

Chapter 1

Jogos Nim

Jogos combinatórios imparciais

Este capítulo trata de uma classe de jogos que dispõe de uma teoria matemática muito rica. Apresentaremos aqui, de forma coloquial, os conceitos e resultados mais imediatamente relacionados com a sua prática, indicando a bibliografia adequada aos interessados ([?, ?]).

Estes jogos, também conhecidos por jogos Nim, são caracterizados pelas seguintes condições:

1. Há dois jogadores;
2. Há um conjunto bem definido de posições possíveis do jogo;
3. Em cada posição, as jogadas permitidas aos jogadores são as mesmas (não há Brancas e Negras, ou outras formas de distinguir os jogadores);
4. Os jogadores jogam alternadamente;
5. O jogo acaba quando se atinge uma posição da qual não se pode efectuar nenhuma jogada legal;
6. Ganha o último a jogar. Isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde;
7. O jogo acaba num número finito de jogadas, independentemente da forma como é jogado.

Analisemos o jogo seguinte, que parte de uma pilha de 17 feijões. Há dois jogadores e cada jogada consiste em retirar um, dois ou três feijões. Ganha quem retirar o último feijão.

Para compreender bem este jogo, devemos fazer uma análise retrógrada, a partir da posição final (que corresponde a zero feijões). Se houver um, dois ou três feijões, o jogador seguinte retira todos os feijões e ganha. Se houver quatro, o caso é diferente, o jogador seguinte vai tirar um (deixando três), dois (deixando dois) ou três (deixando um). Em qualquer dos casos o jogador seguinte retira-os a todos e ganha. Deixar zero ou quatro é um bom objectivo: garante a vitória a quem o faz. De forma semelhante, constata-se que, se deixarmos oito, doze ou dezasseis, o resultado também é favorável.

Estas posições, que garantem a vitória de quem as deixa ao adversário, chamam-se *posições P*, ou *P-posições*. As posições que não forem posições P dão, necessariamente, a vitória ao jogador a que cabe a jogada seguinte e designam-se por *posições N* ou *N-posições*¹. O conjunto de todas as P-posições designa-se por $\mathcal{P}$ e o conjunto das N-posições por $\mathcal{N}$.

No exemplo anterior vimos que as P-posições eram 0, 4, 8, 12, 16. Tem-se

¹As iniciais P e N são tradicionais na literatura especializada, e têm origem nas palavras inglesas *previous* (prévio) e *next* (seguinte).

então

$$\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12, 16\}, \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17\}.$$

Se em vez de 17 tivéssemos outro número de feijões, era fácil ver que as P-posições são sempre os múltiplos de 4.

Dado um jogo combinatório imparcial é sempre possível determinar quais são as posições P e N, em princípio. Basta partir das posições terminais, que são P-posições, e classificar as seguintes segundo o algoritmo seguinte:

1. Todas as posições terminais são P-posições;
2. Todas as posições das quais se pode atingir uma P-posição, numa jogada, são N-posições;
3. Todas as posições das quais só se podem atingir posições N, numa jogada, são P-posições;
4. Se o passo anterior (3) não introduziu novas posições-P, o algoritmo termina aqui; caso contrário, deve ir-se de novo para o passo 2.

Outra forma de referir esta partição no conjunto das posições de um jogo imparcial é a seguinte:

Caracterização de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$. As posições P e N são definidas recursivamente pelas condições seguintes:

- i) Todas as posições terminais são P-posições;
- ii) De qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P-posição;
- iii) De qualquer P-posição todas as jogadas conduzem a N-posições.

Jogos de Subtracção

A partir de um conjunto da forma $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ (de feijões, por exemplo) podemos definir um jogo semelhante ao analisado acima, mas alterando o número de feijões que se pode retirar em cada jogada. O caso referido correspondia a ser legítimo retirar 1, 2 ou 3 feijões. Dizemos que se tratava do jogo de subtracção relativo ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e representámo-lo por $S_{\{1,2,3\}}$.

Podemos agora considerar os mais diversos jogos de subtracção fazendo variar o conjunto associado. Analisemos, por exemplo, o jogo $S_{\{2,3\}}$.

As posições terminais são 0, 1, que são, portanto, posições P. As posições que nos permitem atingir uma terminal numa jogada só são 2, 3, 4, que então são posições N. De 5 ou 6 só se podem atingir as posições 2, 3, 4, portanto 5 e 6 são posições P. O padrão começa a ficar evidente...

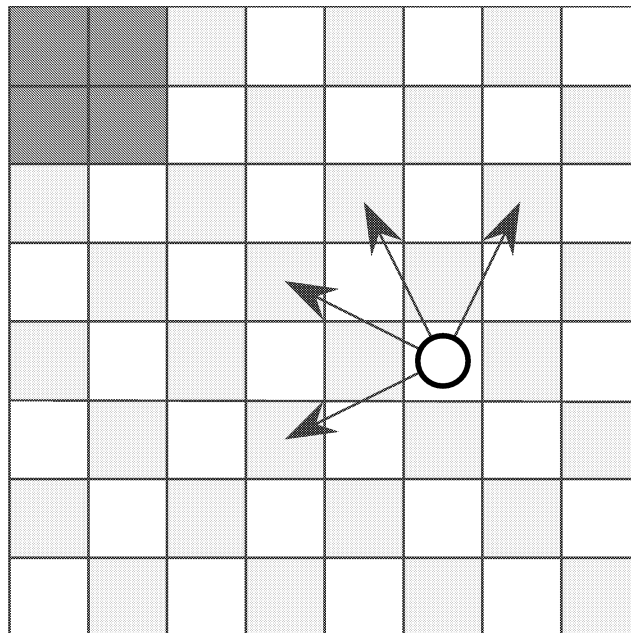
Tem-se

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
<i>P</i>	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>P</i>	<i>P</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	...

Há outros jogos que podem ser analisados desta forma, mesmo jogos de tabuleiro. As páginas seguintes contêm algumas propostas para os leitores identificarem as posições P e N e, assim, ficarem mestres absolutos destes jogos.

Cavalo branco

Este jogo joga-se num tabuleiro quadriculado rectangular; pode ser um tabuleiro de xadrez. No início há uma peça única no tabuleiro, um cavalo branco. Cada jogada consiste em movimentar o cavalo segundo uma das direcções assinaladas na figura abaixo. Quando o cavalo chega a uma das casas sombreadas não pode movimentar-se mais e o jogo termina com a vitória do jogador que o colocou lá.

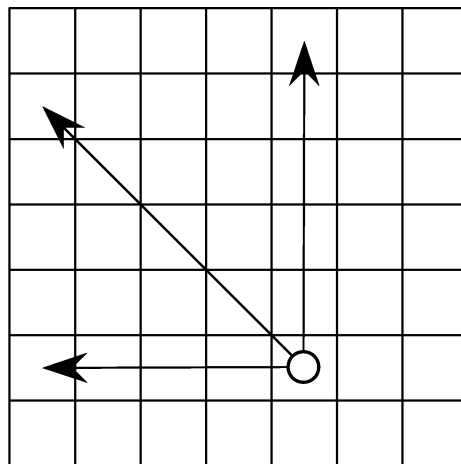


Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Whitoff-I

Num tabuleiro rectangular, por exemplo de xadrez, coloca-se uma rainha. Cada jogada consiste em movimentar esta peça com a restrição seguinte: a rainha tem os seus movimentos habituais, mas só pode movimentar-se para Norte, Oeste ou Noroeste. A figura mostra as direcções admitidas. Os jogadores alternam até que um deles não possa jogar, por encontrar a peça no canto superior esquerdo, sendo declarado vencedor o jogador que aí a colocou.



Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Whitoff-II

Neste jogo com duas pilhas de feijões, cada jogada consiste numa das seguintes possibilidades:

1. Escolher uma das pilhas e reduzir o seu número de feijões (tirar pelo menos um, mas pode tirar toda a pilha);
2. Retirar o mesmo número de feijões de ambas as pilhas.

Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

JIL

Este jogo, inventado por Jorge Nuno Silva, desenrola-se num n -uplo de inteiros não negativos. Os jogadores alternam jogadas, de acordo com os pontos seguintes:

1. Uma jogada consiste em subtrair uma unidade a uma componente qualquer do n -uplo e somar quantidades não negativas arbitrárias às componentes de ordem superior, se as houver.

2. Quem não puder jogar, por, sendo a sua vez, ter à sua frente um n -uplo com todas as componentes nulas, perde.

Vejamos um exemplo. Para $n = 5$ e posição inicial $(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2})$ temos, por exemplo, esta sequência de lances legais:

$$(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2} - 1).$$

Será que este jogo acaba, seja qual for a configuração inicial? Isto é, dado um n -uplo inicial arbitrário, e respeitando as regras 1 e 2 acima, será que encontraremos um vencedor num número finito de jogadas?

Admitindo que o jogo termina sempre após um número finito de jogadas, qual é a estratégia ganhante (isto é, quais são $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$)?

Por exemplo, partindo da posição

$$(22, 222, 2, 3, 2^3, 10),$$

ganha o primeiro ou o segundo jogador?

Referências

Silva, J. N., “Notas sobre o Problema anterior e JIL-Jogo Indefinidamente Longo”, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 43, Outubro de 2000, pp. 143–147

Silva, J. N., “Notas sobre o Problema anterior e Exponenciação Comutativa”, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 44, Abril de 2001, pp. 119–121

LIM

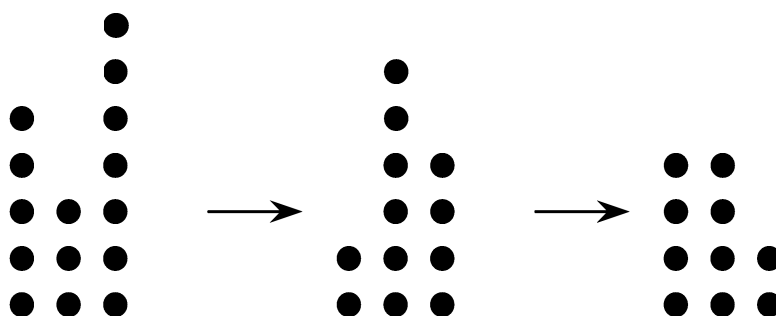
Este jogo, inventado por Jorge Nuno Silva, utiliza três pilhas de feijões.

Cada jogada consiste em escolher duas pilhas, retirar o mesmo número de feijões de cada uma delas e somar esse número à terceira. Perde o jogador que não puder jogar, por, na sua vez, encontrar duas pilhas vazias.

Por exemplo, eis duas jogadas válidas:

$$(5, 3, 7) \mapsto (2, 6, 4) \mapsto (4, 4, 2).$$

Ou, em diagrama:



Referências

Silva, J. N., “Notas sobre o Problema anterior e LIM”, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 46, Abril de 2002, pp. 119–124.

Silva, J. N., “Notas sobre o Problema anterior e Corpo Estranho”, Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 47, Outubro de 2002, pp. 97–100.

Nim

Este clássico foi o primeiro jogo combinatório a ser tratado matematicamente, no artigo de Bouton [?].

Joga-se com pilhas de feijões. Cada jogador, quando lhe toca jogar, pode retirar feijões de uma pilha à sua escolha, mas quantos quiser, de um mínimo de um a um máximo de toda a pilha.

Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Se o jogo envolver somente uma pilha de feijões, a caracterização é muito simples. Se a pilha não for vazia, o próximo jogador ganha, retirando todos os feijões. Se a pilha for vazia, o jogador anterior ganhou.

Com uma pilha, o Nim é demasiado evidente:

número de feijões	0	1	2	3	4	...
tipo	P	N	N	N	N	...

Com duas pilhas, o jogo também não é difícil. Se as pilhas forem diferentes, o jogador seguinte iguala-as e, a partir daqui, copia a jogada do adversário. Por exemplo, se duas pilhas, com 4 e 6 feijões, forem representadas pelo par $(4, 6)$, então a boa jogada é para $(4, 4)$. A partir de então, o que um jogador fizer numa pilha, o adversário faz na outra. Este tipo de estratégia, que replica as jogadas do adversário, é conhecida por *Tweedledum e Tweedledee*.

A caracterização das posições do Nim com duas pilhas:

$$(n, m) \text{ é } \begin{cases} P & \text{se } n = m \\ N & \text{se } n \neq m \end{cases}$$

No caso de três pilhas a análise não é tão simples. Necessitamos de novos conceitos para determinar a estratégia ótima.

A *Soma-nim* de dois inteiros não negativos x, y obtém-se representando-os em base 2 e somando os respectivos coeficientes módulo 2 (isto é, $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$) e representa-se por $x \oplus y$.

Determinemos, por exemplo, $5 \oplus 7$. Tem-se $5 = 2^2 + 1$, $7 = 2^2 + 2 + 1$, o que pode ser condensado para

$$5 = (101)_2 \quad 7 = (111)_2$$

Efectuando a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, obtemos

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 1 \\ + \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 0 \end{array}$$

portanto, como $(010)_2 = 2$, tem-se $5 \oplus 7 = 2$.

A soma-nim goza de todas as boas propriedades:

1. Associativa: Tem-se $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
2. Comutativa: Tem-se $x \oplus y = y \oplus x$;
3. 0 é neutro: $0 \oplus x = x$;
4. Cada número é o seu próprio inverso: $x \oplus x = 0$;
5. Vale a lei do corte: Se $x \oplus y = z \oplus y$ então $x = z$.

A importância desta soma reside no facto de Bouton ter caracterizado as posições do jogo Nim geral em termos da soma-nim dos números de feijões nas diversas pilhas. Se representarmos a posição com n pilhas, com número de feijões $x_1, \dots, x_n$ por $(x_1, \dots, x_n)$, temos o

Teorema de Bouton: A posição $(x_1, \dots, x_n)$ é uma posição P se, e somente se, $x_1 \oplus \dots \oplus x_n = 0$.

Repare-se que este teorema inclui os casos de o jogo ter somente uma ou duas pilhas, que analisámos antes.

Vejamos um exemplo.

Consideremos o jogo Nim com quatro pilhas $(3, 5, 7, 9)$. Determinemos $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9$. Como $3 = (11)_2$, $5 = (101)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$, temos

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

portanto $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 8$. Trata-se de uma posição N. A única jogada vencedora é a que retira 8 feijões à coluna com 9, porque $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 1 = 0$, como se pode verificar²:

$$\begin{array}{rcccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

²Aqui, como antes, é irrelevante se escrevemos, ou não, os zeros à esquerda.

Apresentamos a teoria do Nim de forma mais extensa porque muitos outros jogos se tornam acessíveis se a conhecermos bem.

Alguns dos jogos que apresentamos reduzem-se a versões do Nim: é preciso é identificar onde estão as pilhas de feijões e quais os respectivos disfarces...

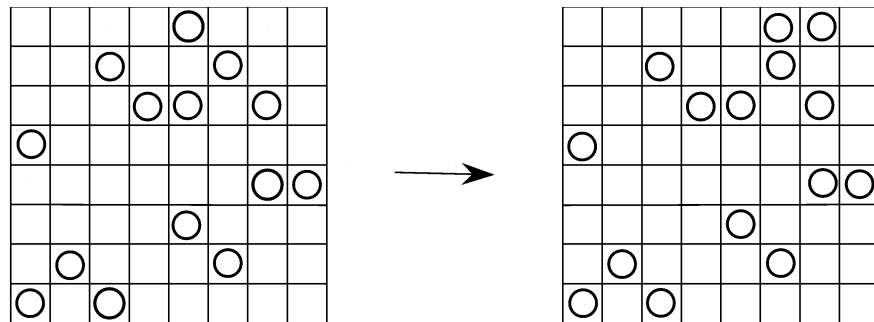
Vejamos, de seguida, alguns desses disfarces.

Plainim

Num tabuleiro de xadrez colocam-se várias peças iguais. Numa jogada só se podem retirar e adicionar peças numa única linha do tabuleiro. Cada casa pode conter, no máximo, uma peça. Uma jogada consiste em retirar uma peça e, nas casas à direita dessa (se as houver), colocar e remover peças à vontade. Isto é, as casas à direita da peça retirada podem permanecer como estavam (ocupadas ou vazias) ou passar de ocupadas a vazias ou de vazias a ocupadas.

Ganha o que retirar a última peça.

Eis um exemplo de jogada legal, onde se jogou na última linha, retirando uma peça e juntando, à direita desta, duas outras.



Notas

Se identificarmos cada casa vazia do tabuleiro com 0 e cada casa ocupada com 1, obtemos em cada linha a representação binária de um número inteiro não negativo.

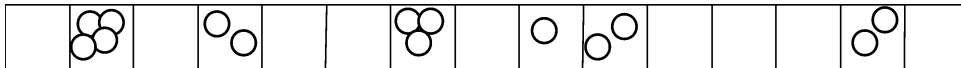
A analogia com o Nim torna-se, assim, evidente.

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Nimble

Este jogo ocorre numa tira $1 \times n$. No início há algumas moedas, em posições escolhidas aleatoriamente. Cada jogada consiste em escolher uma moeda e em movimentá-la para a esquerda o número de casas que se quiser. Cada casa pode conter qualquer número de moedas. Pode-se saltar sobre casas ocupadas. O jogo termina quando todas as peças estiverem na casa mais à esquerda da tira. Ganha o último a jogar.



Notas

Para cada moeda considere-se a sua distância à casa situada na extremidade esquerda da tira. Obtemos assim alguns números inteiros não negativos. Cada jogada consiste, no fundo, em escolher um deles e em substituí-lo por um menor.

Não será este jogo semelhante ao Nim com pilhas com esses números de feijões?

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Tartarugas

Este jogo foi concebido por H. Lenstra. Uma fila de n moedas é colocada na mesa. Há as que mostram a **F**ace e as que mostram o **V**erso. Por exemplo, com $n = 13$, poderíamos ter

$V \quad F \quad V \quad V \quad F \quad V \quad V \quad V \quad F \quad F \quad V \quad F \quad V$

Cada jogada consiste em escolher uma moeda que tenha a Face virada para cima, em voltá-la, e, querendo, em escolher uma moeda à esquerda da anterior e em alterar o seu estado (de F para V ou de V para F). Ganha quem voltar a última Face para Verso, isto é, perde quem não puder jogar.

Uma implementação alternativa consiste em utilizar peças de damas e em identificar F com branco e V com negro. Assim, uma jogada consiste em substituir uma peça branca por uma negra e, querendo-se, em escolher outra peça à esquerda da anterior e em alterar a sua cor. O jogo acaba quando todas as peças forem negras e ganha quem realizar a última jogada.

A posição correspondente à disposição acima é:



Notas

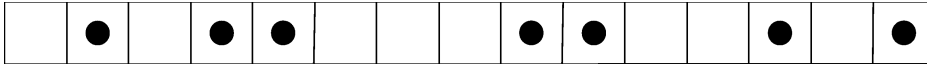
A identificação natural seria considerar cada Face como uma pilha Nim e o número de feijões fornecido pela distância da moeda à extremidade esquerda da tira. Mas uma jogada Nim consiste em substituir uma pilha por outra estritamente menor... Como fazê-lo com as moedas? Talvez valha a pena recordar que, na operação que introduzimos na página 11, a soma é igual à subtração, isto é, $x \oplus x = 0$...

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Moedas

Este jogo faz-se numa tira $1 \times n$. No início há algumas moedas, em posições escolhidas aleatoriamente, não mais do que uma em cada casa. Cada jogada consiste em escolher uma moeda e em movimentá-la para a esquerda, para uma casa livre, sem saltar sobre nenhuma outra peça. Como cada casa pode albergar, no máximo, uma moeda, e estas não podem abandonar a fita, e só se podem movimentar da direita para a esquerda, o jogo vai terminar quando as peças estiverem todas encostadas à parte esquerda da tira de jogo. Ganha o último a jogar.



Notas

A identificação de cada moeda com a distância à casa esquerda final não funciona, porque não é permitido saltar outras moedas, de forma que uma jogada não consiste em diminuir essa distância da forma que quisermos.

Neste caso, identificando, alternadamente, cada espaço entre duas moedas consecutivas, da direita para a esquerda, com uma pilha com esse número de feijões, obtemos um jogo Nim (no nosso caso, com pilhas de 1, 0, 0, 1 feijões). Cada jogada na tira de moedas pode diminuir quanto se quiser a esses números. Mas algumas jogadas também os podem aumentar. Acontece que essas jogadas são em número finito, e quem tiver estratégia vencedora no jogo Nim associado não necessita de recorrer a elas...

Referências

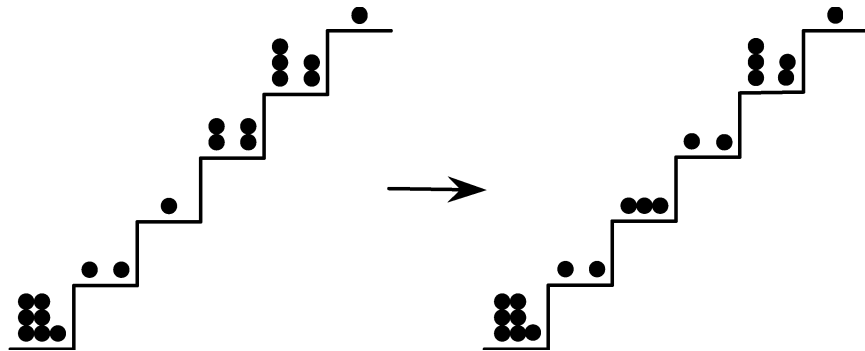
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Escadas

Há n degraus numa escada. Cada degrau contém um número inteiro não negativo de peças. Cada jogada consiste em passar algumas peças de um degrau para o degrau imediatamente abaixo. Perde quem, ao querer jogar, constatar que todas as peças se encontram já no andar térreo, de onde se não podem mover mais.

Outra implementação consiste em colocar peças de damas em casas consecutivas de uma fila de um tabuleiro, sendo permitido deslocar algumas de uma casa para a que lhe estiver imediatamente à esquerda.

Um n -uplo de inteiros não negativos pode representar a situação em cada momento. Assim, a jogada $(7, 2, 1, 4, 5, 1) \mapsto (7, 2, 3, 2, 5, 1)$ corresponde à jogada ilustrada abaixo.



Notas

Numere os degraus, a partir da esquerda. Considere o jogo Nim correspondente aos degraus de numeração par. Cada jogada nas escadas corresponde a retirar feijões de uma das pilhas obtidas, ou a aumentá-lo, mas estes aumentos podem ser imediatamente anulados (movendo as mesmas peças), e não duram sempre...

Northcott

Este jogo realiza-se num tabuleiro quadriculado $n \times m$. Há dois jogadores; um move as Brancas, o outro as Negras. Em cada coluna há uma peça branca e uma peça negra. Cada jogada consiste em movimentar uma peça para a frente ou para trás o número de casas que se quiser, desde que não se abandone a sua coluna e não se salte sobre a outra peça. Perde quem, por ter todas as suas peças encurraladas, não dispõe de nenhum lance legal.

Uma posição inicial possível:

○	○			○			
		○			○	○	
	●				●		○
●						●	
			○				
			●	●			●
		●					

Notas

Considere o jogo Nim com uma pilha de feijões por cada coluna do tabuleiro, e com o número de feijões dado pelo número de casas entre as duas peças da coluna.

Mais uma vez, os lances que não existem no Nim original só serão utilizados pelo perdedor, e somente para adiar um pouco a derrota inevitável...

A existência de Brancas e Negras não violam o princípio da página 3, porque a única coisa relevante é o número de casas entre as duas peças da mesma coluna.

Referências

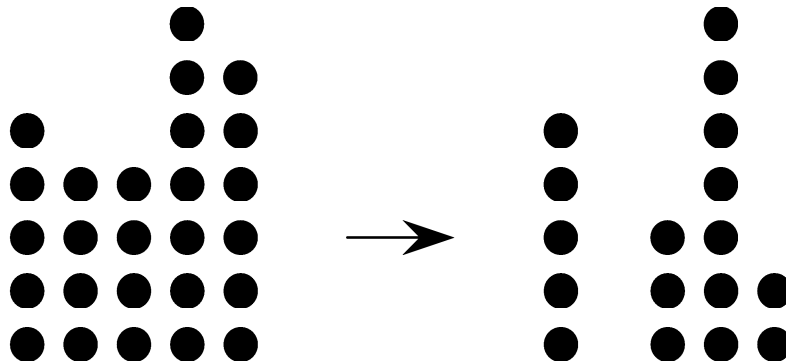
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Nim_k

Neste jogo, criado por H. Moore, parte-se de n pilhas de feijões. Cada jogada consiste em retirar o número de feijões que se quiser de k pilhas (k é um número fixado no começo do jogo, $k < n$, e tem de se retirar pelo menos um feijão de uma pilha). Podem retirar-se diferentes quantidades de pilhas diferentes, podendo algumas ser nulas. Perde quen não dispuser de nenhum lance legal.

Para $k = 1$ temos o Nim habitual.

Um exemplo de jogada legal, com $n = 5, k = 3$, correspondente a $(5, 4, 4, 7, 6) \mapsto (5, 0, 3, 7, 2)$.



Notas

O método de representação binária desempenhou um papael importante na compreensão do Nim. Talvez aqui também necessitemos de outra base...

Referências

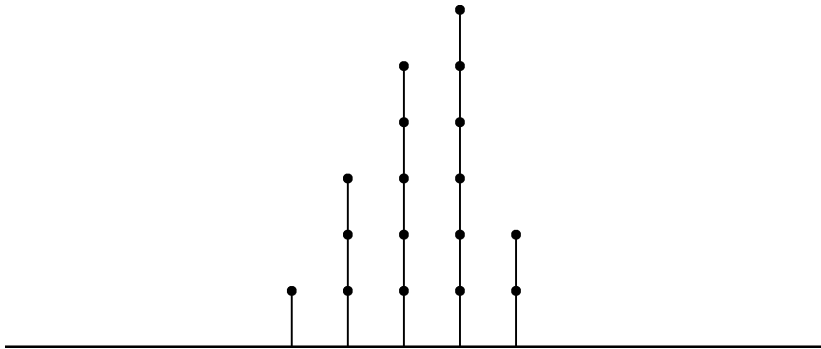
Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman and Company, 1986.

Nim com bloqueio

Joga-se com pilhas de feijões. Cada jogador, quando lhe toca jogar, pode retirar feijões de uma só pilha, mas quantos quiser, de um mínimo de um a um máximo de toda a pilha. Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Nesta versão, cada jogador, antes de jogar, ouve o seu adversário anunciar um bloqueio, isto é, para cada pilha, o adversário diz um número de feijões que *não* pode retirar dessa pilha.

Por exemplo, a posição correspondente a pilhas de 1,3,5,6,2 terá o seguinte aspecto.



Referências

George Washington University Problems Group, “Blocking Nim”, *College Mathematics Journal*, vol. 35, n.º 5, Novembro de 2002, pp. 414–415.

Jogos em grafos

Nesta secção vamos aprender a representar jogos imparciais utilizando grafos, o que permite ficar a saber um pouco mais do que a caracterização das posições em dois tipos, P e N.

Fixemos alguns conceitos.

Digrafo ou Grafo Dirigido é um sistema constituído por um conjunto de *vértices* (as posições do jogo) X e uma função F que faz corresponder a cada elemento de X , x , um subconjunto de X ($x \mapsto F(x) \subset X$). Representa-se por (X, F) . $F(x)$ é o conjunto das posições para as quais se pode jogar a partir de x . Se $F(x)$ for vazio, diz-se que x é *terminal*.

Para termos um jogo num grafo basta escolher um vértice inicial, x_0 , e estipular que os jogadores alternam, escolhendo, para cada vértice x , um outro em $F(x)$. Se um jogador tiver de mover a partir de um vértice y para o qual se tem $F(y)$ vazio e não puder efectuar o seu movimento perde.

Só consideramos grafos para os quais os jogos são finitos.

Os jogos sobre grafos podem ser analisados classificando os seus vértices P e N, a partir dos vértices terminais, por um processo semelhante ao referido anteriormente.

Contudo, vamos introduzir uma função, que nos dá informação adicional, que virá a ser útil mais tarde, quando jogarmos vários jogos ao mesmo tempo.

Relembremos que, dado um conjunto de números inteiros não negativos, A , se representa por $\text{mex } A$ o menor inteiro não negativo que não pertence a A ³. Por exemplo, $\text{mex } \{0, 1, 3, 44\} = 2$.

A função de Grundy de um grafo (X, F) é a função $g : X \rightarrow \mathbb{N}_0$ definida por⁴

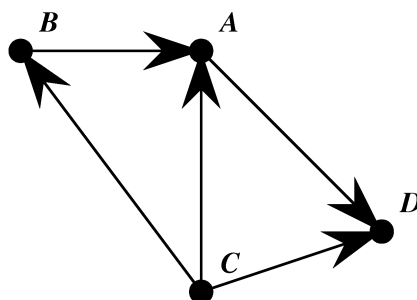
$$g(x) = \text{mex } \{g(y) : y \in F(x)\}$$

Note-se que o valor da função de Grundy se calcula recursivamente. Para cada x , o valor de $g(x)$ depende dos valores que $g(y)$ toma quando y percorre $F(x)$. Devemos então começar esta recursão nos vértices terminais, x , para os quais $F(x)$ é vazio, o que nos dá, neste caso, $g(x) = 0$.

Vejamos um exemplo muito simples.

³*mex* substitui a expressão **mínimo excluído**.

⁴Representamos por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos inteiros não negativos.

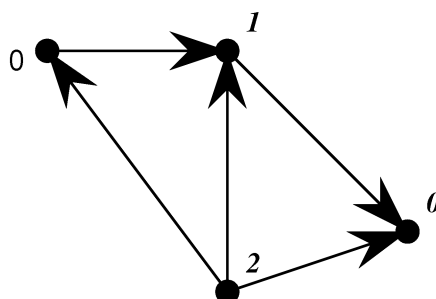


D é um vértice terminal, logo tem-se $g(D) = 0$. Não há mais vértices terminais. Como $F(A) = \{D\}$, e conhecemos $g(D)$, podemos calcular $g(A)$. Tem-se

$$g(A) = \text{mex} \{g(D)\} = \text{mex} \{0\} = 1.$$

Temos agora $g(B) = \text{mex} \{g(A)\} = \text{mex} \{1\} = 0$. Finalmente, $g(C) = \text{mex} \{g(A), g(B), g(D)\} = \text{mex} \{0, 1\} = 2$.

Colocando o valor da função de Grundy perto de cada vértice:



Note-se que, num jogo Nim, a função de Grundy de uma pilha coincide com o seu número de feijões.

Consideremos de novo o jogo de subtração $S_{\{2,3\}}$. Não precisamos de desenhar o grafo para determinar os valores da função de Grundy nas posições deste jogo. As posições terminais são 0, 1, portanto $g(0) = g(1) = 0$. Tem-se $F(2) = \{0\}$, logo $g(2) = \text{mex} \{0\} = 1$. De forma semelhante se conclui que $g(3) = 1$. Como $F(4) = \{1, 2\}$, tem-se $g(4) = \text{mex} \{g(1), g(2)\} =$

$\text{mex}\{0, 1\} = 2$. Como $F(5) = \{2, 3\}$, tem-se $g(5) = \text{mex}\{g(2), g(3)\} = \text{mex}\{1\} = 0$. E assim sucessivamente. Depressa emerge um padrão:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$g(x)$	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	...

Comparando com a análise anterior deste jogo, vemos que as posições $\mathcal{P}$ são exactamente aquelas que anulam a função de Grundy. Este fenómeno é geral, como se compreende facilmente da definição da função de Grundy e da caracterização de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$:

1. $g(x) = 0$ se x for terminal;
2. Se $g(x) = 0$ e $y \in F(x)$, então $g(y) \neq 0$;
3. Se $g(x) \neq 0$, então, para algum $z \in F(x)$, tem-se $g(z) = 0$.

Soma de jogos imparciais

Uma forma de jogar vários jogos ao mesmo tempo consiste no seguinte. Se houver n jogos, um jogador, na sua vez, escolhe um deles e efectua nele uma jogada, deixando todos os outros inalterados. Os jogadores alternam até se atingir uma posição terminal em todos os jogos. Ganha quem fez a última jogada legal. Este novo jogo imparcial chama-se *soma* dos jogos originais.

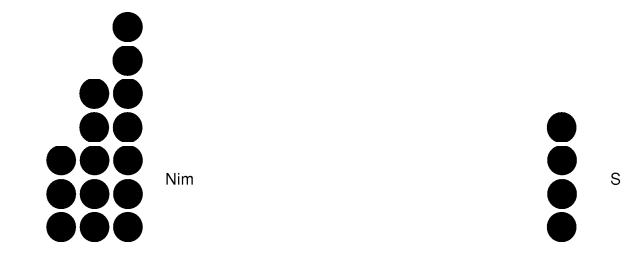
Esta é uma das formas de gerar novos jogos a partir de jogos conhecidos. Acontece que às vezes os jogos são simples, mas a sua soma é complicada... Por exemplo, num jogo Nim com várias pilhas, temos a soma de vários jogos muito simples.

Há um resultado que permite conhecer a função de Grundy da soma a partir das funções de Grundy das parcelas. Para o enunciarmos, na linguagem dos grafos, suponhamos que os jogos são $(X_1, F_1), \dots, (X_n, F_n)$, aos quais correspondem as funções de Grundy $g_1, \dots, g_n$, respectivamente. Cada posição da soma destes jogos pode identificar-se com um n -uplo de posições dos jogos-parcelas, $(x_1, \dots, x_n)$, onde $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$. Então, a função de Grundy da soma é g , definida por

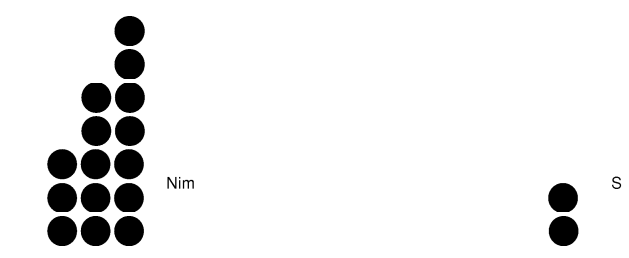
$$g(x_1, \dots, x_n) = g_1(x_1) \oplus \dots \oplus g_n(x_n).$$

Como sabemos que as posições P da soma são as que anulam a respectiva função de Grundy, basta saber as funções de Grundy dos jogos individuais para ficarmos a saber, mediante uma simples soma nim, qual a forma óptima de jogar a soma!

Como exemplo vamos analisar o jogo obtido ao somar um jogo, J_1 , que é Nim com três pilhas, com 3, 5, 7 feijões e um jogo, J_2 , de subtracção, $S_{\{2,3\}}$ relativo a uma pilha com 4 feijões.



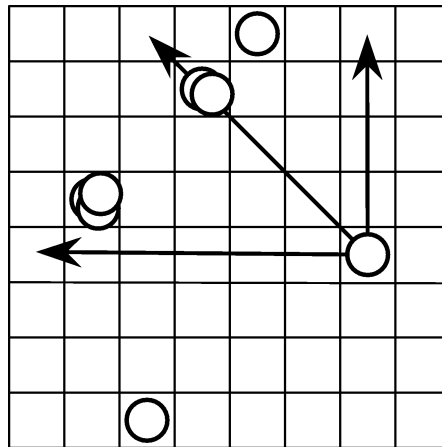
Determinemos o valor da função de Grundy da componente Nim: $3 \oplus 5 \oplus 7 = 1$. No jogo $S_{\{2,3\}}$, a uma pilha de 4 feijões corresponde o valor de Grundy de 2, como vimos na página 5. Portanto, à soma destes dois jogos corresponde o valor $1 \oplus 2 = 3$. Trata-se de uma posição N. Uma boa jogada consiste em retirar 2 feijões da pilha correspondente ao jogo $S_{\{2,3\}}$, já que, neste jogo, uma pilha de 2 tem valor Grundy 1 e $1 \oplus 1 = 0$. Obter-se-ia então a posição ilustrada abaixo:



Será que esta era a única jogada ganhadora?

Rainhas

Este jogo joga-se num tabuleiro quadriculado rectangular de tamanho $n \times m$, que pode ser um tabuleiro de xadrez. As peças são todas iguais: rainhas brancas que se movem para Norte, Oeste, ou Noroeste. Cada jogada consiste em mover uma rainha o número de casas que se quiser, de acordo com a descrição acima. Cada casa pode conter qualquer número de rainhas. Perde quem não puder jogar, por todas as rainhas se encontrarem no canto superior esquerdo.



Notas

A cada rainha está associado um jogo de Whitoff (ver p. 7). O jogo aqui apresentado é, então, uma soma de jogos...

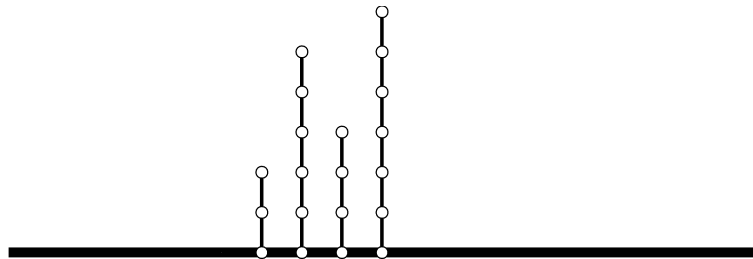
Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Arbusto

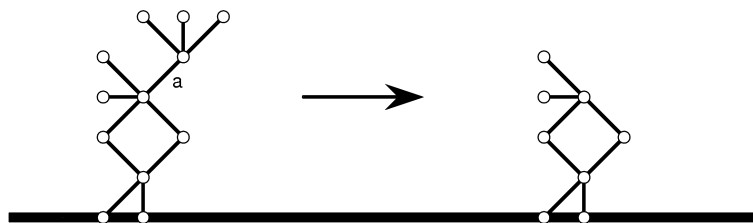
Este jogo desenvolve-se num desenho de um arbusto, isto é, um conjunto de segmentos ligado a um *chão*. Cada jogada consiste em apagar um dos segmentos, sendo que todos os segmentos que ficarem, assim, sem ligação ao chão, também devem ser apagados. Ganha quem cortar o último segmento.

O caso mais simples corresponde a termos várias canas:



Mas isto é simplesmente um jogo de Nim, neste caso equivalente a pilhas de 2, 5, 3 e 6 feijões.

Em geral o arbusto é mais complicado. Vejamos um exemplo de jogada legal:

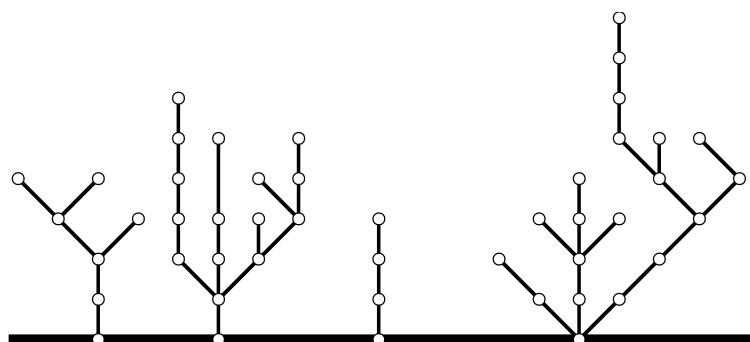


Se um jogador decidir cortar o segmento a , então também desaparecem os três segmentos que ficariam sem contacto com o chão.

Trata-se, naturalmente, de um jogo combinatório imparcial. De acordo com a teoria esboçada nas páginas anteriores, cada posição é equivalente a uma pilha de feijões no jogo Nim (o número de feijões é indicado pela função de Grundy).

Cada arbusto concreto não é, em geral, a soma de arbustos menores, porque as partes não estão, usualmente, separadas. Portanto, a teoria da soma de jogos, apresentada atrás, não nos ajuda neste caso. Contudo, há dois princípios, que apresentaremos de seguida, que permitem facilitar a determinação do valor Grundy de cada posição.

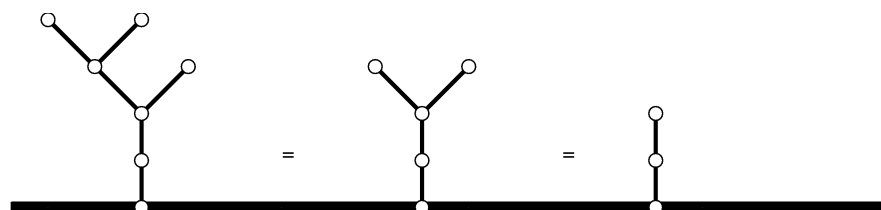
Começemos com árvores. Intuitivamente, árvores são arbustos com uma raiz. Têm um aspecto característico, já que cada vértice só tem um caminho para atingir o chão:



Para este tipo de “vegetação” dispomos do *princípio da nimdade*: se num vértice convergem n canas, então estas podem ser substituídas pela sua soma nim.

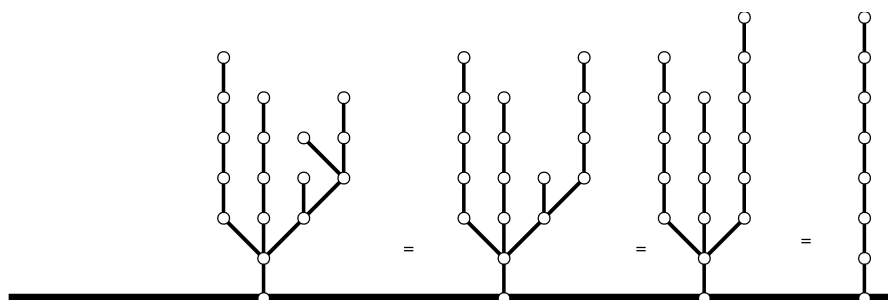
Este princípio permite-nos trabalhar dos segmentos terminais até à raiz, de forma sucessiva, simplificando o arbusto, e culminando na obtenção de uma cana só.

Vejamos um exemplo:



porque $1 \oplus 1 = 0$.

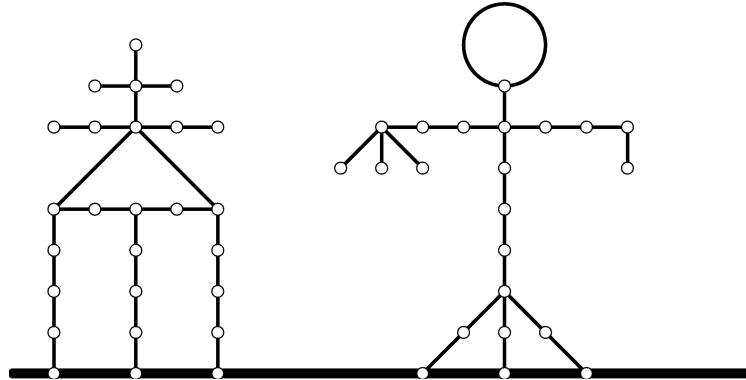
Determinemos ainda o valor Grundy de outra árvore:



porque $1 \oplus 2 = 3$, $1 \oplus 4 = 5$ e $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$.

Para abordar os casos mais gerais vamos permitir que os arbustos tenham mais do que uma raiz, que tenham caminhos fechados (ciclos), segmentos curvos a ligar um vértice a si mesmo (lacetes). Os lacetes comportam-se como os segmentos vulgares, no que diz respeito ao jogo, podendo, portanto, ser substituídos por segmentos sempre que se queira.

Vamos permitir agora imagens com as ilustradas abaixo.

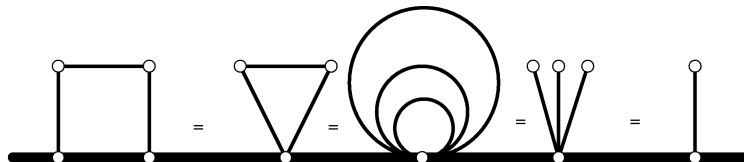


Note-se também que o chão pode ser interpretado como um vértice único, especial.

Fundir dois vértices adjacentes consiste em fazê-los coincidir, transformando o segmento que os une num lacete.

Para analisar arbustos complicados fazemos apelo ao *princípio da fusão*, que diz que cada ciclo pode ser fundido num vértice sem alterar o valor Grundy do arbusto.

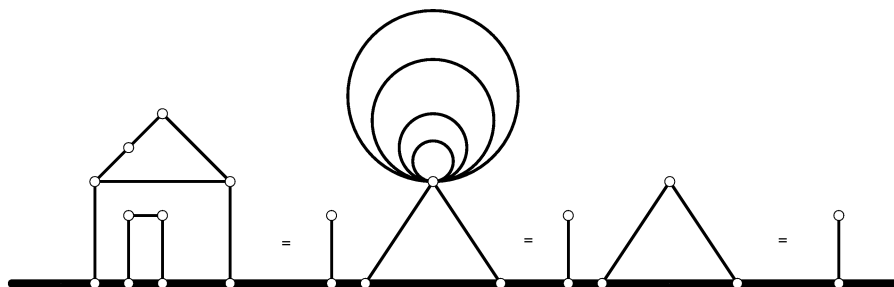
Vejamos um exemplo, onde já se faz uso do facto de o chão se poder identificar com um só vértice:



O primeiro passo consistiu em identificar o chão com um só vértice, o segundo em fundir os vértices, o terceiro em substituir os lacetes por arestas vulgares; o último passo é uma aplicação do princípio da nimdade.

Aplicações sucessivas dos princípios da nimdade e da fusão permitem determinar o valor de Grundy de muitos arbustos complexos.

Um último exemplo:



Pelo exemplo anterior, a porta é equivalente a uma aresta. O telhado desaparece, ao ser aplicada uma fusão aos seus vértices seguida de uma soma nim das arestas ($1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$). Dois segmentos, que somam zero, e a aresta isolada é tudo que sobra. Assim, toda a figura tem um valor Grundy de 1. Trata-se, portanto, de uma posição N.