Fibonacci

(1170-1250)

Leonardo di Pisa

Fibonacci was born in Italy but was educated in North Africa where his father, Guilielmo, held a diplomatic post.

Fibonacci ended his travels around the year 1200 and at that time he returned to Pisa. There he wrote a number of important texts which played an important role in reviving ancient mathematical skills and he made significant contributions of his own.

we still have copies of ***Liber abaci*** **(1202)**, *Practica geometriae* (1220), *Flos* (1225), and *Liber quadratorum*.

Fibonacci's influence was more limited than one might have hoped and apart from his role in spreading the use of the Hindu-Arabic numerals and his rabbit problem, Fibonacci's contribution to mathematics has been largely overlooked

When my father, who had been appointed by his country as public notary in the customs at Bugia acting for the Pisan merchants going there, was in charge, he summoned me to him while I was still a child, and having an eye to usefulness and future convenience, desired me to stay there and receive instruction in the school of accounting.

There, when I had been introduced to the art of the Indians' nine symbols through remarkable teaching, knowledge of the art very soon pleased me above all else and I came to understand it, for whatever was studied by the art in Egypt, Syria, Greece, Sicily and Provence, in all its various forms.

Uma selecção de problemas do
LIBER ABACI

Dois viajantes

Dois homens metem-se a caminho para um longo passeio. Em cada dia o primeiro percorre 20 milhas, o segundo 1 no primeiro, 2 no segundo, 3 no terceiro, etc.

Quando é que o 2º apanha o 1º?

Fibonacci deu a fórmula da soma da progressão aritmética na primeira parte do LA: "produto da metade dos termos pela média do 1º e do último". Resolva-se

$$20x=x(1+x)/2$$

para obter $x=39$

Sobre uma árvore

1/4 1/3 de uma árvora está enterrada. 21 palmos estão soterrados.
Qual é a altura total da árvore?

$(1/4 + 1/3)x=21$

donde

$7/12\ x=21$ ou $x=36$.

F usa falsa posição a que chama método da árvore. O palpite inicial foi 12.

Pode argumentar-se que a altura da árvore é a altura acima do solo...

O leão no poço

Um leão está no fundo de um poço com 50 palmos de profundidade.
Durante o dia sobe 1/7 de palmo, mas durante a noite escorrega 1/9 de palmo.
Quantos dias demora a atingir o cimo do poço?

F. erra. Calcula o ganho diário: 1/7-1/9=2/63 e divide 50 por 2/63, obtendo 1575. Mas depois de chegar ao cimo o leão não desce!

Resposta certa: 1571. Para a obter resolva-se a inequação

$$(1/7-1/9)(n-1)+1/7 >= 50$$

Divisão por três

Quais são os três números que somam 10 tais que o produto do menor pelo maior iguala o quadrado do médio?

Indeterminado. Duas equações: xz=y^2, x+y+z=10. F. dá uma solução particular 1 3/7; 2 6/7; 5 5/7. O método q seguiu é lindo:

supor que os menores são 1 e 2. Então o maior é 4 (4x1=2x2). A soma destes dá 7. 7 não é 10. É preciso multiplicar por 10/7 tutti quanti!


I
II
III
800
900
1000
6000
7000
8000
9000

Leão, leopardo e urso

Um leão come uma ovelha em 4 horas, um leopardo em 5 e um urso em 6.
Se os três animais partilham uma ovelha, quanto tempo demora a refeição?

Numa hora os três comem 1/4+1/5+1/6=37/60 de ovelha. A resposta é 60/37 horas. Qq coisa como 1h 37m 17s.

F. usa um método lindo: Suponha-se que os animais começam a comer, independentemente, sem parar. Ao fim de 60 (mmc(4,5,6)) terminam uma ovelha. Comeram até lá 15+12+10=37 ovelhas. Agora basta uma regras de três.

Duas formigas andarilhas

Duas formigas estão a 100 passos uma da outra. Começam a dirigir-se para um ponto comum. Em cada dia a 1ª avança 1/3 de passo e recua 1/4 de passo; a 2ª avança 1/5 e retrocede 1/6 de passo.
Daqui a quanto tempo se encontram?

F. erra de novo. É preciso resolver a inequação

$$[(1/3+1/5) - (1/4+1/6)](n-1) + (1/3+1/5) >= 100$$

Tanque com quatro saídas

Um tanque tem quatro torneiras de saída. Usando a 1ª, esvazia-se num dia; usando a 2ª em 2; usando a 3ª em 3 e em 4 usando a 4ª.
Quando demora a esvaziar usando as quatro ao mesmo tempo?

Num dia, cada torneira esvazia 1, 1/2, 1/3, 1/4. Em conjunto, num dia, esvaziam 25/12. A resposta é 12/25 de dia (11 h 31 m 12 s).

F. considera o dia com 12 horas (neste e noutros problemas).

O barril com quatro torneiras

Um barril tem quatro torneiras colocadas de forma a dividir o volume de líquido em quatro partes iguais. Agindo independentemente, a torneira mais alta (1ª) esvazia 1/4 do barril num dia; a 2ª esvazia 1/4 em 2 dias; a 3ª esvazia 1/4 em 3 dias e a 4ª esvazia 1/4 em 4 dias. Se abrirmos todas ao mesmo tempo, quanto demora a esvaziar o barril?

F, q considera dias de 12 horas, admite um barril de 48 litros. A 1ª torneira esvazia 12 litros/dia, a 2ª 6, a 3ª 4 e a 4ª 3. Num dia

- as 4 fazem sair 25 litros
- as 3 inferiores fazem sair 13 (6+4+3)
- as 2 inferiores fazem sair 7 (4+3)
- a última faz sair 3 litros/dia

Os primeiros 12 litros saem em 12/25 de dia. Os segundos 12 em 12/13 de dia. Os seguintes em 12/7 dias. Os últimos 12 em 4 dias.
Some-se para obter 7d 1h 24m 30s.

As maçãs do jardim

Um homem, para entrar no jardim das delícias, deve transpor sete portas. Para sair deve pagar a cada um dos guardas com maçãs colhidas. Ao 1° deve dar metade das maçãs mais uma; ao 2° deve dar metade das que tiver mais uma e assim sucessivamente... Ele sai do jardim com uma maçã.

Quantas maçãs colheu?

A sequência das maçãs que o homem tem após a 7ª, 6ª, 5ª, 4ª, 3ª, 2ª, 1ª e antes da 1ª:

1, (1+1)x2=4, (4+1)x2=10, (10+1)x2=22, (22+1)x2=46, (46+1)x2=94, (94+1)x2=190, (190+1)x2=382

A herança

Um homem deixou aos seus filhos dinheiro. Ao mais velho disse: tu terás um euro mais 1/7 da quantia restante. Ao segundo: 2 euros e 1/7 do restante. Ao 3º: 3 e 1/7 do restante, etc. Ao último filho deu tudo o que restava.

Acontece que todos receberam a mesma quantia. Qual era essa quantia e quantos filhos tinha o moribundo?

F não explica, mas dá resposta certa. ("Pelos sétimos que os filhos recebem toma 7, mas subtari-lhe 1. Ficam 6 que é o número de filhos. Multiplica 6 por si mesmo e obténs 36 que é a quantia").

Fazendo N=número de filhos e S=herança que toca a cada filho. O que se sabe sobre os dois primeiros filhos dá-nos duas equações:

$$1+(NS-1)/7=S$$

$$2+((N-1)S-2)/7=S$$

donde N=6=S.

Um múltiplo de 7

Qual é o menor inteiro que dividido por 2 dá resto1, por 3 dá resto 2, por 4 dá resto 3, por 5 dá resto 4, por 6 dá resto 5 e é divisível por 7?

F considera 60, que é o mmc de 2, 3, 4, 5, 6. Então 59 serve, excepto que não é múltiplo de 7. Tiremos então uma unidade aos sucessivos múltiplos de 60 até acertar!... 119 serve logo!

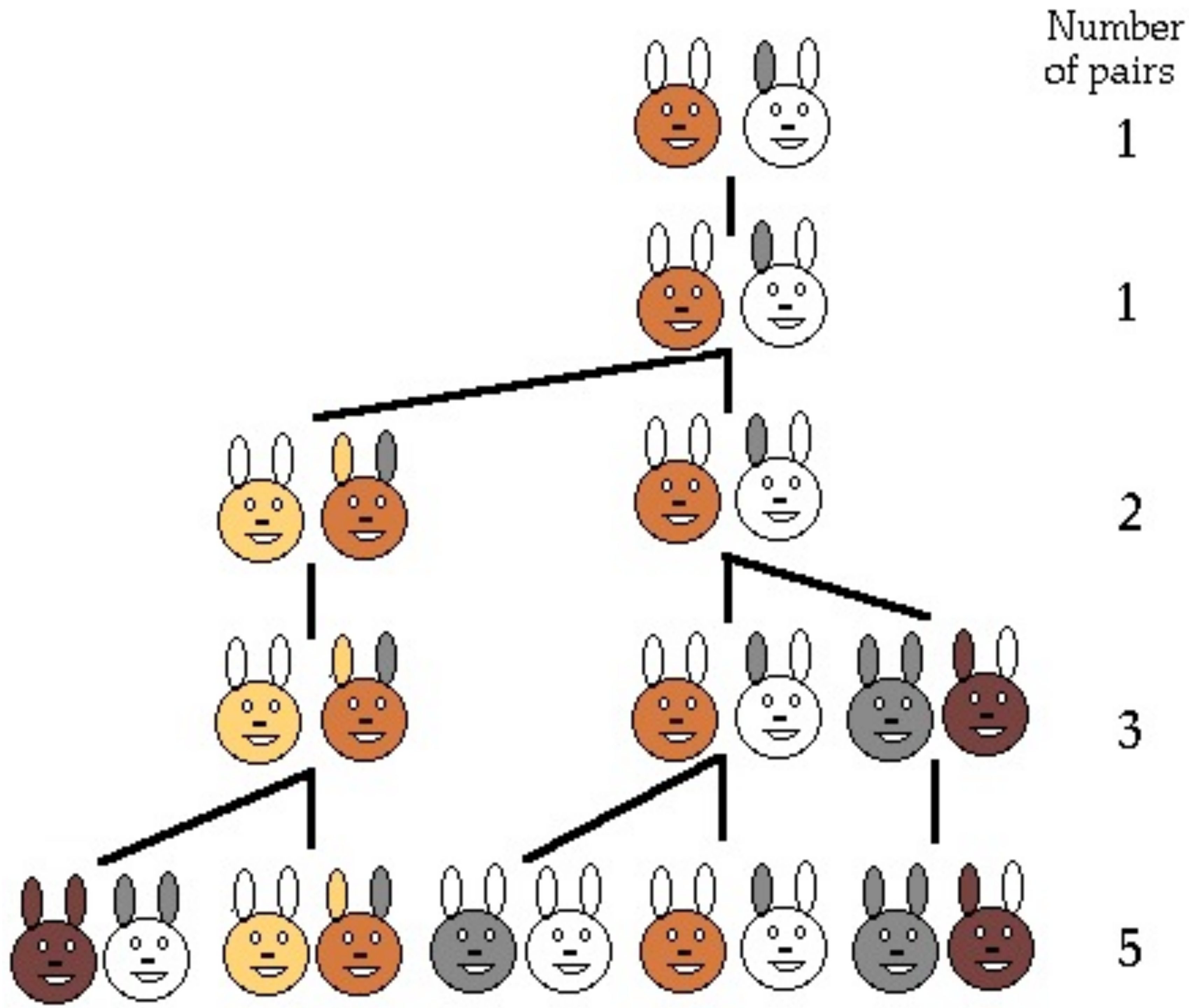
Os casais de coelhos

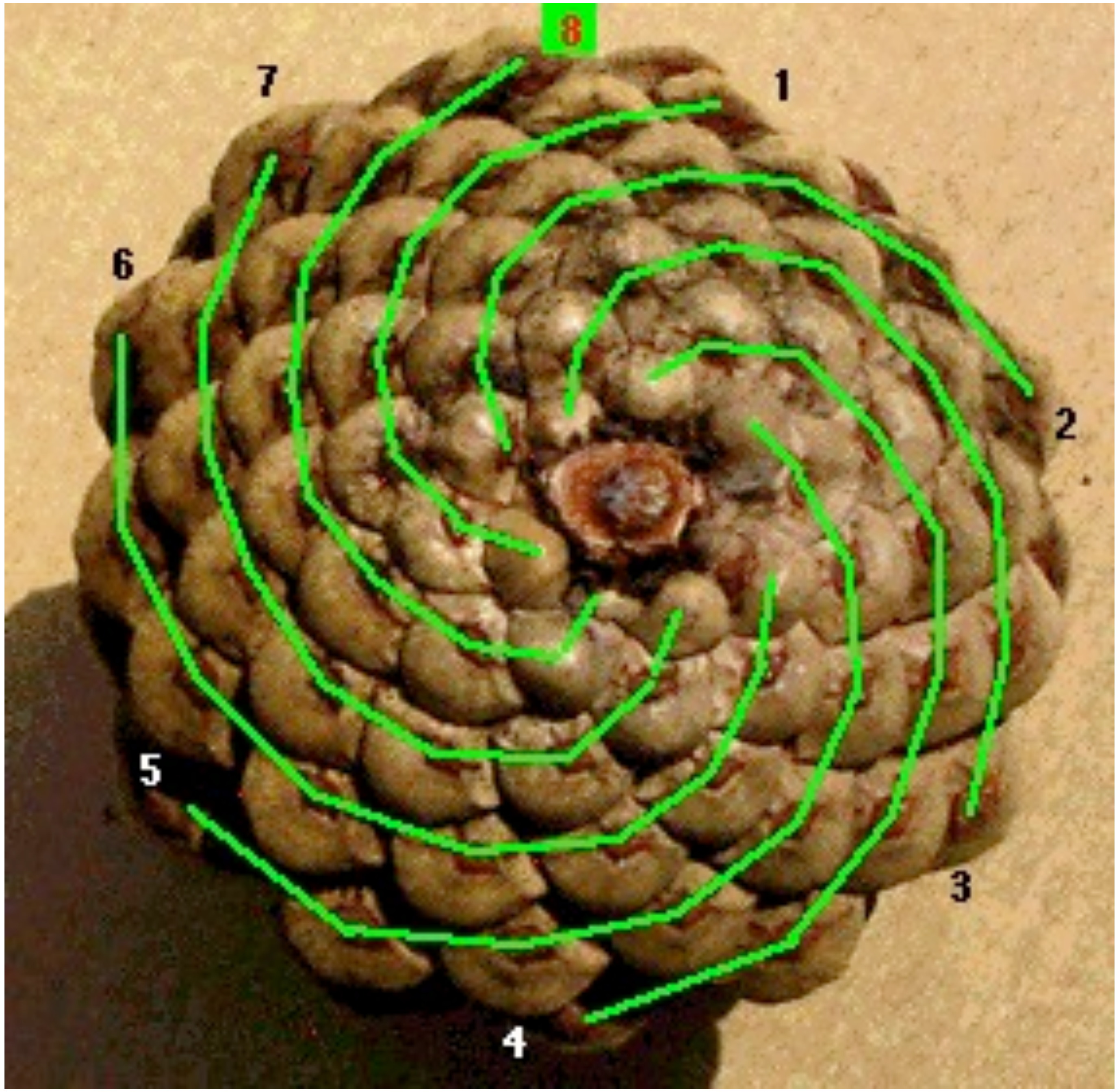
Um casal de coelhos começa a reproduzir-se após um mês. Cada mês gera um novo casal nas mesmas circunstâncias.

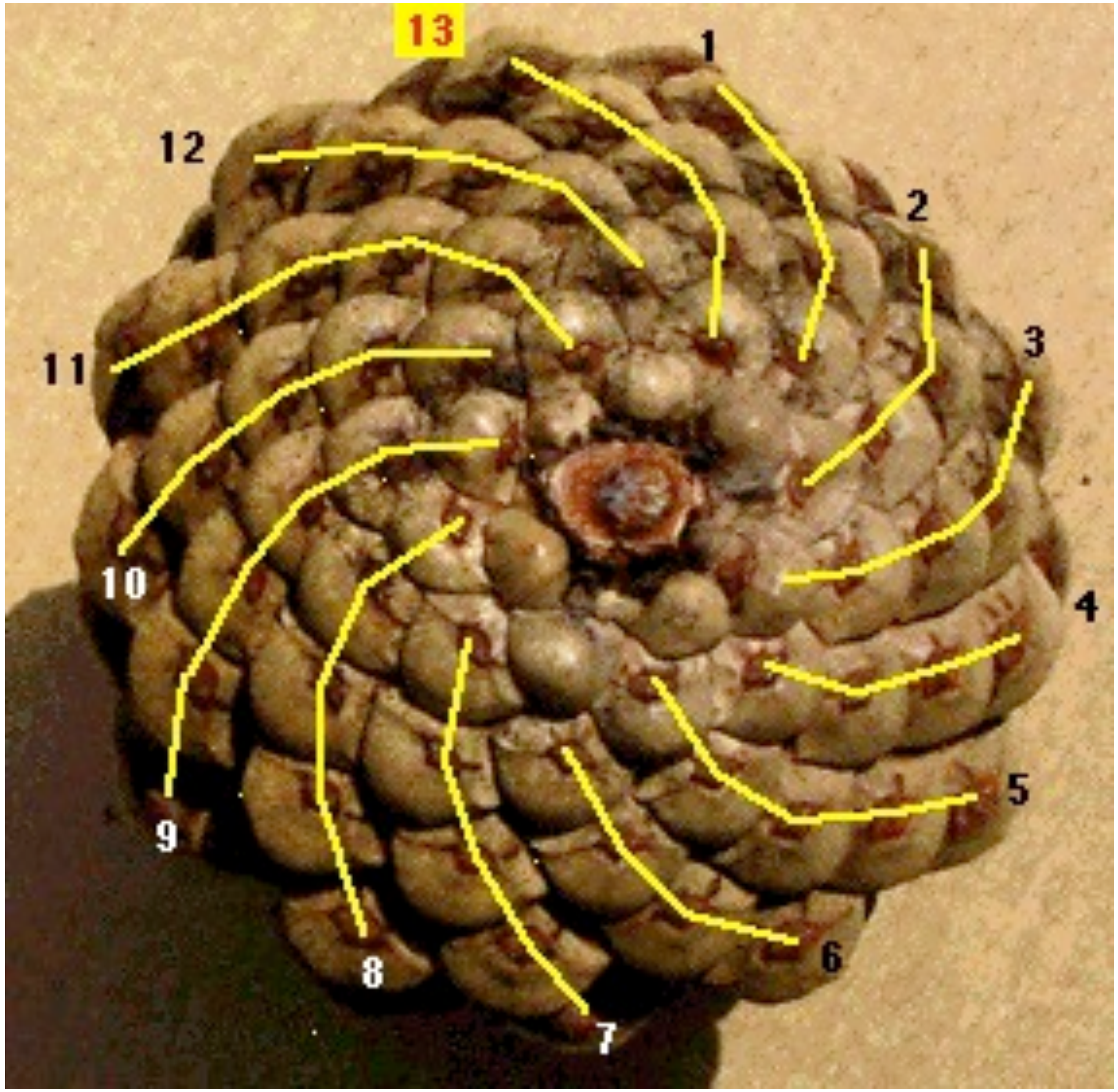
Quantos casais nascem num ano?

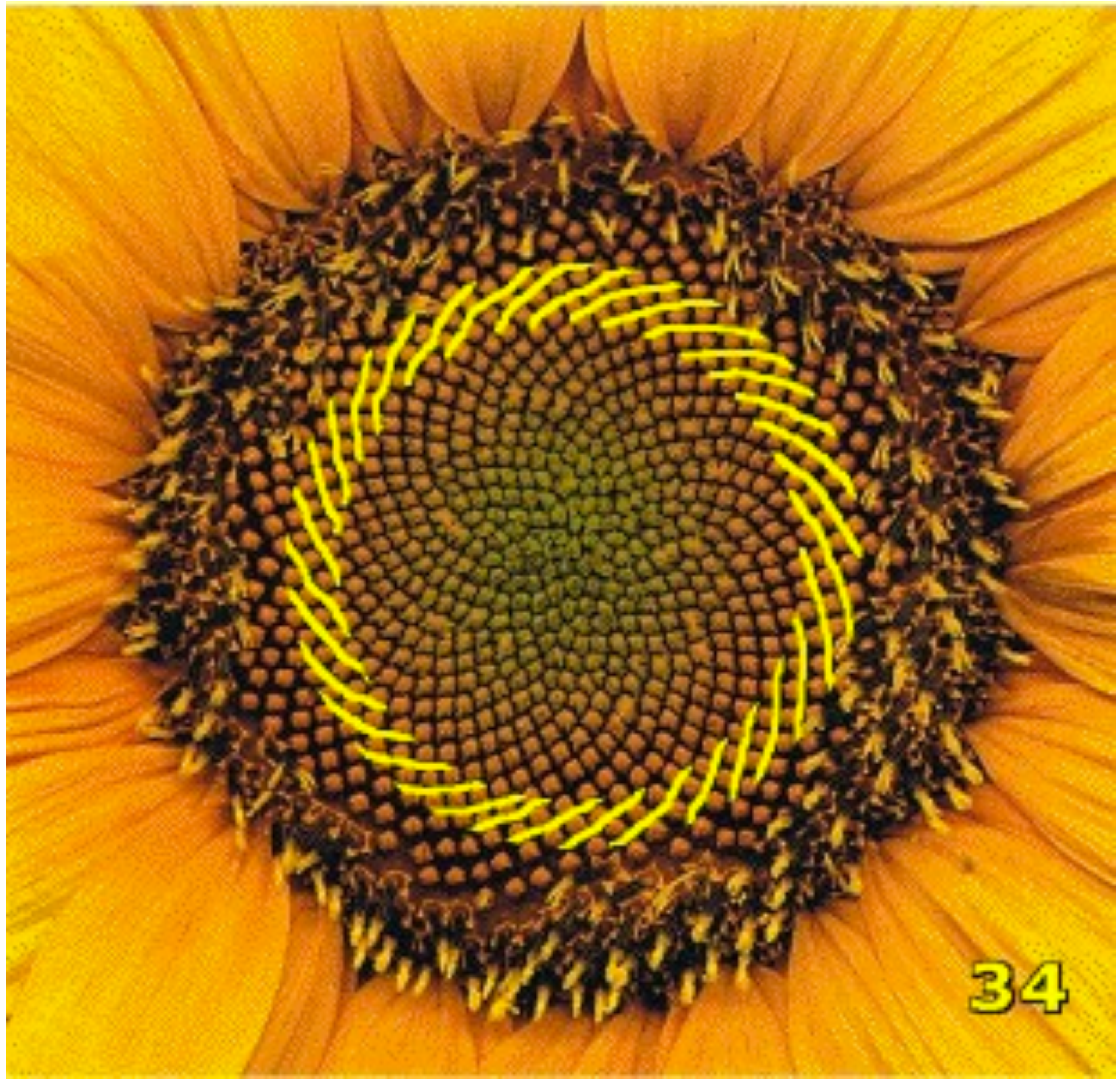
F percebe a regra de formação da sucessão. A resposta é 377, e diz que o método funciona para qq número de meses.

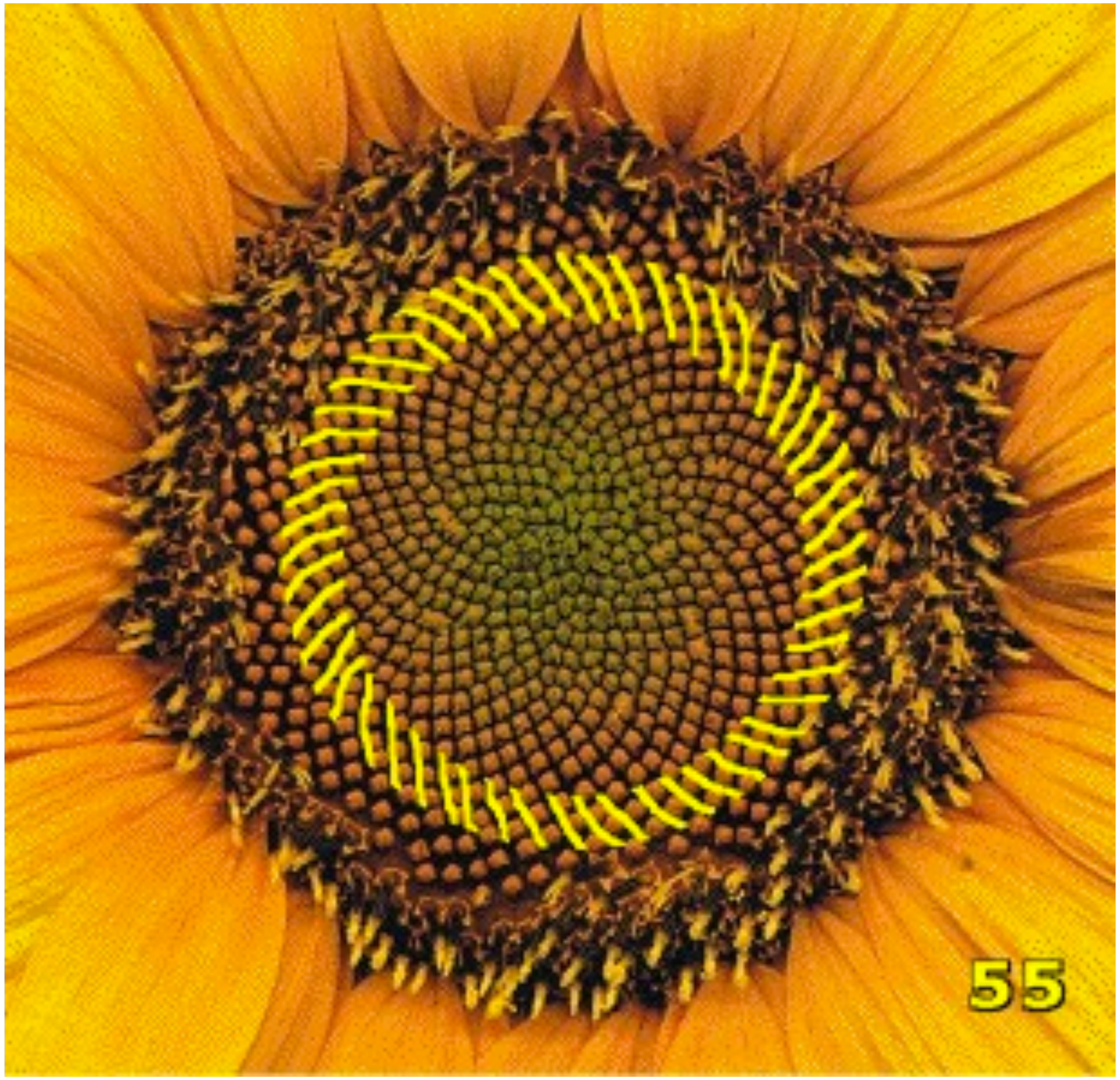
(1), 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377

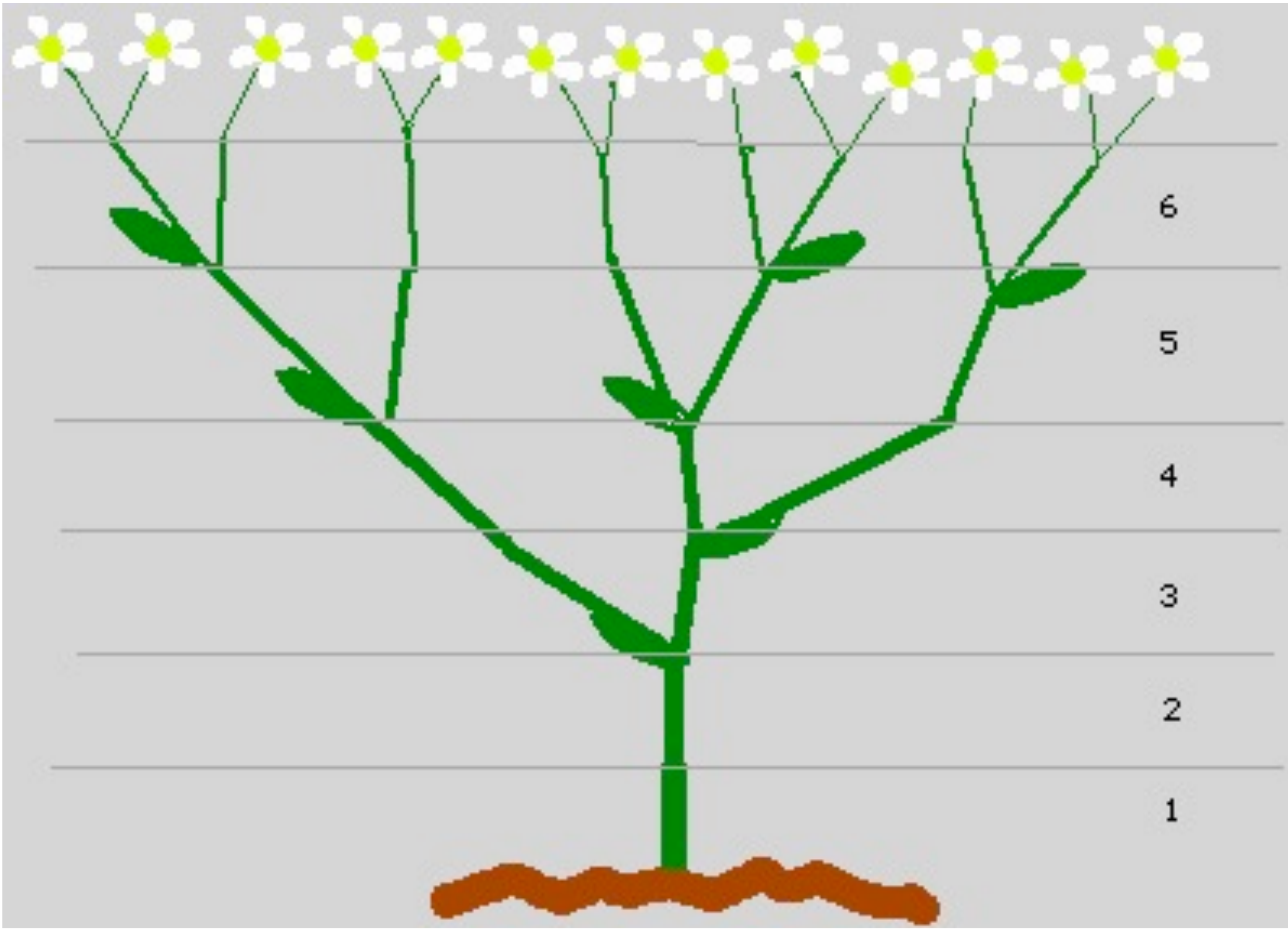

Number
of pairs
1
1
2
3
5


8
1
7
6
2
5
3
4

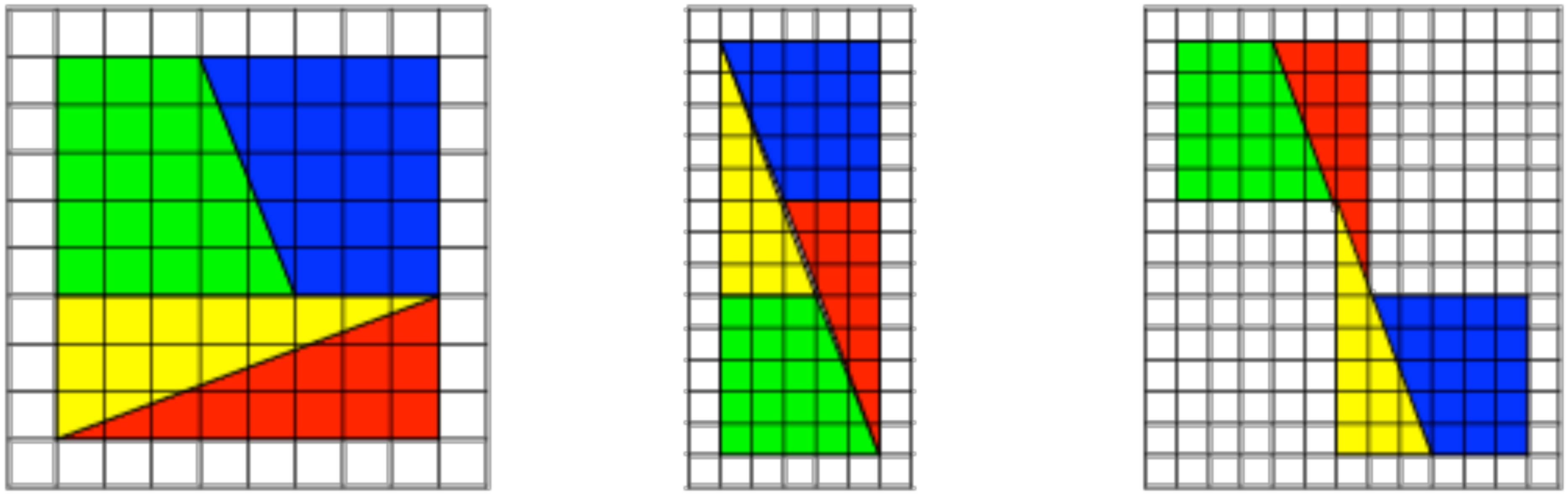

13
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12


34


55


6
5
4
3
2
1

Fn^2 = Fn-1Fn+1 + (-1)^(n-1)



Os quatro pesos

Um comerciante dispõe de uma balança de dois pratos e de quatro pesos. Consegue pesar qq objecto cujo peso seja um número inteiro de 1 a 40 kilos.
Quanto pesam os pesos do comerciante?

F: "O 1º pesa 1kg. O 2º pesa o dobro mais um, isto é, o triplo do 1º. Estes já pesam objectos até 4 kg. O 3º tem a soma dos dois anteriores mais 1, ou seja 9 (pesa até 14 kg. Para pesar de 5 a 8 use-se o peso de 9 num prato e os objectos e pesos no outro). O 4º é o dobro da soma dos outros 3 mais 1, ie, o triplo do terceiro, ou seja 27. A soma dos quatro pesos é 40."

João de Palermo colocou, num torneio, esta questão a Fibonacci:

Três homens partilham uma quantia de dinheiro nas proporções 1/2, 1/3, 1/6, respectivamente.
Cada um retira dessa quantia quantidade aleatória de maneira a que a esgotam.
Depois, o primeiro (ie, o que tem direito a 1/2) devolve metade do que tirou, o segundo (o que tem direito a 1/3) devolve 1/3 e o terceiro 1/6. O total devolvido é dividido igualmente pelos três e... cada um fica com a sua parte legítima!
Qual é a quantia original e quanto é que cada um tirou?

t=total. u=o q cada um recebeu depois de dividir por 3 as devoluções. x, y, z o q os homens tiraram. Temos 3u=x/2+y/3+z/6. E ainda x/2+u=t/2 ; 2y/3+u=t/3 ; 5z/6+u=t/6. Somar estas três equações e passar tudos a u e t. Dá 47u=7t. Fazer u=7 , u=47.

3. Use o Algoritmo de Euclides para determinar (F_n, F_{n+1})

4. Prove que $F_1+F_2+...+F_n=F_{n+2}-1$

5. $F_nF_n=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)(-1)$

6. $\lim F_{n+1}/F_n = ?$

7. Todo o número natural é soma de números de Fibonacci diferentes. Comprove para 50, 75, 100.

8. Mostre que $F_1+F_3+...+F_{2n-1}=F_{2n}$

9. Mostre que $F_2+F_4+...+F_{2n}=F_{2n+1}-1$

2. Será verdade que F_p é primo se $p>2$ é primo?

3. Use o algoritmo de Euclides para determinar o mdc de dois termos consecutivos F_n, F_{n+1}.

[Aqui é o algoritmo [illegible]]

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 & 0 < r_1 < b \\
b &= q_2 r_1 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}
$$

$$r_n = (a, b)$$

4. $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

1. $d \mid F_n$ & $d \mid F_{n+1} \Rightarrow d \mid (F_{n+1} - F_n)$ i.e. $d \mid F_{n-1}$

$d \mid F_n$ & $d \mid F_{n-1} \Rightarrow d \mid F_{n-2}$ etc

2. $F_{19} = 4181 = 37 \times 113$

[illegible]

3. $\forall n$ [illegible] : F_{n+2} & F_{n+1}.

4.
$$F_1 = F_3 - F_2$$
$$F_2 = F_4 - F_3$$
$$\vdots$$
$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

5.
$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} &= F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) - F_{n-1}F_{n+1} \\
&= (F_n - F_{n+1})F_{n-1} + F_n F_{n-2} \\
&= -F_{n-1}^2 + F_n F_{n-2} \\
&= (-1)(F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2})
\end{aligned}$$

similarly: $F_{n-1}^2 - F_n F_{n-2} = (-1)(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$

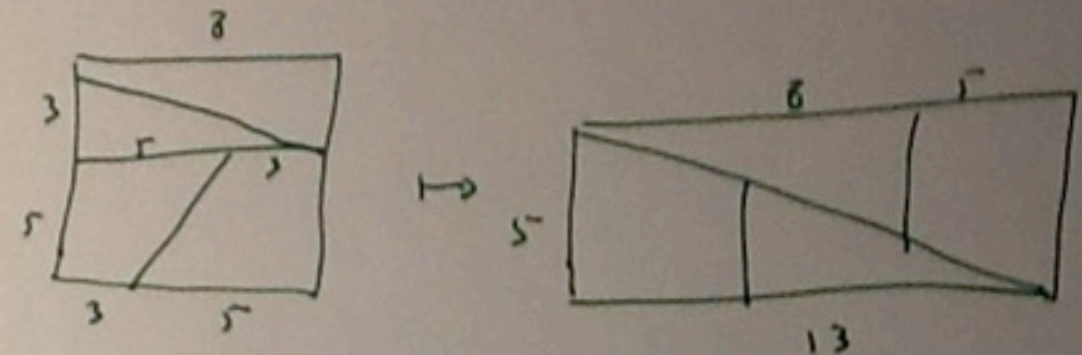
$\therefore \; F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^2(F_{n-2}^2 - F_{n-1}F_{n-3})$

after $n-2$ steps:

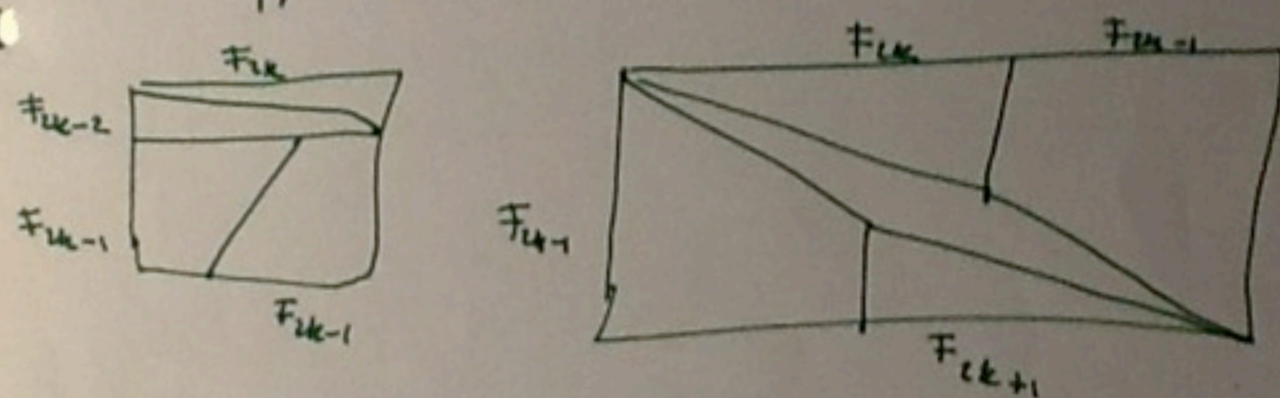
$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} &= (-1)^{n-2}(F_2^2 - F_3F_1) \\
&= (-1)^{n-2}(1^2 - 2) \\
&= (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1$

□ 8×8 đổi ▭ 5×13.



what happens:



$F_{2k}^2 = F_{2k-1}F_{2k+1} - 1$ [illegible] parallelogram [illegible] 1.

6. $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \dfrac{F_{n-1}}{F_n}$ $\quad \therefore \alpha = 1 + \alpha^{-1}$

$\therefore \alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

8. $F_1 = F_2$
$F_3 = F_4 - F_2$
$F_5 = F_6 - F_3$ so on
$\vdots$

Adivinha o número menor que 105

O Mágico diz: "Pensa num nº de 1 a 105. Divide-o por 3 e diz-me o resto. Divide-o por 5 e diz-me o resto. Divide-o por 7 e diz-me o resto."
"Agora adivinho o teu número!"

F: "Multiplica por 70 o resto da divisão por 3, por 21 o resto da divisão por 5 e por 15 o resto da divisão por 7. Se a soma exceder 105, subtrai 105 as vezes convenientes. Assim obterás o nº"

[Este problema vem da China antiga (ver Katz). Mas sem Mágico!]

Ouro, prata e lata

Há três pessoas. Uma tem uma moeda de ouro, outra de prata e a terceira de lata. Distribui-se por elas, à sorte, os números 1, 2 e 3. Diz o Mágico: "quem tem ouro dobre o número que recebeu; quem tem prata multiplique o seu número por 9 e o outro por 10. Um de vocês some os resultados, subtraia o total de 60 e diga-me essa diferença. Eu adivinho quem tem qual metal."

F: "Divide o resultado por 8. O quociente é o Ouro, o resto é a Prata (o outro é a Lata). Exemplo: Prata=1, Ouro=2, Lata=3. Tem-se

$$60-(2x2+1x9+3x10)=17$$

e 17=2x8+1.

[Para o circo fazer à Diaconis: 60 moedas na mesa e as pessoas tiram de lá. Distribuir tb os metais à sorte]

Potências de 2 no tabuleiro de xadrez

Qual é a soma da sucessão das potências de 2, de 2^0 a 2^63 escritas nas casas de um tabuleiro de xadrez?

F nota que a soma dos n primeiros termos é 2^n-1. Obtém uma descrição enfática para o desmesurado resultado, 2^64-1.

7 peregrinos vão a Roma

7 peregrinos vão a Roma
cada um tem 7 mulas
cada mula tem 7 sacos
cada saco tem 7 pães
cada pão tem 7 facas
cada faca tem 7 bainhas.

No total, contando pessoas, animais e objectos, quantos são?

vem do Papiro de Rhind.
137 256.