ryz \to Rxz)$
    $(\forall x)Rxx$
    $(\forall x)(\exists y)Rxy$
    $(\forall x)(\forall y)(Rxy \to \neg Ryx)$
13. $(\forall x)Rxf(x)$
    $(\exists x)(\forall y)Rxy$
14. $(\forall x)(\forall y)(Px \land Py \to Rxy)$
    $(\exists x)Px$
    $(\exists x)Pf(x)$
    $(\exists x)Rf(x)x$

15. $(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Py \rightarrow Pf(x,y))$
    $(\exists x)(Px \wedge \neg Qx)$
    $(\forall x)(Px \rightarrow (\exists y)(Py \wedge \neg Qf(x,y)))$
16. $(\forall x)(Ax \wedge Bx \rightarrow (\forall y)(By \wedge Cy \leftrightarrow Dxy))$
    $(\exists x)(Ax \wedge Bx \wedge (\forall y)(By \wedge Ey \leftrightarrow \neg Dxy))$
    $(\exists x)(Ax \wedge Bx \wedge \neg Ex)$

8 Provas com Quantificadores.

Eliminação universal. Introdução universal. Provas com quantificadores universais. Introdução existencial. Eliminação existencial. Argumentos *vs* provas.

8.1 Notas

8.1.1 Provas com Quantificadores

Se φ é uma fórmula, t um termo, e v uma variável, então $\varphi[t|v]$ é a fórmula que se obtém de φ substituindo todas as ocorrências livres de v por t. A substituição é **válida** se nenhuma variável de t ocorrer muda em $\varphi[t|v]$.

Regra da Eliminação Universal, E.U., $\forall^-$: Se φ é uma fórmula, t um termo, e v uma variável, então $\varphi[t|v]$ deduz-se de $(\forall v)\varphi$ se a substituição de v por t em φ for válida. De forma equivalente: $(\forall v)\varphi \vdash \varphi[t|v]$ se a substituição de v por t em φ for válida. Ou ainda: se Γ é um conjunto de fórmulas e $\Gamma \vdash (\forall v)\varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi[t|v]$, se a substituição de v por t em φ for válida.

Se φ é uma fórmula numa prova, uma variável v diz-se **marcada** em φ se φ é uma premissa e v é livre em φ, ou existe uma premissa ψ na qual v ocorre livre e que é utilizada na dedução de φ.

Regra da Generalização Universal, G.U., $\forall^+$: Se φ é uma fórmula e v é uma variável, então $(\forall v)\varphi$ deduz-se de φ se v não é uma variável marcada em φ. De forma equivalente: se Γ é um conjunto de fórmulas e $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \vdash (\forall v)\varphi$ se v não ocorrer livre em Γ.

8.2 Problemas

A. Dê uma prova formal de cada um dos seguintes argumentos.

1. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to Bx)$,
   $(\forall x)(Cx \to \neg Bx)$
   Conclusão: $(\forall x)(Ax \to \neg Cx)$
2. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to Bx \vee Cx)$,
   $(\forall x)(Bx \to Cx)$
   Conclusão: $(\forall x)(Ax \to Cx)$
3. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to \neg Bx)$,
   $(\forall x)(Cx \vee \neg Dx \to Bx)$,
   Aa
   Conclusão: $\neg Ca \wedge Da$
4. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \vee Bx \to \neg Cx)$,
   $(\forall x)(Bx \to Dx)$,
   $(\forall x)(Dx \to Ax)$,
   Ca
   Conclusão: $\neg Da$
5. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to Bx \vee \neg Cx)$,
   $(\forall x)(Ax \wedge Bx \to Dx)$,
   $(\forall x)(Ax \wedge \neg Cx \to \neg Ex)$
   Conclusão: $(\forall x)(Ax \wedge Ex \to Dx)$
6. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to (\forall y)(By \to Cxy))$,
   $(\forall x)(Dx \to Bx)$
   Conclusão: $(\forall x)(Ax \to (\forall y)(Dy \to Cxy))$
7. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to (\forall y)(By \to Cxy))$,
   $(\forall x)(Ax \to Bx)$,
   $Ba \wedge \neg Cba$
   Conclusão: $\neg Ab$
8. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to Bx)$,
   $(\forall y)(By \to (\forall x)Ax$
   Conclusão: $(\forall x)Bx \leftrightarrow Ba)$
9. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \to Rxz)$,
   $(\forall x)(\forall y)(Rxy \to Ryx)$
   Conclusão: $(\forall x)(\forall y)(Rxy \to Rxx)$

10. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$
    Conclusão: $(\forall x)Rxa \rightarrow (\forall x)Rxx$
11. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(Ax \wedge By \rightarrow \neg Rxy)$,
    Aa,
    $(\forall y)(Cy \rightarrow Ray)$
    Conclusão: $(\forall z)(Cz \rightarrow \neg Bz)$
12. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \rightarrow \neg Rxa)$,
    $Ab \wedge Ba$,
    $(\forall x)(Cx \rightarrow Bx)$,
    $(\forall x)(Ax \rightarrow (\forall y)(By \wedge Cy \rightarrow Rxy))$
    Conclusão: $\neg Ca)$
13. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(Rxy \wedge Ryx \rightarrow Sxy)$
    Conclusão: $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(Rxz \wedge Ryz) \rightarrow Sxy)$
14. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Rf(y)f(x))$,
    $(\forall x)Rxf(x)$
    Conclusão: $(\forall x)Rf(f(x))f(x)$
15. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxy)$,
    $(\forall x)Rxf(x)$
    Conclusão: $Rab \wedge Rbc \rightarrow Rac$

B. Traduza cada um dos seguintes argumentos válidos para a linguagem do Cálculo de Predicados, usando os símbolos propostos, e prove-os formalmente. Use somente quantificadores universais.

1. Todos os pássaros têm asas. Nenhum marciano tem asas. Logo, nenhum marciano é pássaro. (Px, Ax, Mx).
2. Todos os físicos são matemáticos. O Guterres não é matemático. Logo, o Guterres não é físico. (Fx, Mx, g).
3. Médicos são licenciados. Professores são licenciados. Logo, ou médicos ou professores são licenciados. (Mx, Px, Lx).
4. Nenhum socialista e nenhum comunista votou. A Maria votou. Logo, a Maria não é comunista. (Sx, Cx, Vx, m).
5. Os únicos bichos que têm penas são as aves. Todas as aves chilream. Logo, nenhum bicho que não chilreie tem penas. (Bx, Px, Ax, Cx).

6. Todas as casas têm uma máquina de lavar roupa ou uma máquina de lavar louça. Todas as casas que têm máquina de lavar roupa têm uma máquina de secar. Todas as casas que têm máquina de lavar louça têm TV. Logo, todas as casas que não têm TV têm máquina de secar. (Cx, Rx, Lx, Sx, Tx).
7. Só fantasmas vivem na casa açombrada. Nenhum fantasma estrábico é inteligente. Nenhum fantasma é estrábico. Logo, quem vive na casa açombrada é inteligente ou não é estrábico. (Fx, Vx, Ex, Ix).
8. Todos os matemáticos gostam de todos os químicos. Nenhum matemático gosta de nenhum filósofo. Gauss era um matemático. Logo, nenhum filósofo é um químico. (Mx, Qx, Fx, Gxy, g).
9. Todos os professores são mais velhos que todos os alunos. Óscar não é mais velho que Teresa, que é uma estudante. Logo, o Óscar não é um professor. (Px, Ex, Vxy, o, t).
10. Homens desportistas são simultaneamente fãs de futebol e de xadrez. Desportistas que são fãs de xadrez são homens que são fãs de futebol. Quem não é desportista é homem fã de xadrez. Logo, todos os homens são fãs de xadrez e reciprocamente. (Hx, Dx, Fx, Xx).
11. Pais e mães gostam de crianças. Natário é um pai que não gosta do Pôncio. Nenhuma mãe gosta da Capitulina. Regina é mãe. Logo, nem Pôncio nem nem Capitulina são crianças. (Px, Mx, Cx, Gxy, n, p, c, r).
12. Alguém que gosta de todos os advogados é criminoso. Só mentirosos gostam de todos os criminosos. Advogados gostam de advogados e criminosos gostam de criminosos. Logo, todos os advogados são mentirosos. (Ax, Cx, Mx, Gxy).
13. Qualquer mulher que acompanhe uma criança numa reunião é tia. Louca acompanha Arroz em todas as reuniões. Logo, se Louca é mulher, Arroz é uma criança e r é uma reunião, então Louca é tia. (Mx, Cx, Tx, Rx, Axyz, l, a, r).
14. Génios resolvem todos os problemas de todos os exames. Quem resolve problemas em exames são os estudantes. Anémona resolve todos os problemas de todos os exames. Logo, se Anémona é um génio então ela é estudante, desde que exista um problema, p, e um exame, e. (Gx, Px, Ex, Dx, Sxyz, a, p, e).

C. Mostre que cada um dos seguintes conjuntos de premissas é inconsistente deduzindo formalmente uma contradição.

1. $(\forall x)(Px \to Qx)$,
   $(\forall x)(Px \to \neg Qx)$,
   Pa.
2. $(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Qy \to Rxy)$,
   $(\forall x)(Qx \to \neg Rxa)$,
   $Pa \wedge Qa$.
3. $(\forall x)(Qx \to Px)$,
   $(\forall x)(\neg Qx \to Rx)$,
   $(\forall x)\neg Rx$,
   $\neg(\forall x)Px$.
4. $(\forall x)(\forall y)Rxy$,
   $\neg(\forall y)(\forall x)Rxy$.
5. $(\forall x)(Px \to Qx \wedge Rx)$,
   $(\forall x)(Sx \to \neg Rx)$,
   $\neg(\forall x)(Px \to \neg Sx)$.
6. $(\forall x)(Px \leftrightarrow Qx \vee Rx)$,
   $(\forall x)(Qx \leftrightarrow \neg Sx)$,
   $(\forall x)(Rx \leftrightarrow \neg Tx)$,
   $(\forall x)Px \leftrightarrow Sx \wedge Tx)$.
7. $(\forall x)((\forall y)(Qy \wedge Rxy) \to Px)$,
   $\neg Pa$,
   $(\forall x)(Qx \wedge Rax)$.
8. $(\forall x)(Px \to (\forall y)(Qy \to Rxy))$,
   Pb,
   Qa,
   $\neg Rba$.
9. $(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Qy \to Rxy))$,
   $(\forall x)(Sx \to \neg Rax)$,
   Pa,
   $\neg(\forall x)(Sx \to \neg Qx)$.

10. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$,
    Rab,
    $\neg Rbb$.
11. $Pa \wedge Sa$,
    $Qf(a) \wedge Raf(a)$,
    $(\forall x)(Sx \rightarrow (\forall y)(Px \wedge Qy \rightarrow \neg Rxy))$.
12. $(\forall x)(Px \rightarrow (\forall y)(Qy \rightarrow Rxy))$,
    $(\forall x)(Tx \rightarrow Qx)$,
    $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$,
    $Pa \wedge Sb \wedge Tc \wedge \neg Rab$,
    $(\forall x)(Sx \rightarrow Rcx)$.
13. $(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Qxy \rightarrow Rxy)$,
    $(\forall x)(Sx \rightarrow Px)$,
    $(\forall x)(Sx \rightarrow (\forall y)(Qxy \rightarrow Txy))$,
    $(\forall x)(Rxb \rightarrow \neg Txb)$,
    $Sa \wedge Qab$.
14. $(\forall x)((\forall y)(Py \rightarrow Rxy) \rightarrow Qa \wedge \neg Sxa)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Px \rightarrow Rxy)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Qy \rightarrow Sxy)$.
15. $(\forall x)(\forall y)(Py \wedge Qxy \rightarrow (\forall z)(Sz \wedge \neg Rxy))$,
    Pa,
    Qba,
    Rba.
16. Tab,
    $(\forall x)(\forall y)(Txy \rightarrow Qx \wedge Ry)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Txy \rightarrow Qx \wedge Ry)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Txy \rightarrow Qx \wedge Ry)$,
    $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Sxyz \rightarrow Px)$,
    $(\forall x)(\forall y)(Qx \wedge Ry \rightarrow Scyx$,
    $\neg Pc$.
17. $(\forall x)(\forall y)(Qx \vee Txy \rightarrow Py)$,
    $(\forall x)((Rx \rightarrow (\forall y)(Py \rightarrow Qa \wedge Sxya))$,
    $Rb \wedge Tbc$,
    $(\forall x)(Pc \rightarrow \neg Sbcx)$.

D. Cada uma das provas seguintes é correcta. Forneça a documentação em falta (não esqueça de assinalar as variáveis marcadas).

1.

$$\begin{array}{lll} \{1\} & 1. & (\forall x)(Ax \to Bx) & P \\ \{2\} & 2. & (\forall y)(Cy \to \neg By) & P \end{array}$$

deduzir $(\forall z)(Az \to \neg Cz)$

$$\begin{array}{ll} 3. & Az \\ 4. & Az \to Bz \\ 5. & Bz \\ 6. & Cz \to \neg Bz \\ 7. & \neg Cz \\ 8. & Az \to \neg Cz \\ 9. & (\forall z)(Az \to \neg Cz) \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{llll} \{1\} & 1. & (\forall x)(Ax \wedge Bx \to Cx) & P \\ \{2\} & 2. & (\forall x)(Bx \to \neg Cx \vee Dx) & P \\ \{3\} & 3. & (\forall x)(Ax \to Bx) & P \end{array}$$

deduzir $(\forall x)(Ax \to Dx)$

$$\begin{array}{ll} 4. & Ax \wedge \neg Dx \\ 5. & Ax \to Bx \\ 6. & Bx \\ 7. & Ax \wedge Bx \\ 8. & Ax \wedge Bx \to Cx \\ 9. & Cx \\ 10. & Cx \wedge \neg Dx \\ 11. & \neg(\neg Cx \vee Dx) \\ 12. & Bx \to \neg Cx \vee Dx) \\ 13. & \neg Bx \\ 14. & Bx \wedge \neg Bx \\ 15. & \neg(Ax \wedge \neg Dx) \\ 16. & Ax \to Dx \\ 17. & (\forall x)(Ax \to Dx) \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{llll} \{1\} & 1. & (\forall x)(\forall y)(Axy \wedge Ayx \to Bxy) & P \end{array}$$

deduzir $(\forall x)(\forall y)((\forall z)(Axz \wedge Ayz) \to Bxy)$

2.	$(\forall z)(Axz \wedge Ayz)$
3.	$Axy \wedge Ayy$
4.	$Axx \wedge Ayx$
5.	$Axy \wedge Ayx$
6.	$Axy \wedge Ayx \to Bxy$
7.	Bxy
8.	$(\forall z)(Axz \wedge Ayz) \to Bxy$
9.	$(\forall y)((\forall z)(Axz \wedge Ayz) \to Bxy)$
10.	$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(Axz \wedge Ayz) \to Bxy)$

4.

{1}	1.	$(\forall x)(Ax \to (\forall y)(Bxy \to Cy))$	P
{2}	2.	$(\forall x)(Ax \to (\forall y)(Dxy \to Bxy))$	P

deduzir $(\forall x)(\forall y)(Ax \wedge Dxy \to Cy)$

3.	$Ax \wedge Dxy$
4.	$Ax \to (\forall y)(Bxy \to Cy)$
5.	$Ax \to (\forall y)(Dxy \to Bxy)$
6.	$(\forall y)(Bxy \to Cy)$
7.	$(\forall y)(Dxy \to Bxy)$
8.	$Bxy \to Cy$
9.	$Dxy \to Bxy$
10.	Bxy
11.	Cy
12.	$Ax \wedge Dxy \to Cy$
13.	$(\forall y)(Ax \wedge Dxy \to Cy)$
14.	$(\forall x)(\forall y)(Ax \wedge Dxy \to Cy)$

5.

{1}	1.	Pa	P
{2}	2.	$(\forall x)(Qx \to Rax))$	P
{3}	3.	$(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Rxy \to Sy)$	P

deduzir $(\forall x)(Qx \to Sx)$

$$
\begin{array}{ll}
4. & Qx \\
5. & Qx \to Rax \\
6. & Rax \\
7. & Pa \wedge Rax \\
8. & (\forall y)(Pa \wedge Ray \to Sy) \\
9. & Pa \wedge Rax \to Sx \\
10. & Sx \\
11. & Qx \to Sx \\
12. & (\forall x)(Qx \to Sx)
\end{array}
$$

E. As seguintes "provas" são incorrectas. Assinale as variáveis marcadas, e descreva os erros cometidos.

1.

$$
\begin{array}{cllrll}
\{1\} & 1. & (\forall x)(Px \to Qx \wedge Rx) & & P & \\
\{2\} & 2. & (\forall x)(Qx \to Sa) & & P & \\
\{3\} & 3. & (\forall x)(Rx \to Ta) & & P & \\
\{1\} & 4. & Px \to Qx \wedge Rx & 1 & EU & [x|x] \\
\{2\} & 5. & Qx \to Sa & 2 & EU & [x|x] \\
\{3\} & 6. & Rx \to Ta & 3 & EU & [x|x] \\
\{2,3\} & 7. & Qx \wedge Rx \to Sa \wedge Ta & 5,6 & T & \\
\{1,2,3\} & 8. & Px \to Sa \wedge Ta & 4,7 & T & \\
\{1,2,3\} & 9. & (\forall x)Px \to Sa \wedge Ta & 8 & IU &
\end{array}
$$

2.

$$
\begin{array}{cllrll}
\{1\} & 1. & (\forall x)(Sx \to Qx \vee Rx) & & P & \\
\{2\} & 2. & (\forall x)(Qx \to Sx) & & P & \\
\{3\} & 3. & Sx & & P & (PC) \\
\{2\} & 4. & Qx \to Sx & 2 & EU & [x|x] \\
\{2,3\} & 5. & \neg Qx & 3,4 & T & \\
\{1\} & 6. & Sx \to Qx \wedge Rx & 1 & EU & [x|x] \\
\{1,3\} & 7. & Qx \wedge Rx & 3,6 & T & \\
\{1,2,3\} & 8. & Rx & 5,7 & T & \\
\{1,2\} & 9. & Sx \to Rx) & 3,8 & PC & \\
\{1,2\} & 10. & (\forall x)(Sx \to Rx) & 9 & IU &
\end{array}
$$

3.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(\forall y)(Px \wedge qy \to Rxy)$		P	
$\{2\}$	2.	Pa		P	
$\{3\}$	3.	Qy		P	(PC)
$\{1\}$	4.	$(\forall y)(Pa \wedge Qy \to Rxy)$	1	EU	$[a\|x]$
$\{1\}$	5.	$Pa \wedge Qy \to Rxy)$	4	EU	$[y\|y]$
$\{1,2,3\}$	6.	$Rxy)$	$2,3,5$	T	
$\{1,2\}$	7.	$Qy \to Rxy$	$3,6$	PC	
$\{1,2\}$	8.	$(\forall y)(Qy \to Rxy)$	7	IU	
$\{1,2\}$	9.	$(\forall x)(\forall y)(Qy \to Rxy)$	8	IU	

4.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \to Qx)$		P	
$\{2\}$	2.	Px		P	(PC)
$\{1\}$	3.	$Py \to Qy$	1	EU	
$\{2\}$	4.	$(\forall x)Px$	2	IU	
$\{2\}$	5.	Py	4	EU	$[y\|x]$
$\{1,2\}$	6.	Qy	$3,5$	T	
$\{1,2\}$	7.	$(\forall y)Qy$	6	IU	
$\{1\}$	8.	$Px \to (\forall y)Qy$	$2,7$	PC	
$\{1\}$	9.	$(\forall x)Px \to (\forall y)Qy$	8	IU	

5.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)Px \to (\forall x)Qx$		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(Qx \to Rx)$		P	
$\{3\}$	3.	Px		P	(PC)
$\{1\}$	4.	$Px \to (\forall x)Qx$	1	EU	$[x\|x]$
$\{1,3\}$	5.	$(\forall x)Qx$	$3,4$	T	
$\{1,3\}$	6.	Qx	5	EU	$[x\|x]$
$\{2\}$	7.	$Qx \to Rx$	2	EU	$[x\|x]$
$\{1,2,3\}$	8.	Rx	$6,7$	T	
$\{1,2\}$	9.	$Px \to Rx$	$3,8$	PC	
$\{1,2\}$	10.	$(\forall x)(Px \to Rx)$	9	IU	

6.

$\{1\}$	1.	Pa		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)((\forall y)(Qy \wedge Rxy) \rightarrow Px)$		P	
$\{2\}$	3.	$(\forall y)(Qy \wedge Ray) \rightarrow Pa$	2	EU	$[a\vert x]$
$\{1,2\}$	4.	$(\forall y)(Qy \wedge Ray)$	$1,3$	T	
$\{1,2\}$	5.	$Qx \wedge Rax$	4	EU	$[x\vert y]$
$\{1,2\}$	6.	Rax	5	T	
$\{1,2\}$	7.	$(\forall x)Rax$	6	IU	

7.

$\{1\}$	1.	$(\forall y)(Px \wedge Qy \rightarrow Rxy)$		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)((\forall y)(Px \wedge Rxy) \rightarrow Sx)$		P	
$\{3\}$	3.	$Px \wedge Qy$		P	(PC)
$\{1\}$	4.	$Px \wedge Qy \rightarrow Rxy$	1	EU	$[y\vert y]$
$\{1,3\}$	5.	Rxy	$3,4$	T	
$\{2\}$	6.	$(\forall y)(Px \wedge Rxy) \rightarrow Sx$	2	EU	$[x\vert x]$
$\{2\}$	7.	$Px \wedge Rxy \rightarrow Sx$	6	EU	$[y\vert y]$
$\{1,2,3\}$	8.	Sx	$3,5,7$	T	
$\{1,2\}$	9.	$Px \wedge Qy \rightarrow Sx$	$3,8$	PC	
$\{1,2\}$	10.	$(\forall y)(Px \wedge Qy \rightarrow Sx)$	9	IU	
$\{1,2\}$	11.	$(\forall x)(\forall y)(Px \wedge Qy \rightarrow Sx)$	10	IU	

8.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(\forall y)(Px \rightarrow (Qy \rightarrow Rxy))$		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(\forall y)(Px \rightarrow (Rxy \rightarrow Sy))$		P	
$\{1\}$	3.	$(\forall y)(Px \rightarrow (Qy \rightarrow Rxy))$	1	EU	$[x\vert x]$
$\{1\}$	4.	$Px \rightarrow (Qy \rightarrow Rxy)$	3	EU	$[y\vert y]$
$\{2\}$	5.	$(\forall y)(Px \rightarrow (Rxy \rightarrow Sy))$	2	EU	$[x\vert x]$
$\{2\}$	6.	$Px \rightarrow (Rxy \rightarrow Sy)$	5	EU	$[y\vert y]$
$\{1,2\}$	7.	$Qy \rightarrow Sy$	$4,6$	T	
$\{1,2\}$	8.	$(\forall y)(Qy \rightarrow Sy)$	7	IU	

9.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \rightarrow (\forall y)(Qy \rightarrow Rxy))$		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(Sx \rightarrow \neg Px)$		P	
$\{3\}$	3.	Sa		P	
$\{2\}$	4.	$Sa \rightarrow \neg Pa$	2	EU	$[a\vert x]$
$\{2,3\}$	5.	$\neg Pa$	$3,4$	T	
$\{1\}$	6.	$Pa \rightarrow (\forall y)(Qy \rightarrow Rxy)$	1	EU	$[a\vert x]$
$\{1,2,3\}$	7.	$(\forall y)(Qy \rightarrow Rxy)$	$5,6$	T	
$\{1,2,3\}$	8.	$(\forall x)(\forall y)(Qy \rightarrow Rxy)$	7	IU	

10.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \land Qy \to Rxy)$		P	
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(Px \land Sy \to Rxy)$		P	
$\{3\}$	3.	Pa		P	
$\{1\}$	4.	$Pa \land Qy \to Ray$	1	EU	$[a\|x]$
$\{1,3\}$	5.	$Qy \to Ray$	$3,4$	T	
$\{2\}$	6.	$Pa \land Sy \to Ray$	2	EU	$[a\|x]$
$\{2,3\}$	7.	$Sy \to Ray$	$3,6$	T	
$\{1,2,3\}$	8.	$Qy \lor Sy \to Ray$	$5,7$	T	
$\{1,2,3\}$	9.	$(\forall y)(Qy \lor Sy \to Ray)$	8	IU	

8.3 Mais Notas

8.3.1 Provas Gerais

Regra da Generalização Existencial, G.E., $\exists^+$: Se φ é uma fórmula, t é um termo, v é uma variável, então $(\exists v)\varphi$ deduz-se de $\varphi[t|v]$ se a substituição de v por t for válida em φ.

Isto é: $\varphi[t|v] \vdash (\exists v)\varphi$ se a substituição de v por t em φ for válida.

Se Γ é um conjunto de fórmulas, tem-se: Se $\Gamma \vdash \varphi[t|v]$ então $\Gamma \vdash (\exists v)\varphi$ se a substituição de v por t em φ for válida.

Regra da Prova Existencial, P. E.: Se Γ é um conjunto de fórmulas, u e v são variáveis, φ e ψ são fórmulas, então φ deduz-se de Γ e de $(\exists u)\psi$ se φ se deduz de Γ e de $\psi[v|u]$ assumindo que

1. a substituição de u por v em ψ é válida,
2. v não ocorre livre em φ,
3. v não ocorre livre em nenhuma premissa de Γ.

Em símbolos: Se $\Gamma, \psi[v|u] \vdash \varphi$ então $\Gamma, (\exists u)\psi \vdash \varphi$ desde que a substituição de u por v em ψ é válida, v não ocorre livre em φ, e v não ocorre livre em nenhuma premissa de Γ.

8.4 Problemas

A. Dê uma prova formal de cada um dos seguintes argumentos.

1. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \wedge Bx \rightarrow Cx)$,
   $(\exists x)(Bx \wedge \neg Cx)$
   Conclusão: $(\exists x)(\neg Ax)$
2. **Premissas:** $(\forall x)(Px \rightarrow Qx)$,
   $(\exists x)(Rx \wedge \neg Qx)$,
   $(\forall x)(Rx \rightarrow Px \vee Sx)$
   Conclusão: $(\exists x)(Rx \wedge Sx)$
3. **Premissas:** $(\exists y)(\forall x)Rxy$
   Conclusão: $(\forall x)(\exists y)Rxy$
4. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(Dx \wedge Ey \rightarrow Fxy)$,
   $(\forall x)(\forall y)(Dx \wedge Fxy \rightarrow Gy)$
   Conclusão: $(\exists x)Dx \rightarrow (\forall x)(Ex \rightarrow Gx)$
5. **Premissas:** $(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Py \wedge Rxy \rightarrow Qya))$,
   $(\exists x)(Px \wedge \neg Qxa)$,
   $(\exists x)(\neg Px \wedge Qxa)$
   Conclusão: $(\exists x)(\exists y)(Px \wedge Py \wedge \neg Rxy)$
6. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(Rxy \wedge Ryz \rightarrow Rxz)$,
   $(\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow Ryx)$
   Conclusão: $(\forall x)(\exists y)Rxy \rightarrow (\forall x)Rxx$

B. Traduza cada um dos seguintes argumentos válidos para a linguagem do Cálculo de Predicados e prove-os formalmente.

1. Todos os gatos são mamíferos. Alguns gatos não têm cauda. Logo, alguns mamíferos não têm cauda.
2. Todos os estudantes admiram todos os lentes. Algun estudante admira algum professor. Algum professor universitário é simultaneamente lente e professor. Logo, há um estudante que admira algum professor universitário.
3. Todos os quadros do museu são obras-primas. Todo o artista que pinta uma obra-prima é um génio. Algum artista desconhecido pintou um quadro do museu. Logo, algum artista desconhecido é um génio.

C. As provas seguintes são correctas. Complete-as

1.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Ax \wedge Bx \rightarrow Cx)$	P
$\{2\}$	2.	$(\exists x)(Ax \wedge \neg Cx$	P
	3.	$Ay \wedge \neg Cy$	
	4.	$Ay \wedge By \rightarrow Cy$	
	5.	$\neg Cy$	
	6.	$\neg(Ay \wedge By)$	
	7.	$\neg Ay \vee \neg By$	
	8.	Ay	
	9.	$\neg By$	
	10.	$Ay \wedge \neg By$	
	11.	$(\exists x)(Ax \wedge \neg Bx)$	
$\{1,2\}$	12.	$(\exists x)(Ax \wedge \neg Bx)$	

2.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \rightarrow (\exists y)(Qy \wedge Rxy))$	P
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(Px \rightarrow (\forall y)(Rxy \rightarrow Sx))$	P
	3.	Px	
	4.	$Px \rightarrow (\exists y)(Qy \wedge Rxy)$	
	5.	$Px \rightarrow (\forall y)(Rxy \rightarrow Sx)$	
	6.	$(\exists y)(Qy \wedge Rxy)$	
	7.	$(\forall y)(Rxy \rightarrow Sx)$	
	8.	$Qz \wedge Rxz$	
	9.	$Rxz \rightarrow Sx$	
	10.	Sx	
	11.	Sx	
	12.	$Px \rightarrow Sx$	
$\{1,2\}$	13.	$(\forall x)(Px \rightarrow Sx)$	

D. As "provas" seguintes são incorrectas. Descubra quais as regras mal aplicadas (assinale as variáveis que devem ser marcadas).

1.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \to Qx)$	P
$\{2\}$	2.	$(\exists x)Px$	P
$\{3\}$	3.	Pz	P
$\{3\}$	4.	Py	$3,\ \forall^-[y\|z]$
$\{1\}$	5.	$Py \to Qy$	$1,\ \forall^-[y\|x]$
$\{1,3\}$	6.	Qy	$4, 5\,T$
$\{1,3\}$	7.	$(\forall y)Qy$	$6,\ \forall^+$
$\{1,2\}$	8.	$(\forall y)Qy$	$2, 3, 7\,P.E.[z\|x]$
$\{1\}$	9.	$(\exists x)Px \to (\forall y)Qy$	$2, 8\,P.C.$

2.

$\{1\}$	1.	$(\forall x)(Px \to Qx)$	P
$\{2\}$	2.	$(\forall x)(\exists y)(\neg Qx \to Rxy \wedge Sy)$	P
$\{3\}$	3.	$(\exists x)Px$	P
$\{4\}$	4.	Pz	P
$\{1\}$	5.	$Pz \to Qz$	$1\,\forall^-[z\|x]$
$\{1,4\}$	6.	Qz	$4, 5\,T$
$\{2\}$	7.	$(\exists y)(\neg Qz \to Rzy \wedge Sy)$	$2\,\forall^-[z\|x]$
$\{8\}$	8.	$\neg Qz \to Rzz \wedge Sz$	P
$\{1,4,8\}$	9.	$\neg(Rzz \wedge Sz)$	$6, 8\,T$
$\{1,4,8\}$	10.	$(\exists x)\neg(Rxx \wedge Sx)$	$9\,\exists^+[z\|x]$
$\{1,4,8\}$	11.	$(\exists x)Px \to (\exists x)\neg(Rxx \wedge Sx)$	$10\,T$
$\{1,2,4\}$	12.	$(\exists x)Px \to (\exists x)\neg(Rxx \wedge Sx)$	$7, 8, 11\,P.E.[z\|x]$
$\{1,2,3\}$	13.	$(\exists x)Px \to (\exists x)\neg(Rxx \wedge Sx)$	$3, 4, 12\,P.E.[z\|x]$

9 Aplicações das Estruturas Interpretativas

Argumentos inválidos. Conjuntos consistentes de fórmulas.

9.1 Notas

9.1.1 Argumentos Válidos

Um argumento com premissas Γ e conclusão φ é **válido** sse para qualquer estrutura interpretativa para $\Gamma \cup \{\varphi\}$, S, e qualquer sequência $\underline{a} \in S$, se $\underline{a}$ satisfaz Γ então $\underline{a}$ satisfaz φ.

Se todas as fórmulas de Γ forem sentenças obtemos um resultado análogo ao do Cálculo Proposicional.

Uma estrutura interpretativa onde todas as proposições de Γ são V e φ é F é um **contra-exemplo**, a sua existência acarreta a invalidade do argumento com premissas Γ e conclusão φ.

9.1.2 Consistência

Seja Γ um conjunto de fórmulas. Γ é **consistente** se não existe uma fórmula φ tal que $\Gamma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Para mostrar a consistência de Γ basta exibir uma estrutura interpretativa onde uma sequência satisfaz todas as fórmulas de Γ.

9.1.3 $\vdash$ versus $\models$

Se S é uma estrutura interpretativa para o conjunto de fórmulas Γ, S diz-se um **modelo** para Γ (em símbolos: $S \models \Gamma$) se todas as fórmulas de Γ são V em S.

Escrevemos $S \models \varphi$ em vez de $S \models \{\varphi\}$.

Se Γ é um conjunto de fórmulas e φ é uma fórmula, diz-se que Γ implica semanticamente φ, e escreve-se $\Gamma \models \varphi$, se o argumento com premissas Γ e conclusão φ é válido.

Teorema da Validade: Se $\Gamma \vdash \varphi$ então $\Gamma \models \varphi$.

Teorema da Completude: Se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$.

Teorema: As seguintes afirmações são eqivalentes:

1. Se $\Gamma \models \varphi$ então $\Gamma \vdash \varphi$

2. Para qualquer conjunto de proposições, Δ, se Δ é consistente então Δ tem modelo.

Teorema: Se Γ é um conjunto de proposições então Γ é consistente sse Γ tem modelo.

Teorema da Compacidade: Se Γ é um conjunto de proposições e φ é uma proposição, então se $\Gamma \models \varphi$ existe uma parte finita $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \models \varphi$.

Teorema: Seja Γ um conjunto infinito de proposições. Então Γ é consistente sse toda a parte finita de Γ é consistente.

Teorema: Se Γ é um conjunto de proposições tal que cada sua parte finita tem modelo, então Γ tem modelo.

9.2 Problemas

A. Para cada um dos seguintes argumentos exiba uma prova formal se o argumento for válido, ou um contra-exemplo se for inválido.

   1. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to Cx)$,
      $(\forall x)(Bx \to Dx)$,
      $(\exists x)Ax$,
      $(\exists x)\neg Dx$
      Conclusão: $(\exists x)(Cx \wedge \neg Bx)$
   2. **Premissas:** $(\forall x)(Ax \to (\forall y)(\neg By \to Cxy))$,
      $(\exists x)(Ax \wedge (\forall y)(Dy \to \neg Cxy))$
      Conclusão:$(\forall x)(Dx \to Bx)$.

B. Prove que cada um dos seguintes conjunto de premissas é consistente.

   1. Todos os búfalos têm chifres. Todos os búfalos são animais. Alguns animais não têm chifres.
   2. Toda a gente está a olhar para alguém. Alguém não está a ser olhado por toda a gente.
   3. Há um problema que só matemáticos conseguem resolver. Nenhum matemático consegue resolver todos os problemas.

C. Para cada um dos seguintes conjuntos de premissas, se se tratar dum conjunto consistente exiba um modelo, se se tratar de um conjunto inconsistente deduza formalmente uma contradição.

   1. $(\forall x)(Px \vee Qx)$, $(\exists x)(Px \to Rx)$, $(\exists x)(Qx \to Rx)$, $(\forall x)\neg Rx$.
   2. $(\exists x)Px \to (\forall x)Qx$, $Qa \wedge (\exists x)(Px \wedge \neg Qx)$.
   3. $(\forall x)((\forall y)Py \to Qx)$, $(\forall x)Px$, $(\exists y)\neg Qy$.

10 Teoremas Lógicos e Fórmulas Válidas

Teoremas lógicos. Fórmulas válidas. Mais regras de inferência.

10.1 Notas

10.1.1 $\vdash$

φ é um **teorema lógico** se φ se pode deduzir do vazio ($\vdash \varphi$).
φ **implica logicamente** ψ se $\varphi \to \psi$ é teorema lógico ($\vdash \varphi \to \psi$).
φ e ψ são **logicamente equivalentes** se $\varphi \leftrightarrow \psi$ é teorema lógico ($\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$).

11 $\models$

φ é **válida** se φ é V em todas as estruturas interpretativas para φ ($\models \varphi$).
φ **implica semanticamente** ψ se o argumento co premissa φ e conclusão ψ é válido ($\varphi \models \psi$).
φ e ψ são **semanticamente equivalentes** se $\varphi \models \psi$ e $\psi \models \varphi$.

12 $\vdash \varphi$ sse $\models \varphi$

Regra dos Teoremas Lógicos, T. L.: A fórmula φ pode ocorrer numa linha de uma prova se há uma dedução construtiva de φ do vazio ou se há fórmulas ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n precedendo φ tais que existe uma dedução construtiva de $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_n \to \varphi$.

Deduções construtivas são as que usam a regra **T** ou as outras estudadas anteriormente.

Regra das Fórmulas Logicamente equivalentes, L. E.: Se φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 são fórmulas tais que φ_2 se obtem de φ_1 substituindo algumas ocorrências de ψ_1 em φ_1 por ψ_2 e se ψ_1 e ψ_2 são logicamente equivalentes, então pode deduzir-se φ_2 de φ_1. Tem-se $\vdash \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$.

12.1 Problemas

A. Mostre que se φ é uma fórmula e x uma variável, se tem

1. $\vdash \neg(\forall x)\varphi \leftrightarrow (\exists x)\neg\varphi$.
2. $\vdash \neg(\exists x)\varphi \leftrightarrow (\forall x)\neg\varphi$.
3. $\vdash \neg(\forall x)\neg\varphi \leftrightarrow (\exists x)\varphi$.

B. Sejam φ, ψ fórmulas e x uma variável que não é livre em φ. Mostre que são teoremas lógicos:

1. $(\forall x)(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\varphi \wedge (\forall x)\psi$.
2. $(\exists x)(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\exists x)\psi)$.
3. $(\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi)$.
4. $(\exists x)(\psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow ((\forall x)\psi \rightarrow \varphi)$.

13 A Identidade

Regras para a identidade. Provas. Estruturas interpretativas. A identidade em Matemática.

13.1 Notas

13.1.1 Regras para a Identidade

Ia: Para cada variável x, $(\forall x)(x = x)$ é teorema lógico.

Se x é uma variável, t é um termo e φ é uma fórmula, então $\varphi[x, t|x]$ é a fórmula que se obtem de φ substituindo *algumas* ocorrências livres de x por t.

Ib: $\vdash (\forall x)(x = t \rightarrow (\varphi \leftrightarrow \varphi[x, t|x])$ se a substituição de x por t é válida.

Ic: $\vdash (\forall x)(\forall y)(x = y \rightarrow y = x)$.

Id: $\vdash (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$.

Em todas as estruturas interpretativas "=" deve ser interpretado como identidade, isto é, $\underline{a} = \underline{b}$ significa que $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são o mesmo elemento do universo.

13.2 Problemas

Para cada um dos seguintes argumentos exiba uma prova no caso de ser válido, um contra-exemplo no caso de ser inválido

1. **Premissas:** $(\exists x)(Jx \wedge Kx)$,

   $(\forall x)(Jx \to x = c)$

   Conclusão: $Ka \wedge a = c$.

2. **Premissas:** $(\forall x)(Rax \to a = x \vee a = b)$,

   $(\exists x)Rax$,

   $Sa \wedge \neg Sb$

   Conclusão: Raa.

3. **Premissas:** $(\exists x)(Px \wedge (\forall y)(Py \to x = y))$,

   Conclusão: $(\exists x)(\forall y)(Py \leftrightarrow x = y)$.

4. **Premissas:** $(\forall x)(\forall y)(Pxy \to Pyx)$,

   $(\forall x)Pxf(x)$

   Conclusão: $(\forall x)Pf(f(x))f(x)$.

14 Bibliografia

Bibliografia

- A. Franco de Oliveira, *Lógica e Aritmética*, Gradiva 1996
- W. H. Newton-Smith, *Lógica: um Curso Introdutório*, Gradiva 1998
- J. E. Rubin, *Mathematical Logic: Applications and Theory*, Saunders College Publishing 1990
- A. Weston, *A Arte de Argumentar*, Gradiva 1996