

Luca Pacioli

1445-1517



Jacopo de' Barbari - *Luca Pacioli* (1495)

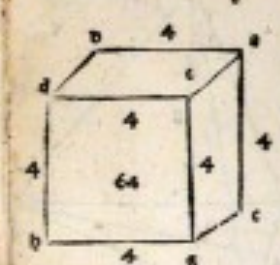




No ano de 1494, aos 49 anos, Luca Pacioli publicou seu famoso livro "Summa de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade". Ao escrever este livro, Pacioli estava tentando melhorar o ensino das matemáticas no seu tempo.

Esta grande e valiosa obra, com mais de 600 páginas, tem muitos desenhos, fórmulas e arte gráfica (as letras iniciais de parágrafos e distinções são desenhadas artisticamente e consta que foram da lavra de Leonardo da Vinci).

Tal obra foi dividida em algumas partes, como



1800 fra qđraco d'into. 4. base fatta. 72.

[illegible][illegible]

Este vn. 4. se triangulari equilatero a b c d dā cui bafa e b e d b d e d e b c e d
 15. el suo aria e 9. cadente dentro tra le li^e b c d. Zaglio de l'aria e 3. b e a
 a b o m d o d e g e l e u a r e d e q u a d r a t u r a d e d . b a f e a b c d . F a c o l i v e r t i q u e
 d r a t a l a s u a b a f a . b c d . d o b e e . 3 . 4 . m e a . 8 . 4 . v i l a r i s c b e . 3 . 5 . 7 . 6 . p a r t i l l o p r i m a n e
 25 . 2 . e t a n o c q u a r t o m i t t o d . b a f e d e l s u o a r i a e . 9 . 2 . m u l t i v n . 4 . b a f e d e l s u o a r i a f i a . 2 .
 d o b e e . 4 . 1 . o e . 4 . g b e e . 9 . 2 . i n q u a p p o n i b e e d u m i l l o t a n t o f i n o d u m i l l i l a s t e l a b a f a . b c d .
 p e r o p i g l i a d i . d e b d . d o b e . 15 . f i r a . 5 . p i g l i a d i . o e . 14 . f i r a . 4 . p i g l i a d i . o e . 13 . f i r a . 4 . p i g
 e l d e l c a t e r o d e c b e . 12 . f i r a . 4 . e l m e a o e . 14 . o e . 2 . d o b e . 2 . f i a . 9 . e q u i l o m o c o n l a r i s .
 d e . 3 . 12 . 8 . o e l p i g l i a . 1 . d o b e . e t a n o g e l e u a r e d e q u a d r a t u r a d e d . b a f e a n o i p o s s i o e 4 .

E Dic vii. 4 bafe triangular a b c d. che laria fua a g. 1000. re qdrano. 250. raglie
o5 vna l^a piana. 40. comado qro leuara 5 laria a g. fa colli m lai che gi q
drano. 250. c laria fua c. 1000. re a g. cufa. 1000. dora. 250. 75 b aris. 1000. co
bura. 40. mca. 40. r. 1000. fa 40000 d qd parti q la qdrano d. 4 baf ch. 250.
le a g. 1000. 42. ratura flaria a c mod. 40. b. 5 la d. 250. 1000. 42. r.

Este vn cuore .c. 4. bñ p'laro voglio de la fusfione sua fare fusfi. ò vna fpa comò
de qro fira il cor. de vna fpa. fa così redpi. qtro e la fusfi de tutto il cal
cle. a. b. facce .c. 16 per facia d'vno. r. 16. fa. b. n uoi vna fpa ch'la fusfi. fua
fia .96 po mēa .96 p. i. 4. fa. 7. 4. d' qpo p. 11. noue. 122. Le mba'a pigliare la
cōmo. R. f. 4. a. R. f. 4. a. p. 122. 123. 4. a. mēa. 80. c. 96. si fira il cor. de vna fpa. Zu
lai cūl. dec. 96. dbe. 2. 4. c. la fusfione del mēto cordio il cui p. è. di dī. de l'opera. 46.

*E gli e' sp'a del suo dia'. c.7. uoglio d la sup'r sua fare sup'r. du. m. dom'. d loia
ni. Z rona la sup'r. d la sp'a che fu del suo oio' c.7. el magior cron. de lab'a c.22. el qua
mi co' lo dia' c.7. fa. 15.4. e iro e la sup'r. d la sp'a e fu del oio' a. face' po gl'i. 4.
16. neni. 25. 1. la. 18. 25. fira di oio' po facia 7c.*

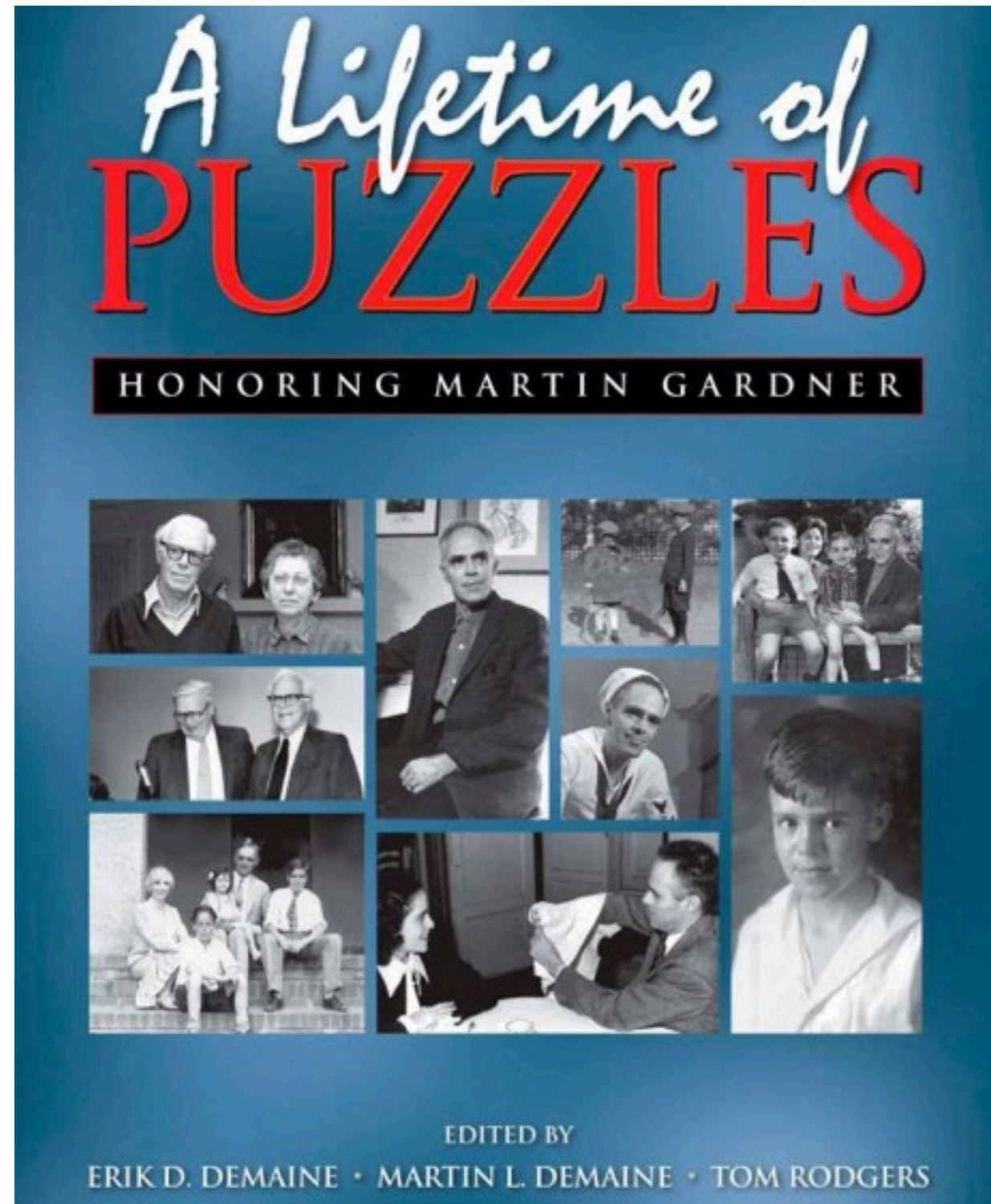
[illegible]

De Viribus Quantitatis

Está aqui:

[http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/
Presentazione.html](http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/Presentazione.html)

Referência essencial: David Singmaster em



Do Math Forum:

*Luca Pacioli, a Franciscan monk, mathematics tutor, and colleague of Leonardo Da Vinci, wrote **this foundational text of modern magic and numerical puzzles between 1496 and 1508**. De Viribus Quantitatis (On the Powers of Numbers) contains the first ever reference to card tricks and some of the earliest recorded European examples of numerical puzzles; guidance on how to juggle, eat fire and make coins dance; and insights into Da Vinci's life and work.*

Estão 10 moedas na mesa. Dois voluntários dividem esta quantia entre si. Seja então $10 = x + y$.

P. pede a um que multiplique por 2 a sua parte, ao outro que multiplique por 10 e subtraiam a 110 a soma:

$$110 - (2x + 10y).$$

O resultado deve ser comunicado ao mágico.

P adivinha a divisão das 10 moedas.

Seja $10 = z$, para fins de generalidade. P pede para calcular

$$z(z+1) - (2x + zy)$$

e divide o número que lhe dão por $(z-1)$. O quociente é x e o resto é y .

$$(z(z+1) - (2x + zy)) / (z-1) = x + y / (z-1)$$

Três voluntários dividem entre si uma quantidade z de moedas, a , b , c .

O Mágico pede para lhe comunicarem
 $z(z+1) - (2a+zb+(z+1)c)$
e adivinha a , b , c .

O Mágico divide o número que lhe dão por $(z-1)$. O quociente é a , o resto é b , o que falta para z é c .

$$(z(z+1) - (2a + zb + (z+1)c))/(z-1) = a + b/(z-1)$$

Três voluntários dividem entre si uma quantidade z de moedas, a, b, c .

O Mágico pede para lhe comunicarem

$$zz + y - (2a + (z-1)b + zc)$$

onde y é um número qualquer e adivinha a, b, c .

O Mágico tira y e divide por $(z-2)$ porque...

$$(zz + y - (2a + (z-1)b + zc) - y) / (z-2) = a + b / (z-2)$$

Três voluntários dividem entre si uma quantidade z de moedas, a , b , c .

O Mágico pede para lhe comunicarem
 $z(y+1) - (2a + yb + (y+1)c)$
onde y é um número qualquer
e adivinha a , b , c .

O Mágico divide por $(y-1)$ porque...

$$(z(y+1) - (2a + yb + (y+1)c)) / (y - 1) = a + b / (y - 1)$$

exemplo de Pacioli: $a=2$, $b=3$, $c=5$, $z=10$, $y=12$

Pensa num número (seja ele x). Calcula $y = x + x/2$. Diz se é um inteiro. Se não for arredonda “para cima”. Soma $z = y + y/2$ e diz se é inteiro ou arredonda de novo. Divide o resultado por 9 e comunica ao Mágico o quociente.

O Mágico multiplica o resultado por 4, já que

$$(x + x/2 + (x + x/2)/2)/9 = x/4$$

Mas isto só funciona bem com $x \equiv 0 \pmod{4}$. Temos de somar 1 se $x \equiv 1 \pmod{4}$ (há arredondamento na 1ª operação), somar 2 se $x \equiv 2 \pmod{4}$ (na 2ª) e somar 3 se $x \equiv 3 \pmod{4}$ (em ambas). As operações conduzem sempre a k se $x = 4k + i$ ($i = 1, 2, 3$).

Exemplos do Pacioli: 12, 5, 6, 15.

Problema de garrafas de vinho. Dividir em duas partes iguais os oito litros de uma garrafa de capacidade 8 se tivermos mais duas garrafas vazias, de capacidades 3 e 5?

Representação: $(8, 3, 5:8, 0, 0) \rightarrow (8, 3, 5:4, 0, 4)$.

Tabella 1. (8, 5, 5: 4, 0, 4)

Prima botte (capienza 8 l)	Seconda botte (capienza 3 l)	Terza botte (capienza 5 l)
8	0	0
5	3	0
5	0	3
2	3	3
2	1	5
7	1	0
7	0	1
4	3	1
4	0	4

Vi proponiamo ora una soluzione alternativa (Tabella 1.1) che invece di 8 passaggi prevede 7:

ede /:

Tabella 1.1. (8, 3, 3 : 1, 0, 1)

Prima botte (capienza 8 l)	Seconda botte (capienza 3 l)	Terza botte (capienza 5 l)
8	0	0
3	0	5
3	3	2
6	0	2
6	2	0
1	2	5
1	3	4
4	0	4

Paolo Dagomari, detto anche Paolo dell'Abbaco, Paolo Astrologo, Paolo G
e, Paolo Arismetra, nel suo T...

1	2	5
1	3	4
4	0	4

Paolo Dagomari, detto anche Paolo dell'Abbaco, Paolo Astrologo, Paolo Geometra o, anche, Paolo Arismetra, nel suo *Trattato d'aritmetica* (c. 1370), considera questo stesso caso, ripreso successivamente anche dal Tartaglia nel *General trattato di pesi e misure* (1556), il quale sviluppa una variante addirittura più complessa (partendo da 4 botti di 24, 5, 11 e 13 litri, per arrivare a dividere il contenuto totale di 24 litri fra 3 fratelli in parti uguali) e da Bachet de Mezierac nei *Problemes plaisant & delectables* (1612).

In Bachet sono descritte anche le seguenti varianti: (16, 9, 7 : 8, 8, 0), (16, 11, 6 : 8, 8, 0), (42, 27, 12 : 21, 21, 0).

Passar de (12, 5, 7: 12, 0, 0) para (12, 5, 7: 6, 0, 6)

LIII capitolo: a partire un'altra botte fra doi²⁵

Problema: la prima variante prevede una botte piena da 12 litri e due vuote da 5 e 7 litri rispettivamente (12, 5, 7). Il quesito è simile a quello presentato nel gioco precedente: bisogna arrivare ad avere, nella prima e nella terza botte, 6 litri di vino in modo tale che i due fratelli siano soddisfatti della ripartizione imparziale (6, 0, 6).

Soluzione: illustreremo la soluzione fornita da Pacioli per mezzo della Tabella 2.

Tabella 2. (12, 5, 7 : 6, 0, 6)

Prima botte (capienza 12 l)	Seconda botte (capienza 5 l)	Terza botte (capienza 7 l)
12	0	0
7	5	0
7	0	5
2	5	5
2	3	7
9	3	0
9	0	3
4	5	3
7	5	0
7	0	5
2	5	5
2	3	7
9	3	0
9	0	3
4	5	3
4	1	7
11	1	0
11	0	1
6	5	1
6	0	6

Si eseguono, in totale, 19 passaggi resi però artificialmente numerosi a causa di *loop* o ripetizioni. In particolare, la sequenza di passaggi evidenziata in **rosso** nella Tabella 2, è identica (e, quindi, superflua) a quella evidenziata in **blu**. Vi sono, dunque, 7 passaggi che potrebbero essere tranquillamente eliminati pervenendo allo stesso risultato finale.

A sottolineare il fatto che non si tratta di una svista ma di una ripetizione voluta, Pacioli scrive "*et sia facta più bella asai che la precedente et con più mutazioni*".

Viene poi proposta una variante interna, nel senso che il numero dei fratelli aumenta di uno e di conseguenza aumenta il numero delle botti che hanno una capienza, rispettivamente, di 18 (piena), 5, 6 e 7 (vuote) litri. La soluzione proposta da Pacioli risulta molto elegante in

30 judeus e 2 cristãos em roda. Matar de 9 em 9.

Onde colocar os cristãos?

Notação: (2, 30, 9)

Os cristãos devem ficar juntos de maneira a que o 1º judeu a morrer seja a segunda pessoa após os cristãos. A contagem começa no negrito (Esq->Dir)

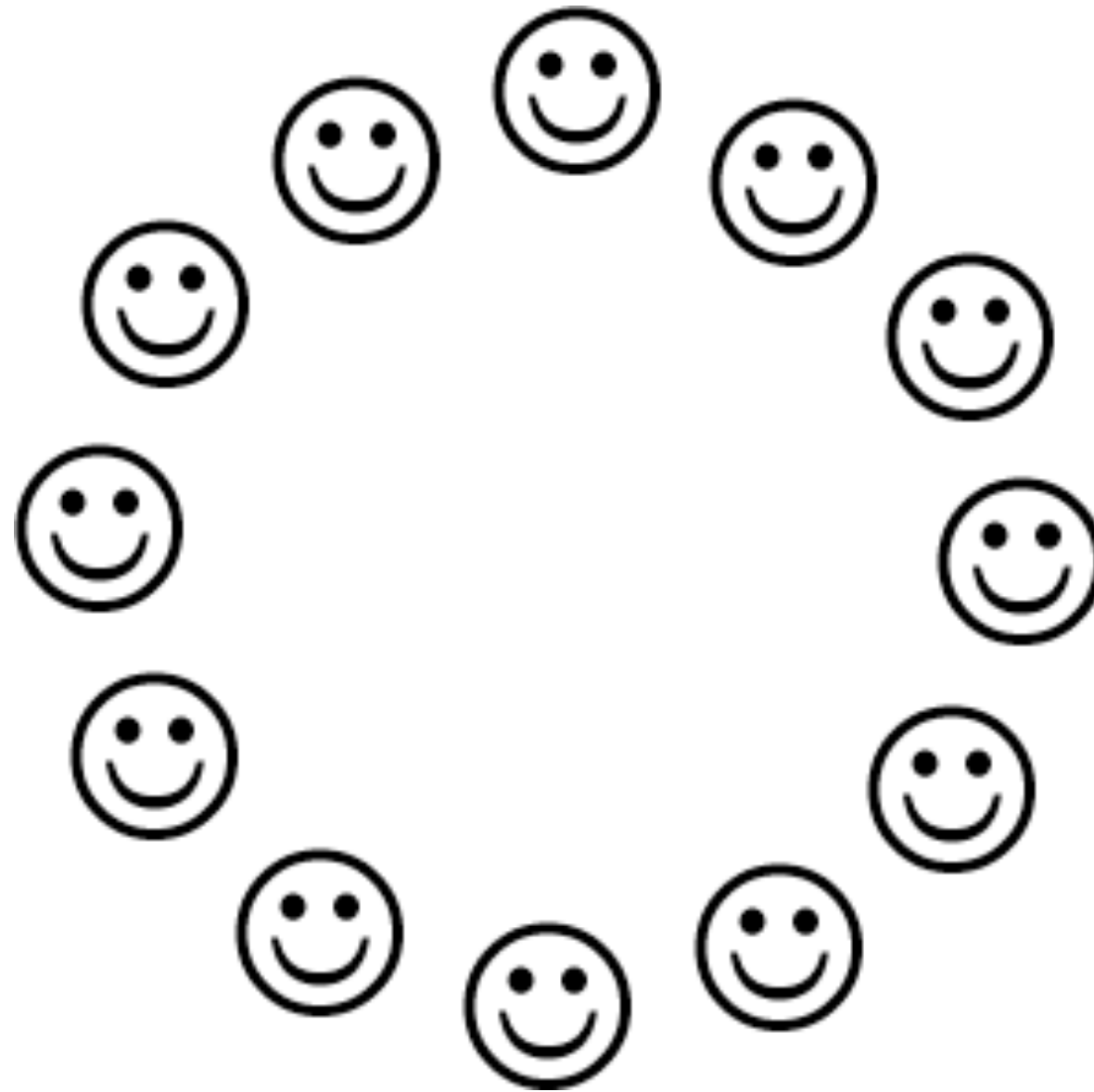
...JJJJJCCJJJJ...

Está na base de uma família de truques de cartas hoje referida por "baralhar australiano" (down-under).

Pacioli também dá o caso (2, 30, 7). Os cristãos devem estar ...JCJJCJ... e a contagem, em sentido Esq->Dir deve começar no negrito:

...JCJJCJ...

O caso (1, 11, 3)



Josephus (15,15,3)

Jogo de “subtracção”. Dado um número a atingir (x), dois jogadores alternam a somar uma quantidade que não pode exceder um número acordado (y). Exemplo: $x=30$, $y=6$.

Outro: $x=100$, $y=10$.

Dividindo x por $(y+1)$. Se o resto for $\neq 0$, devemos jogar para as quantias:

$d, d+(y+1), d+2(y+1), d+3(y+1), \dots$

Primeira ocorrência de
uma forma de NIM.

A, B, C recebem, respectivamente, 12, 24, 36 moedas. São distribuídos pelos três, à sorte, três objectos (D, G, Q). Diz o Mágico: quem tem D deite fora metade das suas moedas; quem tem G deite fora $\frac{2}{3}$, quem tem Q $\frac{3}{4}$. Juntem o que têm e digam-me o resultado. O Mágico adivinha quem tem qual objecto.

Semelhante a um do Fibonacci. Este é menos elegante. Talvez Pacioli quisesse treinar operações com fracções.

Para cada soma possível (das 6) há uma única distribuição dos objectos compatível. Ver tabela seguinte.

delle monete e di conseguenza resterà con un terzo di quanto posseduto originariamente, e chi ha ricevuto il terzo oggetto, il quattrino, getti i $\frac{3}{4}$ e, quindi, si ritroverà con $\frac{1}{4}$ delle monete. Facendo la somma dei resti (cioè delle monete che restano in mano), ci sono 6 possibili risultati: 23, 24, 25, 27, 28 e 29, indicati nella prima riga della Tabella 4. Sotto ciascuna somma abbiamo la rispettiva assegnazione di oggetti.

Tabella 4. Effetto XXXV

Somma dei resti	23	27	24	25	28	29
A 12	D 6	Q 3	D 6	G 4	G 4	Q 3
B 24	G 8	D 12	Q 6	D 12	Q 6	G 8
C 36	Q 9	G 12	G 12	Q 9	D 18	D 18

Quindi, leggendo, per esempio, la prima colonna della Tabella 4, se la somma dei resti ammonta a 23, significa che il soggetto A, che originariamente possedeva 12 monete, ha ricevuto il ducato e quindi ha gettato via la metà delle sue monete restando con 6. Il secondo spettatore, B, che aveva in partenza 24 monete, ha ricevuto il grosso e quindi

Dois dados na mão do voluntário. Sejam x e y os pontos de um lançamento.

○ Mágico dá instruções de cálculo:

$$2x,$$

$$2x+5,$$

$$(2x+5)5,$$

$$(2x+5)5+y.$$

○ Mágico ouve o último valor e adivinha.

O Mágico subtrai 25 e lê os números...

Dois dados na mão do voluntário. Sejam x, y, z os pontos de um lançamento.

○ Mágico dá instruções de cálculo:

$$2x,$$

$$2x+5,$$

$$(2x+5)5,$$

$$(2x+5)5+y,$$

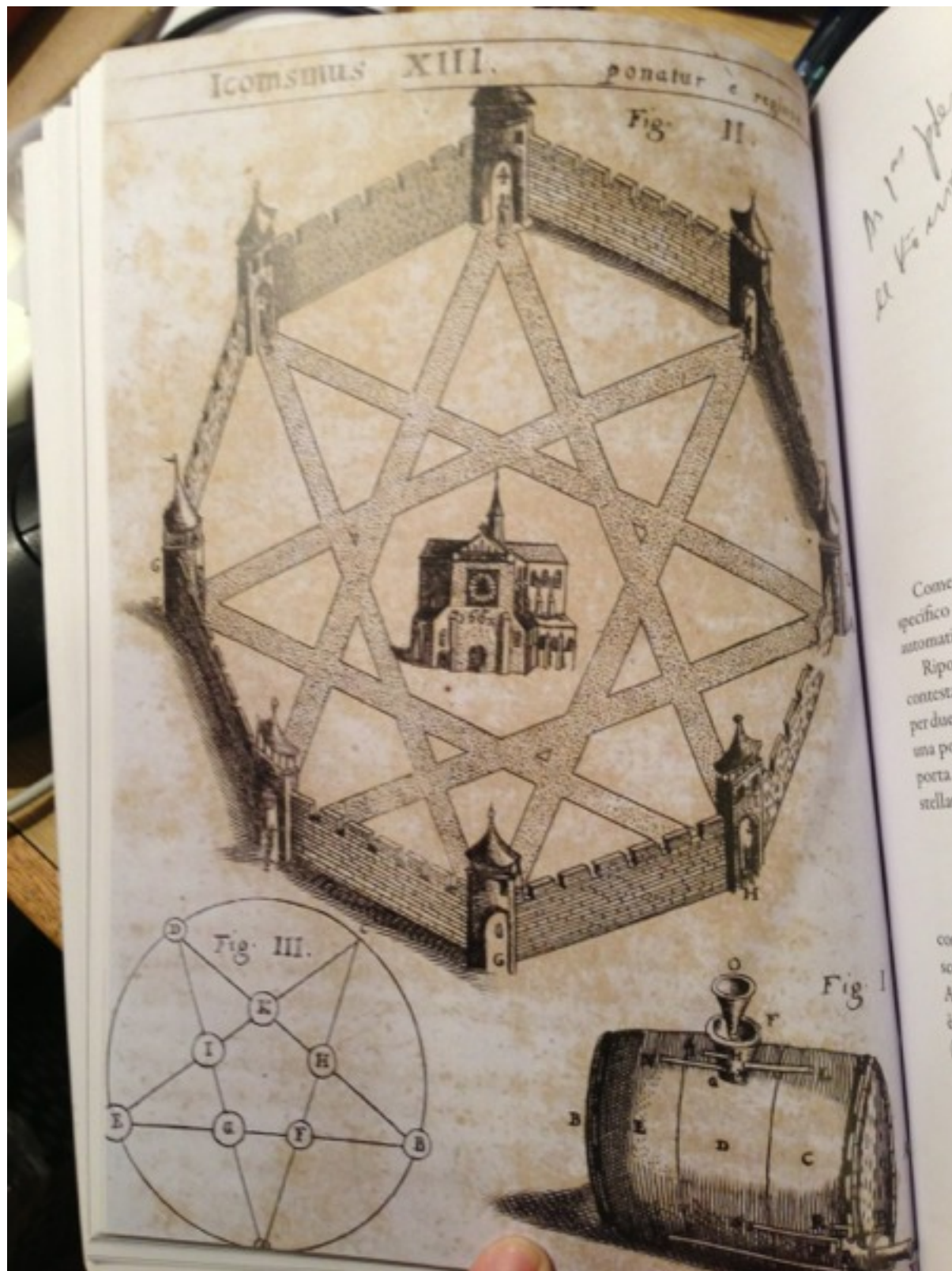
$$10((2x+5)5+y),$$

$$10((2x+5)5+y)+z.$$

○ Mágico ouve o último valor e adivinha.

O Mágico subtrai 250 ao total e lê...

Cidade das oito portas.



Oito guardas entram simultaneamente por oito portas diferentes, dirigindo-se para uma das portas opostas. Ninguém pode cruzar caminhos com quem for guardar a sua própria porta de entrada.

Isto é Koenigsberg... ou quase!

A solução:

AD, FA, CF, HC, EH, BE, GB, DG

16 moedas. Em duas filas de 8 moedas o voluntário deve indicar qual tem a moeda escolhida, três vezes.

Sejam elas a, b, ..., r.

abcdefgh
klmnop

supor V escolhe d. É a 1ª fila. Formemos duas filas alternando moedas das duas filas, começando na que não tem a escolhida.

kalbmcd
oepfqgrh

Repete-se o processo, mas agora começa-se com uma moeda da fila que contém a escolhida:

koaelpbf
mqcgnrdh

E outra vez ainda, começando com uma moeda da linha em que a escolhida não está:

kmoqaceg
lnprbdfh

A escolhida será sempre a antepenúltima!

Também está no Bachet.

Este é o avô do $3 \times 9 = 27$.

Maças de Borgo a Perugia (que distam 30 milhas entre si). O homem que as leva, que só consegue carregar 30, come uma por milha percorrida. Como maximizar o número de maçãs que chegam a Perugia?

Solução do Pacioli:

Borgo $\leftarrow 20 \rightarrow$ STOP $\leftarrow 10 \rightarrow$ Perugia

Levar tudo para STOP e depois as 30 para Perugia.
Resultado: 20.

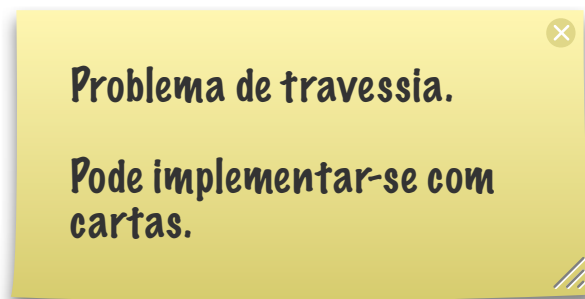
Melhor solução:

Borgo $\leftarrow 10 \rightarrow$ STOP1 $\leftarrow 15 \rightarrow$ STOP2 $\leftarrow 5 \rightarrow$ Perugia

Resultado: 25.

Primeiro JEEP Problem?

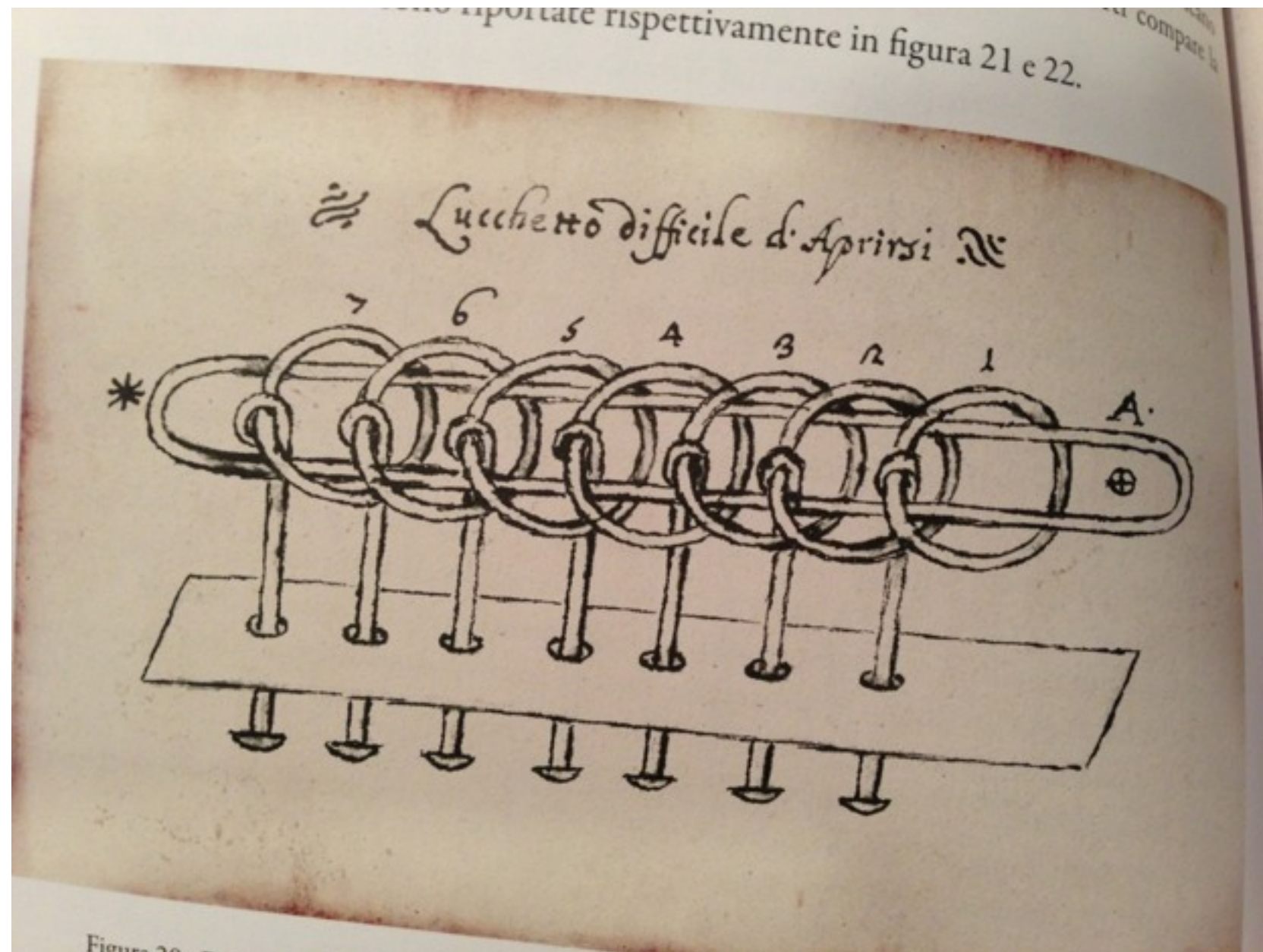
Três maridos e três mulheres ciumentas



Problema de travessia.
Pode implementar-se com cartas.

A yellow sticky note with a small 'x' icon in the top right corner and a small icon in the bottom right corner. The text is in a dark, sans-serif font.

Anéis chineses



Primeira ocorrência

