Chapter 3

Jogos Nim

Jogos combinatórios imparciais

Este capítulo trata de uma classe de jogos que dispõe de uma teoria matemática muito rica. Apresentaremos aqui, de forma coloquial, os conceitos e resultados mais imediatamente relacionados com a sua prática, indicando a bibliografia adequada aos interessados ([ONAG, WW]).

Estes jogos, também conhecidos por jogos Nim, são caracterizados pelas seguintes condições:

1. Há dois jogadores;

2. Há um conjunto bem definido de posições possíveis do jogo;

3. Em cada posição, as jogadas permitidas aos jogadores são as mesmas (não há Brancas e Negras, ou outras formas de distinguir os jogadores);

4. Os jogadores jogam alternadamente;

5. O jogo acaba quando se atinge uma posição da qual não se pode efectuar nenhuma jogada legal;

6. Ganha o último a jogar. Isto é, o primeiro a não dispor de nenhum lance legal perde;

7. O jogo acaba num número finito de jogadas, independentemente da forma como é jogado.

Analisemos o jogo seguinte, que parte de uma pilha de 17 feijões. Há dois jogadores e cada jogada consiste em retirar um, dois ou três feijões. Ganha quem retirar o último feijão.

Para compreender bem este jogo, devemos fazer uma análise retrógrada, a partir da posição final (que corresponde a zero feijões). Se houver um, dois ou três feijões, o jogador seguinte retira todos os feijões e ganha. Se houver quatro, o caso é diferente, o jogador seguinte vai tirar um (deixando três), dois (deixando dois) ou três (deixando um). Em qualquer dos casos o jogador seguinte retira-os a todos e ganha. Deixar zero ou quatro é um bom objectivo: garante a vitória a quem o faz. De forma semelhante, constata-se que, se deixarmos oito, doze ou dezasseis, o resultado também é favorável.

Estas posições, que garantem a vitória de quem as deixa ao adversário, chamam-se *posições P*, ou *P-posições*. As posições que não forem posições P dão, necessariamente, a vitória ao jogador a que cabe a jogada seguinte e designam-se por *posições N* ou *N-posições*[1]. O conjunto de todas as P--posições designa-se por $\mathcal{P}$ e o conjunto das N-posições por $\mathcal{N}$.

No exemplo anterior vimos que as P-posições eram $0, 4, 8, 12, 16$. Tem-se

[1] As inicias P e N são tradicionais na literatura especializada, e têm origem nas palavras inglesas *previous* (prévio) e *next* (seguinte).

então

$$\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12, 16\}\,, \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17\}\,.$$

Se em vez de 17 tivéssemos outro número de feijões, era fácil ver que as P-posições são sempre os múltiplos de 4.

Dado um jogo combinatório imparcial é sempre possível determinar quais são as posições P e N, em princípio. Basta partir das posições terminais, que são P-posições, e classificar as seguintes segundo o algoritmo seguinte:

1. Todas as posições terminais são P-posições;
2. Todas as posições das quais se pode atingir uma P-posição, numa jogada, são N-posições;
3. Todas as posições das quais só se podem atingir posições N, numa jogada, são P-posições;
4. Se o passo anterior (3) não introduziu novas posições-P, o algoritmo termina aqui; caso contrário, deve ir-se de novo para o passo 2.

Outra forma de referir esta partição no conjunto das posições de um jogo imparcial é a seguinte:
Caracterização de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$. As posições P e N são definidas recursivamente pelas condições seguintes:

i) Todas as posições terminais são P-posições;

ii) De qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P--posição;

iii) De qualquer P-posição todas as jogadas conduzem a N-posições.

Jogos de Subtracção

A partir de um conjunto da forma $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ (de feijões, por exemplo) podemos definir um jogo semelhante ao analisado acima, mas alterando o número de feijões que se pode retirar em cada jogada. O caso referido correspondia a ser legítimo retirar 1, 2 ou 3 feijões. Dizemos que se tratava do jogo de subtracção relativo ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e representámo-lo por $S_{\{1,2,3\}}$.

Podemos agora considerar os mais diversos jogos de subtracção fazendo variar o conjunto associado. Analisemos, por exemplo, o jogo $S_{\{2,3\}}$.

As posições terminais são $0, 1$, que são, portanto, posições P. As posições que nos permitem atingir uma terminal numa jogada só são $2, 3, 4$, que então são posições N. De 5 ou 6 só se podem atingir as posições $2, 3, 4$, portanto 5 e 6 são posições P. O padrão começa a ficar evidente...

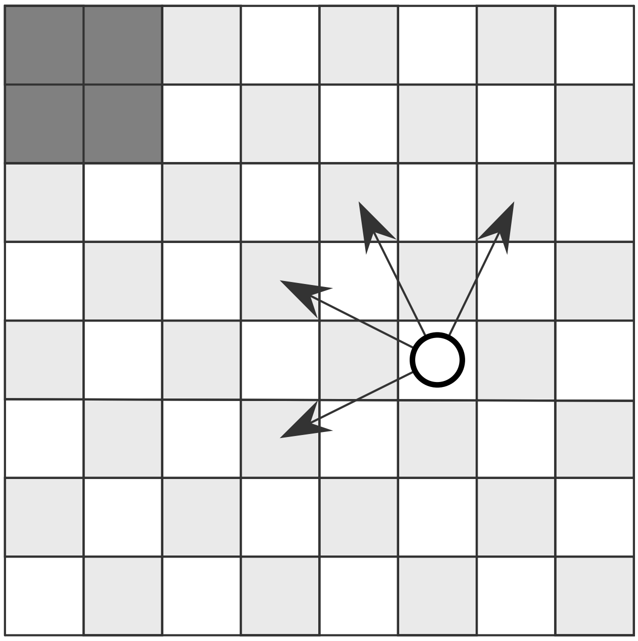
Tem-se

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ P & P & N & N & N & P & P & N & N & N & \dots \end{array}$$

Há outros jogos que podem ser analisados desta forma, mesmo jogos de tabuleiro. As páginas seguintes contêm algumas propostas para os leitores identificarem as posições P e N e, assim, ficarem mestres absolutos destes jogos.

Cavalo branco

Este jogo joga-se num tabuleiro quadriculado rectangular; pode ser um tabuleiro de xadrez. No início há uma peça única no tabuleiro, um cavalo branco. Cada jogada consiste em movimentar o cavalo segundo uma das direcções assinaladas na figura abaixo. Quando o cavalo chega a uma das casas sombreadas não pode movimentar-se mais e o jogo termina com a vitória do jogador que o colocou lá.

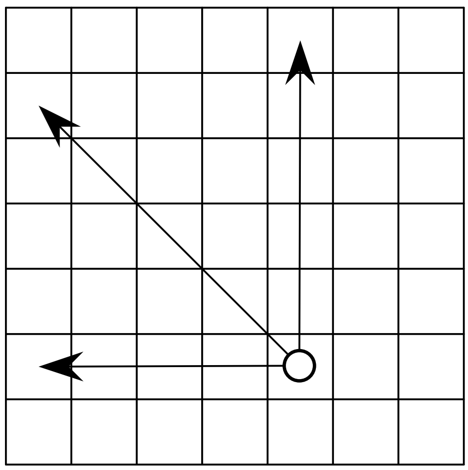


Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Whitoff-I

Num tabuleiro rectangular, por exemplo de xadrez, coloca-se uma rainha. Cada jogada consiste em movimentar esta peça com a restrição seguinte: a rainha tem os seus movimentos habituais, mas só pode movimentar-se para Norte, Oeste ou Noroeste. A figura mostra as direcções admitidas. Os jogadores alternam até que um deles não possa jogar, por encontrar a peça no canto superior esquerdo, sendo declarado vencedor o jogador que aí a colocou.



Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Whitoff-II

Neste jogo com duas pilhas de feijões, cada jogada consiste numa das seguintes possibilidades:

1. Escolher uma das pilhas e reduzir o seu número de feijões (tirar pelo menos um, mas pode tirar toda a pilha);
2. Retirar o mesmo número de feijões de ambas as pilhas.

Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

JIL

Este jogo, inventado por Jorge Nuno Silva, desenrola-se num n-uplo de inteiros não negativos. Os jogadores alternam jogadas, de acordo com os pontos seguintes:

1. Uma jogada consiste em subtrair uma unidade a uma componente qualquer do n-uplo e somar quantidades não negativas arbitrárias às componentes de ordem superior, se as houver.

2. Quem não puder jogar, por, sendo a sua vez, ter à sua frente um n-uplo com todas as componentes nulas, perde.

Vejamos um exemplo. Para $n = 5$ e posição inicial $(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2})$ temos, por exemplo, esta sequência de lances legais:

$$(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2} - 1)\,.$$

Será que este jogo acaba, seja qual for a configuração inicial? Isto é, dado um n-uplo inicial arbitrário, e respeitando as regras 1 e 2 acima, será que encontraremos um vencedor num número finito de jogadas?
Admitindo que o jogo termina sempre após um número finito de jogadas, qual é a estratégia ganhante (isto é, quais são $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$)?

Por exemplo, partindo da posição

$$(22, 222, 2, 3, 2^3, 10)\,,$$

ganha o primeiro ou o segundo jogador?

Referências

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e JIL-Jogo Indefinidamente Longo", Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 43, Outubro de 2000, pp. 143–147

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e Exponenciação Comutativa", Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 44, Abril de 2001, pp. 119–121

LIM

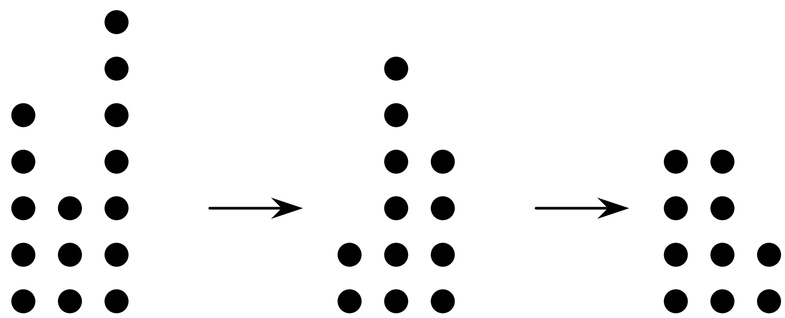
Este jogo, inventado por Jorge Nuno Silva, utiliza três pilhas de feijões.

Cada jogada consiste em escolher duas pilhas, retirar o mesmo número de feijões de cada uma delas e somar esse número à terceira. Perde o jogador que não puder jogar, por, na sua vez, encontrar duas pilhas vazias.

Por exemplo, eis duas jogadas válidas:

$$(5,3,7) \mapsto (2,6,4) \mapsto (4,4,2)\,.$$

Ou, em diagrama:



Referências

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e LIM", Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 46, Abril de 2002, pp. 119–124.

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e Corpo Estranho", Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática, 47, Outubro de 2002, pp. 97–100.

Nim

Este clássico foi o primeiro jogo combinatório a ser tratado matematicamente, no artigo de Bouton [NGCMT].

Joga-se com pilhas de feijões. Cada jogador, quando lhe toca jogar, pode retirar feijões de uma pilha à sua escolha, mas quantos quiser, de um mínimo de um a um máximo de toda a pilha.

Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Se o jogo envolver somente uma pilha de feijões, a caracterização é muito simples. Se a pilha não for vazia, o próximo jogador ganha, retirando todos os feijões. Se a pilha for vazia, o jogador anterior ganhou.

Com uma pilha, o Nim é demasiado evidente:

$$\begin{array}{llllll} \textit{número de feijões} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \textit{tipo} & P & N & N & N & N & \ldots \end{array}$$

Com duas pilhas, o jogo também não é difícil. Se as pilhas forem diferentes, o jogador seguinte iguala-as e, a partir daqui, copia a jogada do adversário. Por exemplo, se duas pilhas, com 4 e 6 feijões, forem representadas pelo par $(4,6)$, então a boa jogada é para $(4,4)$. A partir de então, o que um jogador fizer numa pilha, o adversário faz na outra. Este tipo de estratégia, que replica as jogadas do adversário, é conhecida por *Tweedledum e Tweedledee*.

A caracterização das posições do Nim com duas pilhas:

$$(n,m) \quad \text{é} \quad \begin{cases} P & se \quad n = m \\ N & se \quad n \neq m \end{cases}$$

No caso de três pilhas a análise não é tão simples. Necessitamos de novos conceitos para determinar a estratégia óptima.

A *Soma-nim* de dois inteiros não negativos x, y obtém-se representando-os em base 2 e somando os respectivos coeficientes módulo 2 (isto é, $0+0 = 0$, $0+1 = 1$, $1+0 = 1$, $1+1 = 0$) e representa-se por $x \oplus y$.

Determinemos, por exemplo, $5 \oplus 7$. Tem-se $5 = 2^2 + 1$, $7 = 2^2 + 2 + 1$, o que pode ser condensado para

$$5 = (101)_2 \qquad 7 = (111)_2$$

Efectuando a soma (módulo 2) ordenada dos coeficientes, obtemos

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

portanto, como $(010)_2 = 2$, tem-se $5 \oplus 7 = 2$.

A soma-nim goza de todas as boas propriedades:

1. Associativa: Tem-se $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
2. Comutativa: Tem-se $x \oplus y = y \oplus x$;
3. 0 é neutro: $0 \oplus x = x$;
4. Cada número é o seu próprio inverso: $x \oplus x = 0$;
5. Vale a lei do corte: Se $x \oplus y = z \oplus y$ então $x = z$.

A importância desta soma reside no facto de Bouton ter caracterizado as posições do jogo Nim geral em termos da soma-nim dos números de feijões nas diversas pilhas. Se representarmos a posição com n pilhas, com número de feijões $x_1, \ldots, x_n$ por $(x_1, \ldots, x_n)$, temos o

Teorema de Bouton: A posição $(x_1, \ldots, x_n)$ é uma posição P se, e somente se, $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

Repare-se que este teorema inclui os casos de o jogo ter somente uma ou duas pilhas, que analisámos antes.

Vejamos um exemplo.

Consideremos o jogo Nim com quatro pilhas $(3, 5, 7, 9)$. Determinemos $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9$. Como $3 = (11)_2$, $5 = (101)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$, temos

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

portanto $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 8$. Trata-se de uma posição N. A única jogada vencedora é a que retira 8 feijões à coluna com 9, porque $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 1 = 0$, como se pode verificar[2]:

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

[2]Aqui, como antes, é irrelevante se escrevemos, ou não, os zeros à esquerda.

Apresentamos a teoria do Nim de forma mais extensa porque muitos outros jogos se tornam acessíveis se a conhecermos bem.

Alguns dos jogos que apresentamos reduzem-se a versões do Nim: é preciso é identificar onde estão as pilhas de feijões e quais os respectivos disfarces...

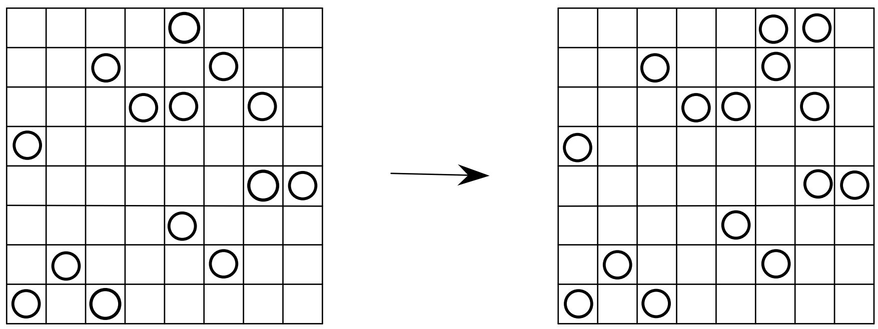
Vejamos, de seguida, alguns desses disfarces.

Plainim

Num tabuleiro de xadrez colocam-se várias peças iguais. Numa jogada só se podem retirar e adicionar peças numa única linha do tabuleiro. Cada casa pode conter, no máximo, uma peça. Uma jogada consiste em retirar uma peça e, nas casas à direita dessa (se as houver), colocar e remover peças à vontade. Isto é, as casas à direita da peça retirada podem permanecer como estavam (ocupadas ou vazias) ou passar de ocupadas a vazias ou de vazias a ocupadas.

Ganha o que retirar a última peça.

Eis um exemplo de jogada legal, onde se jogou na última linha, retirando uma peça e juntando, à direta desta, duas outras.



Notas

Se identificarmos cada casa vazia do tabuleiro com 0 e cada casa ocupada com 1, obtemos em cada linha a representação binária de um número inteiro não negativo.

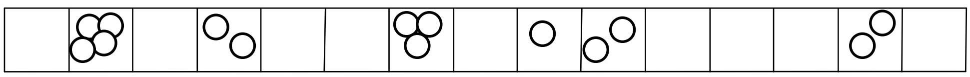
A analogia com o Nim torna-se, assim, evidente.

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Nimble

Este jogo ocorre numa tira $1 \times n$. No início há algumas moedas, em posições escolhidas aleatoriamente. Cada jogada consiste em escolher uma moeda e em movimentá-la para a esquerda o número de casas que se quiser. Cada casa pode conter qualquer número de moedas. Pode-se saltar sobre casas ocupadas. O jogo termina quando todas as peças estiverem na casa mais à esquerda da tira. Ganha o último a jogar.



Notas

Para cada moeda considere-se a sua distância à casa situada na extremidade esquerda da tira. Obtemos assim alguns números inteiros não negativos. Cada jogada consiste, no fundo, em escolher um deles e em substituí-lo por um menor.

Não será este jogo semelhante ao Nim com pilhas com esses números de feijões?

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Tartarugas

Este jogo foi concebido por H. Lenstra. Uma fila de n moedas é colocada na mesa. Há as que mostram a **F**ace e as que mostram o **V**erso. Por exemplo, com $n = 13$, poderíamos ter

$$V \quad F \quad V \quad V \quad F \quad V \quad V \quad V \quad F \quad F \quad V \quad F \quad V$$

Cada jogada consiste em escolher uma moeda que tenha a Face virada para cima, em voltá-la, e, querendo, em escolher uma moeda à esquerda da anterior e em alterar o seu estado (de F para V ou de V para F). Ganha quem voltar a última Face para Verso, isto é, perde quem não puder jogar.

Uma implementação alternativa consiste em utilizar peças de damas e em identificar F com branco e V com negro. Assim, uma jogada consiste em substituir uma peça branca por uma negra e, querendo-se, em escolher outra peça à esquerda da anterior e em alterar a sua cor. O jogo acaba quando todas as peças forem negras e ganha quem realizar a última jogada.

A posição correspondente à disposição acima é:

●	○	●	●	○	●	●	●	○	○	●	○	●

Notas

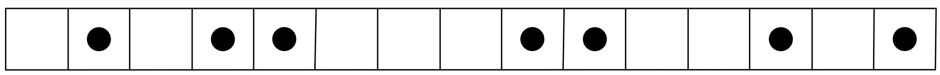
A identificação natural seria considerar cada Face como uma pilha Nim e o número de feijões fornecido pela distância da moeda à extremidade esquerda da tira. Mas uma jogada Nim consiste em substituir uma pilha por outra estritamente menor... Como fazê-lo com as moedas? Talvez valha a pena recordar que, na operação que introduzimos na página 149, a soma é igual à subtracção, isto é, $x \oplus x = 0$...

Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Moedas

Este jogo faz-se numa tira $1 \times n$. No início há algumas moedas, em posições escolhidas aleatoriamente, não mais do que uma em cada casa. Cada jogada consiste em escolher uma moeda e em movimentá-la para a esquerda, para uma casa livre, sem saltar sobre nenhuma outra peça. Como cada casa pode albergar, no máximo, uma moeda, e estas não podem abandonar a fita, e só se podem movimentar da direita para a esquerda, o jogo vai terminar quando as peças estiverem todas encostadas à parte esquerda da tira de jogo. Ganha o último a jogar.



Notas

A identificação de cada moeda com a distância à casa esquerda final não funciona, porque não é permitido saltar outras moedas, de forma que uma jogada não consiste em diminuir essa distância da forma que quisermos.

Neste caso, identificando, alternadamente, cada espaço entre duas moedas consecutivas, da direita para a esquerda, com uma pilha com esse número de feijões, obtemos um jogo Nim (no nosso caso, com pilhas de 1, 0, 0, 1 feijões). Cada jogada na tira de moedas pode diminuir quanto se quiser a esses números. Mas algumas jogadas também os podem aumentar. Acontece que essas jogadas são em número finito, e quem tiver estratégia vencedora no jogo Nim associado não necessita de recorrer a elas...

Referências

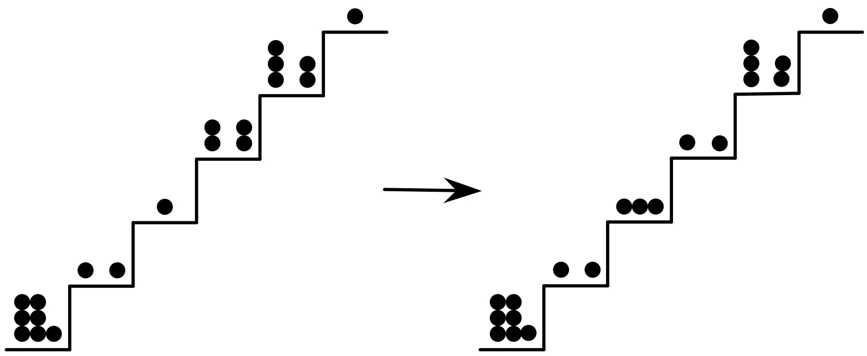
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Escadas

Há n degraus numa escada. Cada degrau contém um número inteiro não negativo de peças. Cada jogada consiste em passar algumas peças de um degrau para o degrau imediatamente abaixo. Perde quem, ao querer jogar, constatar que todas as peças se encontram já no andar térreo, de onde se não podem mover mais.

Outra implementação consiste em colocar peças de damas em casas consecutivas de uma fila de um tabuleiro, sendo permitido deslocar algumas de uma casa para a que lhe estiver imediatamente à esquerda.

Um n-uplo de inteiros não negativos pode representar a situação em cada momento. Assim, a jogada $(7,2,1,4,5,1) \mapsto (7,2,3,2,5,1)$ corresponde à jogada ilustrada abaixo.



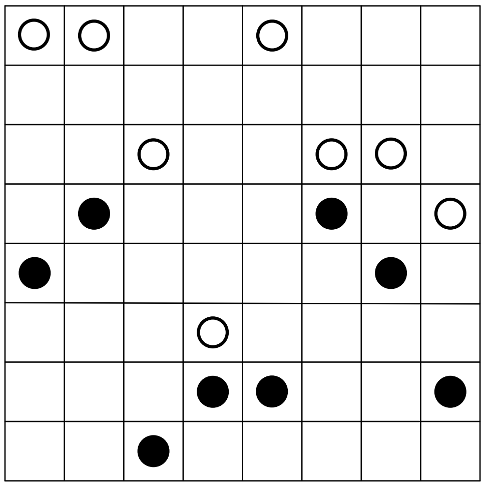
Notas

Numere os degraus, a partir da esquerda. Considere o jogo Nim correspondente aos degraus de numeração par. Cada jogada nas escadas corresponde a retirar feijões de uma das pilhas obtidas, ou a aumentá-lo, mas estes aumentos podem ser imediatamente anulados (movendo as mesmas peças), e não duram sempre...

Northcott

Este jogo realiza-se num tabuleiro quadriculado $n \times m$. Há dois jogadores; um move as Brancas, o outro as Negras. Em cada coluna há uma peça branca e uma peça negra. Cada jogada consiste em movimentar uma peça para a frente ou para trás o número de casas que se quiser, desde que não se abandone a sua coluna e não se salte sobre a outra peça. Perde quem, por ter todas as suas peças encurraladas, não dispõe de nenhum lance legal.

Uma posição inicial possível:



Notas

Considere o jogo Nim com uma pilha de feijões por cada coluna do tabuleiro, e com o número de feijões dado pelo número de casas entre as duas peças da coluna.

Mais uma vez, os lances que não existem no Nim original só serão utilizados pelo perdedor, e somente para adiar um pouco a derrota inevitável...

A existência de Brancas e Negras não violam o princípio da página 141, porque a única coisa relevante é o número de casas entre as duas peças da mesma coluna.

Referências

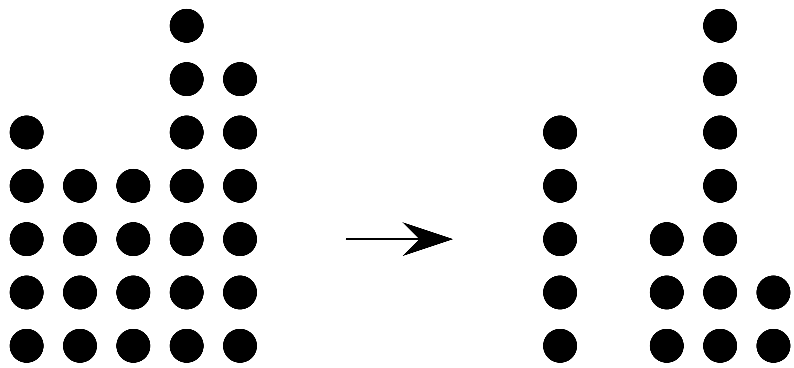
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Nim_k

Neste jogo, criado por H. Moore, parte-se de n pilhas de feijões. Cada jogada consiste em retirar o número de feijões que se quiser de k pilhas (k é um número fixado no começo do jogo, $k < n$, e tem de se retirar pelo menos um feijão de uma pilha). Podem retirar-se diferentes quantidades de pilhas diferentes, podendo algumas ser nulas. Perde quen não dispuser de nenhum lance legal.

Para $k = 1$ temos o Nim habitual.

Um exemplo de jogada legal, com $n = 5, k = 3$, correspondente a $(5, 4, 4, 7, 6) \mapsto (5, 0, 3, 7, 2)$.



Notas

O métode de representação binária desempenhou um papael importante na compreensão do Nim. Talvez aqui também necessitemos de outra base...

Referências

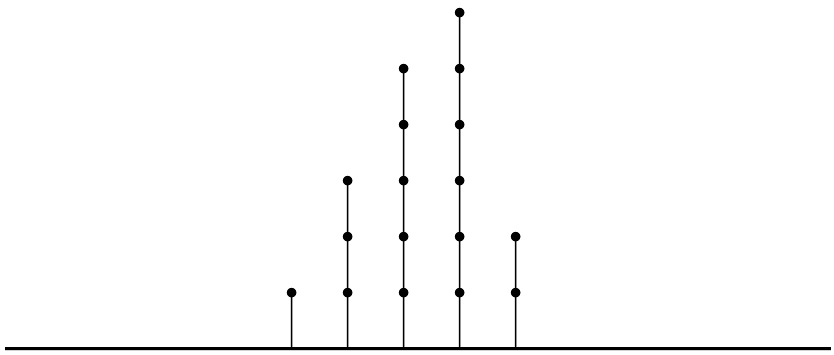
Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman and Company, 1986.

Nim com bloqueio

Joga-se com pilhas de feijões. Cada jogador, quando lhe toca jogar, pode retirar feijões de uma só pilha, mas quantos quiser, de um mínimo de um a um máximo de toda a pilha. Ganha o jogador que retirar o último feijão.

Nesta versão, cada jogador, antes de jogar, ouve o seu adversário anunciar um bloqueio, isto é, para cada pilha, o adversário diz um número de feijões que *não* pode retirar dessa pilha.

Por exemplo, a posição correspondente a pilhas de $1, 3, 5, 6, 2$ terá o seguinte aspecto.



Referências

George Washington University Problems Group, "Blocking Nim", *College Mathematics Journal*, vol. 35, n.º 5, Novembro de 2002, pp. 414–415.

Jogos em grafos

Nesta secção vamos aprender a representar jogos imparciais utilizando grafos, o que permite ficar a saber um pouco mais do que a caracterização das posições em dois tipos, P e N.

Fixemos alguns conceitos.

Digrafo ou Grafo Dirigido é um sistema constituído por um conjunto de *vértices* (as posições do jogo) X e uma função F que faz corresponder a cada elemento de X, x, um subconjunto de X ($x \mapsto F(x) \subset X$). Representa-se por (X, F). $F(x)$ é o conjunto das posições para as quais se pode jogar a partir de x. Se $F(x)$ for vazio, diz-se que x é *terminal*.

Para termos um jogo num grafo basta escolher um vértice inicial, x_0, e estipular que os jogadores alternam, escolhendo, para cada vértice x, um outro em $F(x)$. Se um jogador tiver de mover a partir de um vértice y para o qual se tem $F(y)$ vazio e não puder efectuar o seu movimento perde.

Só consideramos grafos para os quais os jogos são finitos.

Os jogos sobre grafos podem ser analizados classificando os seus vértices P e N, a partir dos vértices terminais, por um processo semelhante ao referido anteriormente.

Contudo, vamos introduzir uma função, que nos dá informação adicional, que virá a ser útil mais tarde, quando jogarmos vários jogos ao mesmo tempo.

Relembremos que, dado um conjunto de números inteiros não negativos, A, se representa por $\operatorname{mex} A$ o menor inteiro não negativo que não pertence a A[3]. Por exemplo, $\operatorname{mex}\{0, 1, 3, 44\} = 2$.

A função de Grundy de um grafo (X, F) é a função $g : X \to \mathbb{N}_0$ definida por[4]

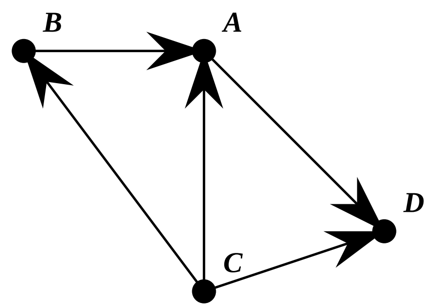
$$g(x) = \operatorname{mex}\{g(y) \,:\, y \in F(x)\}$$

Note-se que o valor da função de Grundy se calcula recursivamente. Para cada x, o valor de $g(x)$ depende dos valores que $g(y)$ toma quando y percorre $F(x)$. Devemos então começar esta recursão nos vértices terminais, x, para os quais $F(x)$ é vazio, o que nos dá, neste caso, $g(x) = 0$.

Vejamos um exemplo muito simples.

[3] *mex* substitui a expressão **m***ínimo* **ex***cluído*.

[4] Representamos por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos inteiros não negativos.

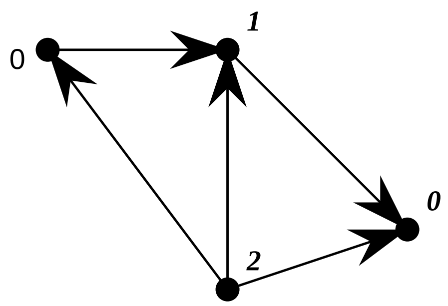


D é um vértice terminal, logo tem-se $g(D) = 0$. Não há mais vértices terminais. Como $F(A) = \{D\}$, e conhecemos $g(D)$, podemos calcular $g(A)$. Tem-se

$$g(A) = \operatorname{mex}\{g(D)\} = \operatorname{mex}\{0\} = 1\,.$$

Temos agora $g(B) = \operatorname{mex}\{g(A)\} = \operatorname{mex}\{1\} = 0$. Finalmente, $g(C) = \operatorname{mex}\{g(A), g(B), g(D)\} = \operatorname{mex}\{0, 1\} = 2$.

Colocando o valor da função de Grundy perto de cada vértice:



Note-se que, num jogo Nim, a função de Grundy de uma pilha coincide com o seu número de feijões.

Consideremos de novo o jogo de subtracção $S_{\{2,3\}}$. Não precisamos de desenhar o grafo para determinar os valores da função de Grundy nas posições deste jogo. As posições terminais são $0, 1$, portanto $g(0) = g(1) = 0$. Tem-se $F(2) = \{0\}$, logo $g(2) = \operatorname{mex}\{0\} = 1$. De forma semelhante se conclui que $g(3) = 1$. Como $F(4) = \{1, 2\}$, tem-se $g(4) = \operatorname{mex}\{g(1), g(2)\} =$

$\text{mex}\{0,1\} = 2$. Como $F(5) = \{2,3\}$, tem-se $g(5) = \text{mex}\{g(2), g(3)\} = \text{mex}\{1\} = 0$. E assim sucessivamente. Depressa emerge um padrão:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ g(x) & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots \end{array}$$

Comparando com a análise anterior deste jogo, vemos que as posições P são exactamente aquelas que anulam a função de Grundy. Este fenómeno é geral, como se compreende facilmente da definição da função de Grundy e da caracterização de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{N}$:

1. $g(x) = 0$ se x for terminal;
2. Se $g(x) = 0$ e $y \in F(x)$, então $g(y) \neq 0$;
3. Se $g(x) \neq 0$, então, para algum $z \in F(x)$, tem-se $g(z) = 0$.

Soma de jogos imparciais

Uma forma de jogar vários jogos ao mesmo tempo consiste no seguinte. Se houver n jogos, um jogador, na sua vez, escolhe um deles e efectua nele uma jogada, deixando todos os outros inalterados. Os jogadores alternam até se atingir uma posição terminal em todos os jogos. Ganha quem fez a última jogada legal. Este novo jogo imparcial chama-se *soma* dos jogos originais.

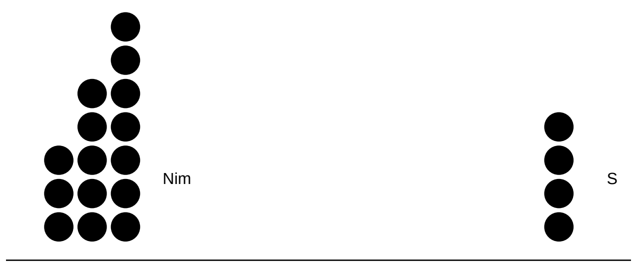
Esta é uma das formas de gerar novos jogos a partir de jogos conhecidos. Acontece que às vezes os jogos são simples, mas a sua soma é complicada... Por exemplo, num jogo Nim com várias pilhas, temos a soma de vários jogos muito simples.

Há um resultado que permite conhecer a função de Grundy da soma a partir das funções de Grundy das parcelas. Para o enunciarmos, na linguagem dos grafos, suponhamos que os jogos são (X_1, F_1), ..., (X_n, F_n), aos quais correspondem as funções de Grundy g_1, ..., g_n, respectivamente. Cada posição da soma destes jogos pode identificar-se com um n-uplo de posições dos jogos-parcelas, $(x_1, ..., x_n)$, onde $x_1 \in X_1$, ..., $x_n \in X_n$. Então, a função de Grundy da soma é g, definida por

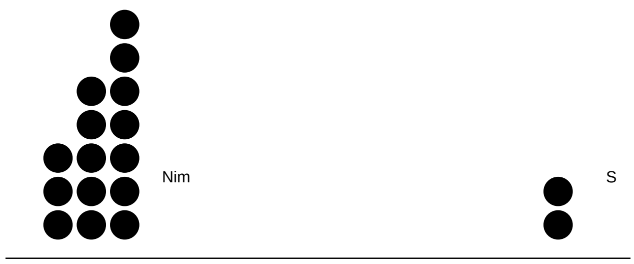
$$g(x_1, ..., x_n) = g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)\,.$$

Como sabemos que as posições P da soma são as que anulam a respectiva função de Grundy, basta saber as funções de Grundy dos jogos individuais para ficarmos a saber, mediante uma simples soma nim, qual a forma óptima de jogar a soma!

Como exemplo vamos analisar o jogo obtido ao somar um jogo, J_1, que é Nim com três pilhas, com 3, 5, 7 feijões e um jogo, J_2, de subtracção, $S_{\{2,3\}}$ relativo a uma pilha com 4 feijões.



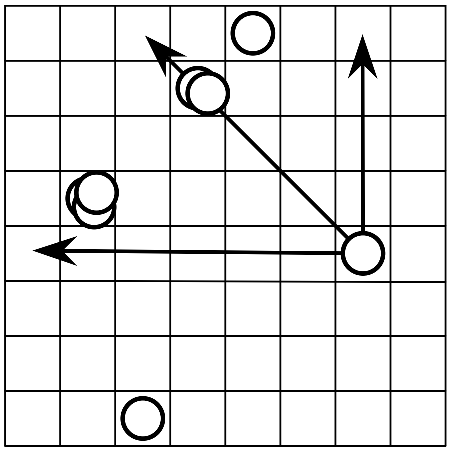
Determinemos o valor da função de Grundy da componente Nim: $3 \oplus 5 \oplus 7 = 1$. No jogo $S_{\{2,3\}}$, a uma pilha de 4 feijões corresponde o valor de Grundy de 2, como vimos na página 143. Portanto, à soma destes dois jogos corresponde o valor $1 \oplus 2 = 3$. Trata-se de uma posição N. Uma boa jogada consiste em retirar 2 feijões da pilha correspondente ao jogo $S_{\{2,3\}}$, já que, neste jogo, uma pilha de 2 tem valor Grundy 1 e $1 \oplus 1 = 0$. Obter-se-ia então a posição ilustrada abaixo:



Será que esta era a única jogada ganhadora?

Rainhas

Este jogo joga-se num tabuleiro quadriculado rectangular de tamanho $n \times m$, que pode ser um tabuleiro de xadrez. As peças são todas iguais: rainhas brancas que se movem para Norte, Oeste, ou Noroeste. Cada jogada consiste em mover uma rainha o número de casas que se quiser, de acordo com a descrição acima. Cada casa pode conter qualquer número de rainhas. Perde quem não puder jogar, por todas as rainhas se encontrarem no canto superior esquerdo.



Notas

A cada rainha está associado um jogo de Whitoff (ver p. 145). O jogo aqui apresentado é, então, uma soma de jogos...

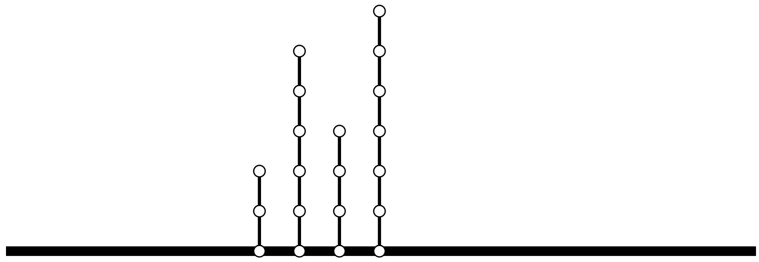
Referências

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Arbusto

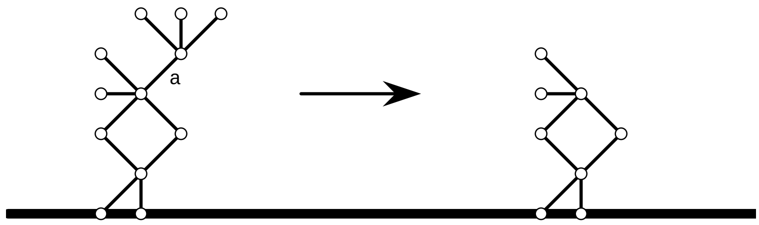
Este jogo desenvolve-se num desenho de um arbusto, isto é, um conjunto de segmentos ligado a um *chão*. Cada jogada consiste em apagar um dos segmentos, sendo que todos os segmentos que ficarem, assim, sem ligação ao chão, também devem ser apagados. Ganha quem cortar o último segmento.

O caso mais simples corresponde a termos várias canas:



Mas isto é simplesmente um jogo de Nim, neste caso equivalente a pilhas de 2, 5, 3 e 6 feijões.

Em geral o arbusto é mais complicado. Vejamos um exemplo de jogada legal:

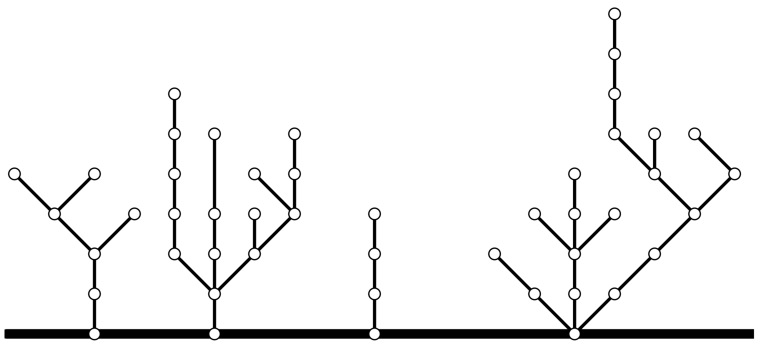


Se um jogador decidir cortar o segmento a, então também desaparecem os três segmentos que ficariam sem contacto com o chão.

Trata-se, naturalmente, de um jogo combinatório imparcial. De acordo com a teoria esboçada nas páginas anteriores, cada posição é equivalente a uma pilha de feijões no jogo Nim (o número de feijões é indicado pela função de Grundy).

Cada arbusto concreto não é, em geral, a soma de arbustos menores, porque as partes não estão, usualmente, separadas. Portanto, a teoria da soma de jogos, apresentada atrás, não nos ajuda neste caso. Contudo, há dois princípios, que apresentaremos de seguida, que permitem facilitar a determinação do valor Grundy de cada posição.

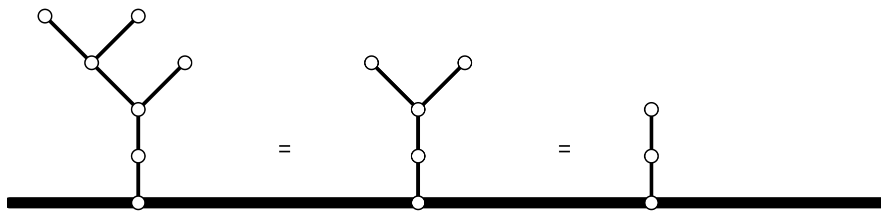
Comecemos com árvores. Intuitivamente, árvores são arbustos com uma raiz. Têm um aspecto característico, já que cada vértice só têm um caminho para atingir o chão:



Para este tipo de "vegetação" dispomos do *princípo da nimdade*: se num vértice convergem n canas, então estas podem ser substituídas pela sua soma nim.

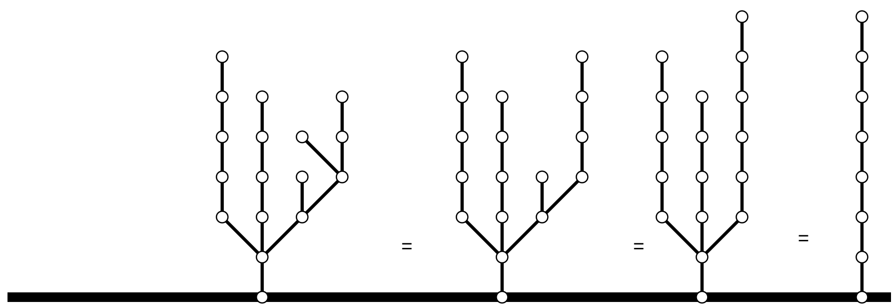
Este princípio permite-nos trabalhar dos segmentos terminais até à raiz, de forma sucessiva, simplificando o arbusto, e culminando na obtenção de uma cana só.

Vejamos um exemplo:



porque $1 \oplus 1 = 0$.

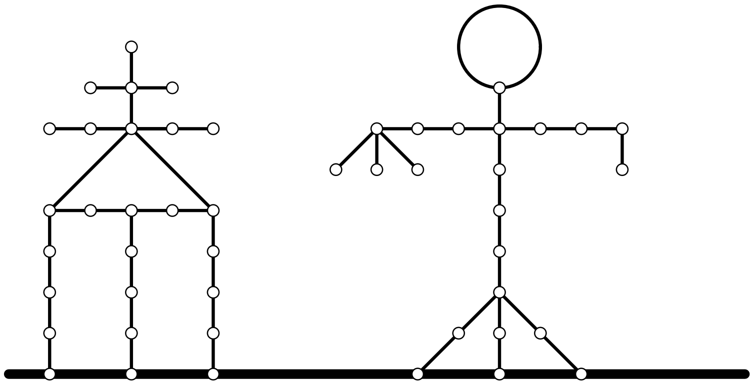
Determinemos ainda o valor Grundy de outra árvore:



porque $1 \oplus 2 = 3$, $1 \oplus 4 = 5$ e $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$.

Para abordar os casos mais gerais vamos permitir que os arbustos tenham mais do que uma raiz, que tenham caminhos fechados (ciclos), segmentos curvos a ligar um vértice a si mesmo (lacetes). Os lacetes comportam-se como os segmentos vulgares, no que diz respeito ao jogo, podendo, portanto, ser substituídos por segmentos sempre que se queira.

Vamos permitir agora imagens com as ilustradas abaixo.

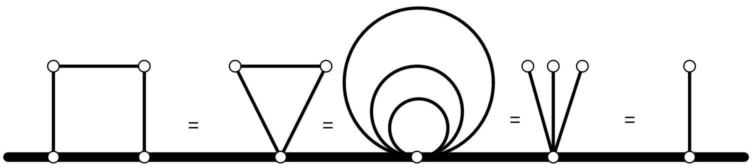


Note-se também que o chão pode ser interpretado como um vértice único, especial.

Fundir dois vértices adjacentes consiste em fazê-los coincidir, transformando o segmento que os une num lacete.

Para analizar arbustos complicados fazemos apelo ao *princípio da fusão*, que diz que cada ciclo pode ser fundido num vértice sem alterar o valor Grundy do arbusto.

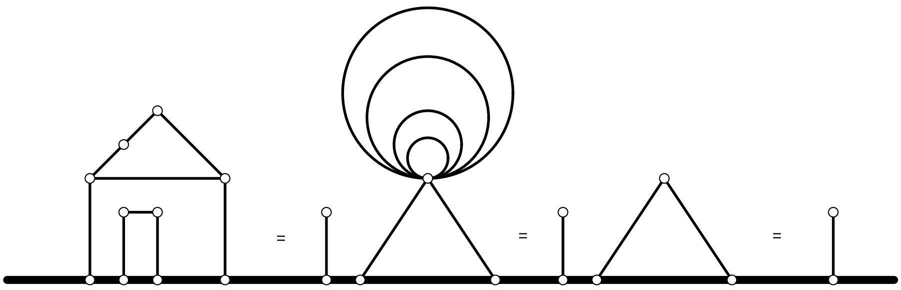
Vejamos um exemplo, onde já se faz uso do facto de o chão se poder identificar com um só vértice:



O primeiro passo consistiu em identificar o chão com um só vértice, o segundo em fundir os vértices, o terceiro em substituir os lacetes por arestas vulgares; o último passo é uma aplicação do princípio da nimdade.

Aplicações sucessivas dos princípios da nimdade e da fusão permitem determinar o valor de Grundy de muitos arbustos complexos.

Um último exemplo:



Pelo exemplo anterior, a porta é equivalente a uma aresta. O telhado desaparece, ao ser aplicada uma fusão aos seus vértices seguida de uma soma nim das arestas ($1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$). Dois segmentos, que somam zero, e a aresta isolada é tudo que sobra. Assim, toda a figura tem um valor Grundy de 1. Trata-se, portanto, de uma posição N.

Chapter 3

Nim Games

Combinatorial Impartial Games

This chapter focuses on a type of game that has a very rich mathematical history. We present the main results, which are useful to play the games. We provide the interested reader with the bibliographical references ([CON, BCG]).

These games, also known as Nim games, are characterized by the following conditions:

1. There are two players.
2. The set of possible positions of the game is well understood.
3. In each position, the moves available are the same for both players (there are no White and Black, or any other way of telling the players apart).
4. Players alternate.
5. The game ends when one of the players is faced with a position where no legal move is possible.
6. Whoever plays last wins. This means that the loser is the first person unable to play.
7. The game takes a finite number of turns, independent of the way the play goes.

Let us start with an example. Consider a pile of 17 beans. Two players alternate taking beans from the pile. The rules say that, in each move, a player can choose to take one, two, or three beans from the pile. Whoever takes the last bean wins.

To understand completely this game, we must do some retrograde analysis, starting from the final (empty) position. If there are one, two, or three beans, the player to move wins taking them all. If there are four, the situation changes with the player to move able to take one (leaving three), two (leaving two), or three beans (leaving one). In any case, he will lose because, as we just saw, the player to move wins when facing a pile with one, two, or three beans. The player that leaves four beans will win the game. In a similar way, we can see that it is a good idea to leave eight, twelve, or sixteen beans for your opponent.

These positions that give, under perfect play, the victory for the player who leaves them, are called *P-positions*. The remaining positions, which are winning positions for the player to move, are called *N-positions*.[1] The set of all P-positions is represented by $\mathcal{P}$ and the set of all the N-positions by $\mathcal{N}$.

[1] The letters P and N are the initials of *Previous* and *Next*.

In our example, the P-positions are $0, 4, 8, 12, 16$. We then have

$$\mathcal{P} = \{0, 4, 8, 12, 16\}, \quad \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17\}.$$

If, instead of 17, we had a larger number of beans, it was easy to see that the P-positions would correspond to multiples of 4.

Given a combinatorial impartial game, we can always start working from the final positions and figure out which positions are in $\mathcal{P}$ and which are in $\mathcal{N}$. However, sometimes this work gets very complex. The basic algorithm as the follows:

1. All terminal positions are P-positions.
2. All positions from which a player can move to a P-position are N-positions.
3. All positions from which one can only get to N-positions are P-positions.
4. If step 3 introduces no new positions, the algorithm halts; otherwise, go to step 2.

Another way of referring to this partition of the positions of a game is the following:
Characterizations of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{N}$. The P- and N-positions are defined recursively by the conditions:
i) All the terminal positions are P-positions.
ii) From any N-position, there is (at least) one move taking to a P-position.
iii) From any P-position, all moves lead to N-positions.

Subtraction Games

From any set of integers $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$ (beans, for instance) we can define a game similar to the one we analyzed previously, changing the number of beans each player can take in a move. The game we treated corresponds to a set of legal subtractions given by $\{1, 2, 3\}$ and can be represented by $S_{\{1,2,3\}}$. (As it began with 17 beans, we could be more precise and write $S_{\{1,2,3\}}(17)$).

We can analyze more general subtraction games. Consider, for instance, the game $S_{\{2,3\}}$.

The terminal positions are $0, 1$, which are P-positions. The positions from which we get to a terminal position are $2, 3, 4$; they must be labelled N. From 5 or 6, a player can only get to $2, 3, 4$. Therefore, 5 and 6 are P-positions. The pattern is clear.

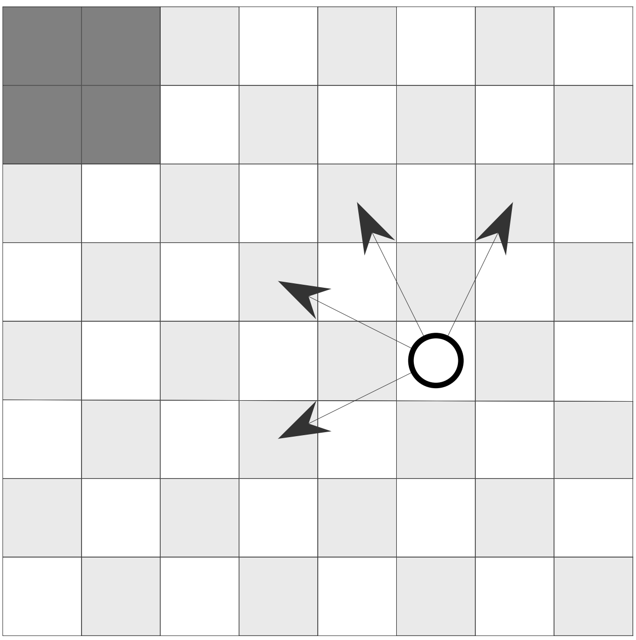
We have

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
P	P	N	N	N	P	P	N	N	N	...

Other games can be analyzed this way, even board games. The following pages contain some games of this kind. We invite the reader to identify the P- and N-positions and, consequently, master the games.

White Knight

In this game, a checkered board is used, such as a chessboard. At the beginning, there is a single chess piece on the board, a white knight. Each move consists of moving the knight according to the rules of chess, but restricted to the directions shown below. When it gets to one of the shaded squares, a terminal position is reached; no more moves are possible. The player that moved the knight to one of those squares is the winner.

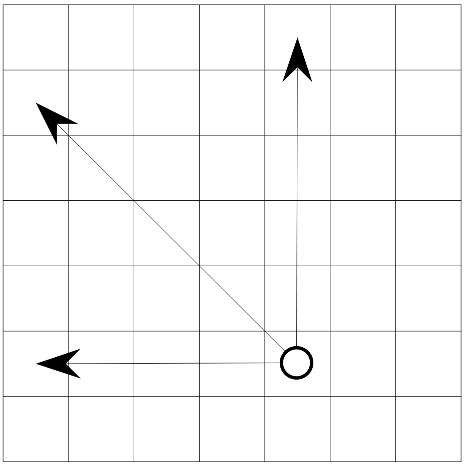


Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Wyt Queen

At the beginning there is a white queen in a rectangular board, such as a chessboard. Each move consists in moving this piece according to the usual chess rules with the restriction that it must move north, west, or northwest. The figure below illustrates the movements. The players play alternately until the queen reaches the top left corner. The player that puts the queen there is the winner.



Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Whithoff

This game starts with two piles of beans. Each move consists in one of the following possibilities:

1. Choose one of the piles and decrease it (take at least one bean; can take the whole pile).
2. Take the same number of beans from both piles.

Whoever takes the last bean wins.

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

JIL

This game, invented by Jorge Nuno Silva, happens in a n-tuple of nonnegative integers. The players alternate according to the following rule: a move consists of choosing a component of the n-tuple, subtracting one unity from it, and adding nonnegative quantities to the higher-order components. (In an n-tuple the order of the components increases from left to right.)

The first player that finds all the components of the n-tuple zeroed, on his turn loses.

Let us look at an example. For $n = 5$ and initial position $(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2})$ we have, for example, this sequence of legal moves:

$$(10, 7, 10^{10}, 0, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2}) \mapsto (10, 6, 10^{10^3}, 99^{99}, 2^{2^2} - 1)\,.$$

Is this game finite, independent of the original setup? The question is, given any initial n-tuple, can we be sure that the game will end after finitely many turns?

Assuming it does end in finite time, what is the winning strategy (to identify $\mathcal{P}$ and $\mathcal{N}$)?

For instance, from the position

$$(22, 222, 2, 3, 2^3, 10)\,,$$

who wins: the first or the second player?

References

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e JIL-Jogo Indefinidamente Longo," *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 43, October 2000: 143–147.

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e Exponenciação Comutativa," *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 44, April 2001: 119–121.

LIM

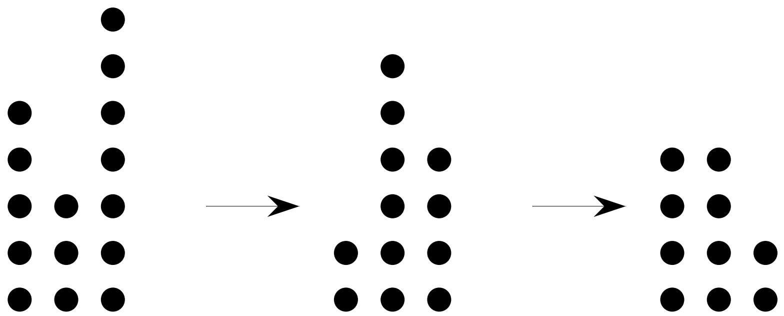
In this game, invented by Jorge Nuno Silva, we use three piles of beans.

Each move consists of choosing two piles, taking the same number of beans from each of them, and adding the same number to the third one. The player who, on his turn, finds two empty piles, loses.

Here are some examples of legal moves:

$$(5,3,7) \mapsto (2,6,4) \mapsto (4,4,2)\,.$$

Or, in a diagram:



References

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e LIM," *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 46, April 2002: 119–124.

Silva, J. N., "Notas sobre o Problema anterior e Corpo Estranho," *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 47, October 2002: 97–100.

Nim

This classic game was the first combinatorial game to deserve the attention of a professional mathematician, Charles Bouton, who solved it and presented its theory in a 1902 paper ([BOU]).

At the beginning there are some piles of beans. Each player, on his turn, chooses a pile and takes some beans from it (at least one, he can take the whole pile).

Whoever takes the last bean is the winner.

If there is only one pile of beans, the analysis is very easy. For any nonempty pile, the player to move should take all the beans and win. If the pile is empty, the previous player has won already.

One-pile Nim is too easy:

Number of beans	0	1	2	3	4	...
Type	P	N	N	N	N	...

Two-pile Nim isn't too difficult either. If the piles have different numbers of beans, the player to move should make them equal, and, from then on, imitate his adversary's move. For example, if the two piles have 4 and 6 beans (we can represent them by the ordered pair $(4,6)$) the good move is for $(4,4)$. Now, what the adversary does to one pile is also done by the player to the other pile, leaving equally sized piles again . This kind of strategy, replicating the adversary's moves in another component of the game, is known as *Tweedledum and Tweedledee.*

The characterization of the positions in two-pile Nim:

$$(n,m) \quad \text{is} \quad \begin{cases} \text{P} & \text{if} \quad n=m \\ \text{N} & \text{if} \quad n \neq m \end{cases}$$

Three-pile Nim is not as easy as the previous cases. We need some new concepts to fully analyze it.

We obtain the *Nim-sum* of two nonnegative integers x, y, representing them in base 2 and adding their coefficients modulo 2 (that is, $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=0$). We use the notation $x \oplus y$.

Consider, for example, $5 \oplus 7$. We have $5 = 2^2+1$, $7 = 2^2+2+1$. Therefore, in base 2,

$$5 = (101)_2 \qquad 7 = (111)_2$$

Adding the coefficients modulo 2, we obtain

$$\begin{array}{r@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c} & 1 & 0 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Therefore, as $(010)_2 = 2$, we got $5 \oplus 7 = 2$.

Nim-sum has nice properties:

1. Associativity: $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$;
2. Commutativity: $x \oplus y = y \oplus x$;
3. 0 is neutral: $0 \oplus x = x$;
4. Each number is its own additive inverse: $x \oplus x = 0$;
5. The cancellation law holds: If $x \oplus y = z \oplus y$, then $x = z$.

This operation is important because Bouton characterized the positions in the general Nim game in terms of the Nim-sum of the sizes of the piles of beans. If we represent a position with n piles of beans with $x_1, \ldots, x_n$ beans by $(x_1, \ldots, x_n)$, we can state the main result as follows.

Bouton's Theorem: The position $(x_1, \ldots, x_n)$ is a P-position if and only if $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n = 0$.

Note that this theorem holds also for the one- and two-pile Nim, which were analyzed before.

Let us consider an example.

Consider the Nim game with four piles $(3, 5, 7, 9)$. We must calculate $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9$. As $3 = (11)_2$, $5 = (101)_2$, $7 = (111)_2$, $9 = (1001)_2$, we have

$$\begin{array}{r@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

thus, $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 9 = 8$. The given position is an N-position. The (unique) winning move consists of taking 8 beans from the 9 pile.

Check $3 \oplus 5 \oplus 7 \oplus 1 = 0$:

$$\begin{array}{r@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c@{\quad}c} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 & 1 \\ + & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

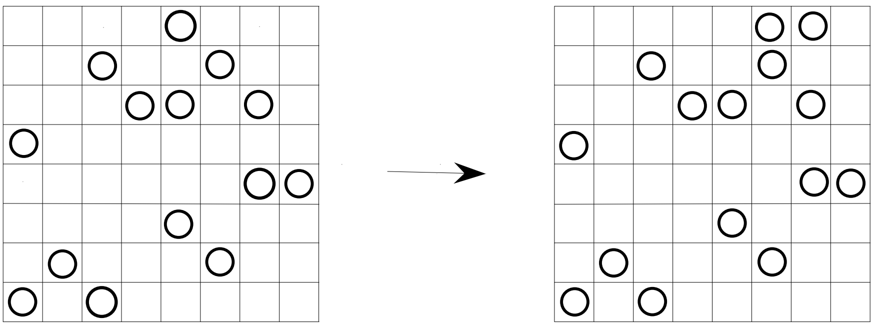
We just presented the theory of Nim with some detail because it is important for lots of other games. If you can play Nim well, then you can play hundreds of other games well. Some of the following are just versions of Nim. So this theory applies to them. However, sometimes the identification of a given game with a Nim variant is not clear.

Plainim

We use a chessboard. Some pieces, all alike, are randomly distributed by the squares. Each square can hold at most one piece. A move consists of choosing one occupied square taking its piece out of the board. In the same turn, the player can change the status of each of the squares in the same row, to the left of the previously chosen (put pieces, take pieces or neither).

Whoever takes the last piece wins.

We show an example of a legal move (in the last row, taking a piece and putting two).



Notes

Identifying each empty square with 0 and each occupied one with 1, we obtain the binary representation of a nonnegative integer in each row, .

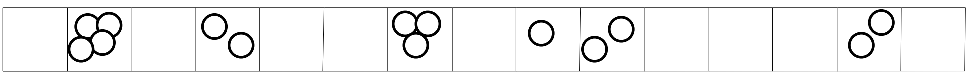
The analogy with Nim is now clear.

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Nimble

This game occurs in a strip $1 \times n$. At the beginning, there are some coins randomly distributed by the cells. Each cell can contain any number of coins. A move consists of choosing a coin and moving it to any cell to the left of the original position. Jumping over coins is permitted. The game ends when all coins are in the leftmost cell. The last player to move is the winner.



Notes

For each coin consider its distance to the leftmost cell of the strip. We obtain a set of numbers this way . Each move consists in decreasing one of them.

If we take a Nim game where the sizes of the piles are defined by these numbers, we get a similar game. How is it similar to Nimble?

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Turning Turtles

The game was created by the Berkeley mathematician H. Lenstra. A row of n coins is placed on a table. Some show their **F**aces and the others show the **V**ersos. For instance, with $n = 13$, we could have

$$V \quad F \quad V \quad V \quad F \quad V \quad V \quad V \quad F \quad F \quad V \quad F \quad V$$

Each move consists in choosing a coin that shows *F*, turning it, and, optionally, changing the state of some coins to the left of the one chosen before. Whoever turns the last *F* to *V* wins.

An equivalent implementation uses checker pieces (white = *F*, black = V). Here a move consists of changing a white for a black and switching the color of some piece to the left of the one previously chosen. The game ends when there are only black pieces and the last player to move wins.

The position corresponding to the situation above:

●	○	●	●	○	●	●	●	○	○	●	○	●

Notes

It is natural to identify, for each F, a Nim pile with the number of beans given by the distance of F to the leftmost coin. However, this does not work, since a move in Nim consists only in decreasing one of the present numbers.

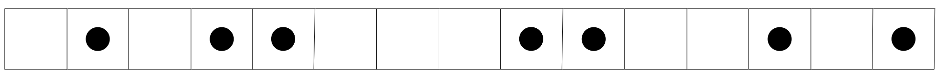
Maybe we should recall that in that strange "sum" we introduced before (see p. 139), addition sometimes looks like subtraction ($x \oplus x = 0$).

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Silver Dollar

This game occurs in a strip $1 \times n$. At the beginning, there are some coins randomly distributed in the cells, at most one in each cell. Each move consists of choosing a coin and moving it any number of cells to the left, but it cannot jump over occupied cells. The game ends when the coins are all jammed on the left part of the strip. The last player to move wins.



Notes

Identifying a coin with the distance to the leftmost cell does not work because jumping over other coins is not allowed.

Hint: Identify, alternately, from right to left, each space between consecutive coins with a Nim pile of a matching number of beans. We obtain a Nim game (in our example with piles of 1, 0, 0, 1 beans). Each move decreases one of these numbers. It can increase others, but that is not strategically important.

Reference

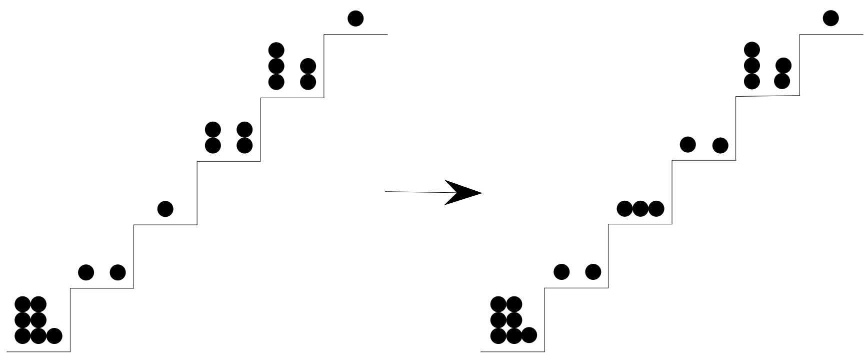
E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Stairs

There are n steps in these stairs. Each step contains a nonnegative number of pieces. Each move consists in passing some of the pieces from one step to the one immediately below. The game ends when all the pieces are in the bottom step, the last player being the winner.

Another implementation consists of using a row of piles of pieces, each move consisting of taking some pieces from one pile to its left neighbor.

An n-tuple of nonnegative integers can represent the situation. Accordingly, the move $(7, 2, 1, 4, 5, 1) \mapsto (7, 2, 3, 2, 5, 1)$ corresponds to the original move below.



Notes

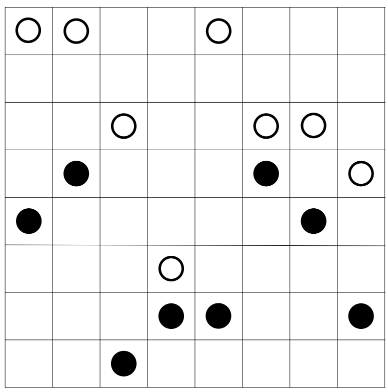
Label the steps, from left to right, with the positive integers. Consider the Nim game associated with the even numbered steps. Each move on those steps corresponds to take some beans from one of the piles. Some moves can increase these numbers, but they are not strategically important. (Why?)

Northcott

This game uses a rectangular board $n \times m$. There are two players: White and Black. In each column, there is one white piece and one black piece. Each move consists in moving a friend piece forwards or backwards any number of squares as long as it does not leave its column or jump over any other piece.

A player that cannot move, because all his pieces are trapped against the border, loses.

A possible initial position:



Notes

Consider the eight-pile Nim game with one pile of beans for each board column, the size of each pile being given by the number of squares between the two stones in the corresponding column.

Northcott looks like this game of Nim. However, as there are some moves that increase the number of squares between two stones of the same column, Northcott has some extra possibilities. It turns out that the extra moves are finite and not relevant for the winning strategy. (Why?)

The existence of two colors does not violate the principle of p. 131, because the only relevant parameter is the number of free squares between pieces.

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

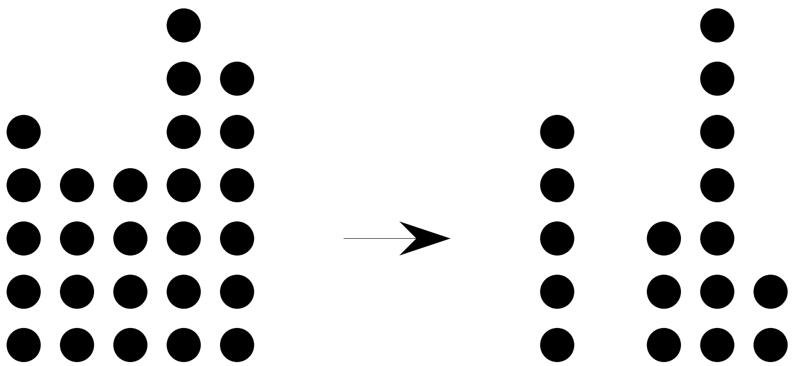
Nim_k

This game, created by H. Moore, uses n piles of beans. Each move consists of taking beans from at most k piles with $k < n$. At least one bean from one pile must be taken, and the quantities taken from the piles can be different. Whoever takes the last bean wins.

For $k = 1$, we have the usual Nim game.

One example of a legal move, where $n = 5, k = 3$, is:

$$(5,4,4,7,6) \mapsto (5,0,3,7,2)\,.$$



Notes

Binary representation and modulo 2 addition played a role in the understanding of Nim. Maybe an adaptation of that approach works here.

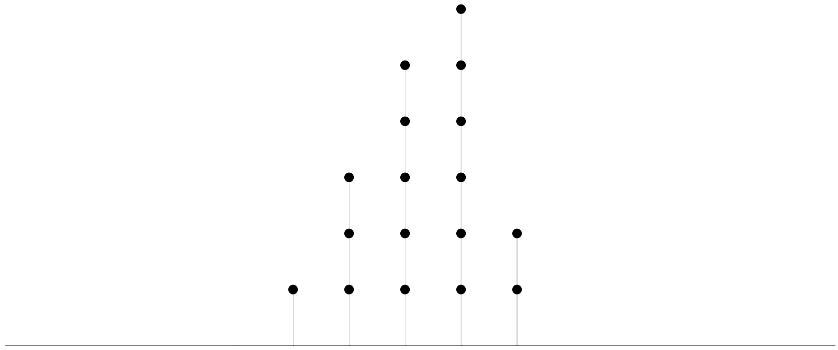
Reference

Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman and Company, 1986.

Blocking Nim

This game is played with piles of beans, just like Nim. The only difference is that before each move, the adversary states, for each column, a quantity of beans that cannot be subtracted from that column.

For instance, the position corresponding to piles of $1, 3, 5, 6, 2$ beans can be represented by



Notes

The Nim sum of the sizes of the piles is the main parameter to decide on the optimal restrictions to impose on the adversary.

Reference

George Washington University Problems Group, "Blocking Nim," *College Mathematics Journal*, vol. 35, no. 5, November 2002: 414–415.

Games on Graphs

In this section, we will learn how to represent some games using graphs. That will make possible to get a classification of the positions which is better than the P-N characterization.

We begin by stating some definitions.

A digraph, or directed graph, is a system containing one set of *vertices* (the positions of the game) X and one map F that assigns a subset of X to each element of X, x, $(x \mapsto F(x) \subset X)$. We represent it by (X, F). $F(x)$ is the subset of positions for which a player can move from x. If $F(x)$ is empty, we say that x is *terminal*.

A game in a graph is defined by picking a vertex to be the initial position, x_0, and stating the rule that the players alternate choosing, for each vertex x, another in $F(x)$. When a player, in his turn, has to move from y with $F(y)$ empty, he loses.

We consider only finite games.

The games on graphs can be analyzed with a technique similar to the one used to get the characterization in P- and N-positions in the impartial games, starting at the terminal vertices.

However, we introduce a function that gives us some extra information, and will be important in what follows.

Recall that, given a set of nonnegative integers A, we represent by $\operatorname{mex} A$ the smallest integer not in A. For example, $\operatorname{mex}\{0, 1, 3, 44\} = 2$.

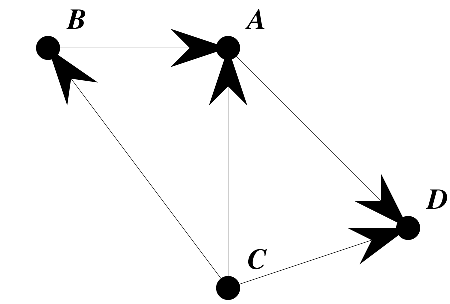
Grundy function of a graph (X, F) is the function $g : X \to \mathbb{N}_0$ defined by[2]

$$g(x) = \operatorname{mex}\{g(y) \,:\, y \in F(x)\}\,.$$

Note that we find the values of the Grundy function recursively. For each x, the value of $g(x)$ depends on the values that $g(y)$ assumes when y runs through $F(x)$. We should then start with the terminal vertices, x, for which $F(x)$ is empty, giving, in this case, $g(x) = 0$.

Let us work through an easy example.

[2]We represent the set of nonnegative integers by $\mathbb{N}_0$.



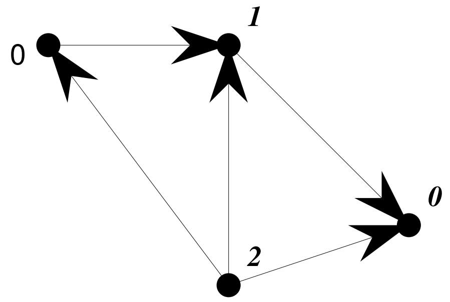
D is a terminal vertex, therefore $g(D) = 0$. No other vertex is terminal. As $F(A) = \{D\}$, and we know $g(D)$, we can calculate $g(A)$. We have

$$g(A) = \text{mex}\,\{g(D)\} = \text{mex}\,\{0\} = 1\,.$$

We have now $g(B) = \text{mex}\,\{g(A)\} = \text{mex}\,\{1\} = 0$. Finally,

$$g(C) = \text{mex}\,\{g(A), g(B), g(D)\} = \text{mex}\,\{0, 1\} = 2\,.$$

Labelling each vertex with its Grundy value:



Note that, in a Nim game, the Grundy function of a pile coincides with its size.

Consider again the subtraction game $S_{\{2,3\}}$. We do not need to draw the graph to figure out the Grundy values in the positions of the game. The terminal vertices correspond to $0, 1$. Therefore, $g(0) = g(1) = 0$.

We have $F(2) = \{0\}$, and thus, $g(2) = \text{mex}\,\{0\} = 1$. In a similar way, we conclude that $g(3) = 1$.

As $F(4) = \{1, 2\}$, we get $g(4) = \text{mex}\{g(1), g(2)\} = \text{mex}\{0, 1\} = 2$. As $F(5) = \{2, 3\}$, we get $g(5) = \text{mex}\{g(2), g(3)\} = \text{mex}\{1\} = 0$. The pattern becomes clear:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$g(x)$	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	...

Comparing with the previous anlysis of the game, we see that the P-positions are exactly those for which the Grundy function vanishes. This is general, as we can easily deduce from the very definition of Grundy function and the characterization of $\mathcal{P}$ and $\mathcal{N}$:

1. $g(x) = 0$ if x is terminal;
2. If $g(x) = 0$ and $y \in F(x)$, then $g(y) \neq 0$;
3. If $g(x) \neq 0$, then, for some $z \in F(x)$, we have $g(z) = 0$.

Sums of Impartial Games

One of the possible ways of playing several games at the same time is the following. If we have n games, a player, in his turn, chooses one of them and plays a legal move in it, leaving the others untouched. The players alternate until terminal positions are attained in all the games. Whoever makes the last move wins. This new game is called the *sum* of the original games.

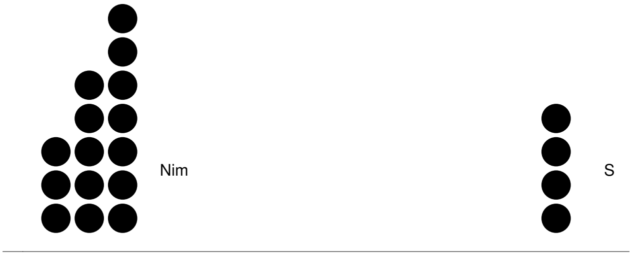
This is one way of building new games from old ones. Often, even if the summands are easy games, their sum gets very complex, and difficult to analyse. One example: regular Nim is just the sum of several one pile Nim games.

However, there is a result that makes it easy to find the Grundy function of the sum, if we know the Grundy function of the summands. We state it here in the language of graph theory. Consider games $(X_1, F_1), \ldots, (X_n, F_n)$, with corresponding Grundy functions $g_1, \ldots, g_n$, respectively. Each position in the sum of these games can be identified with an n-tuple of positions of the summand games, $(x_1, \ldots, x_n)$, where $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Then, the Grundy function of the sum is

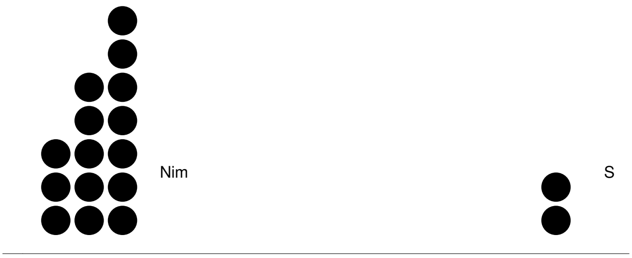
$$g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus \cdots \oplus g_n(x_n)\,.$$

As we know already that the P-positions for the sum are those that have a Grundy value of zero, it is enough to know the Grundy functions of the components and their Nim-sum to establish an optimal strategy for the sum.

For example, we analyze the game we get when we sum a game, J_1, which is three-pile Nim where the sizes are 3, 5, and 7 with J_2, the subtraction game $S_{\{2,3\}}(4)$.



To calculate the value of the Grundy function for the Nim component: $3 \oplus 5 \oplus 7 = 1$. In the game $S_{\{2,3\}}(4)$, a value of 2 corresponds to one pile of 4 beans, as we saw on page 133. Therefore, the value $1 \oplus 2 = 3$ corresponds to the sum of these games. It is an N-position. A good move consists in taking 2 beans from the pile corresponding to the game $S_{\{2,3\}}(4)$ since, in this game, a pile with 2 beans has a Grundy value of 1 and $1 \oplus 1 = 0$. We would get to the position below:

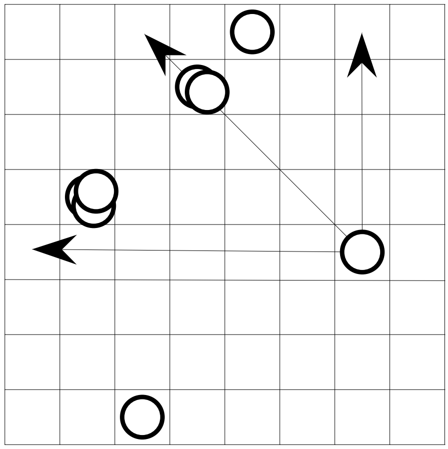


Was this winning move unique?

Using other impartial games, the reader can build lots of new games, using the previous definitions. One such an example is on the next page.

Wyt Queens

This game uses a rectangular board, for instance a chessboard. The pieces are all alike, white queens, which move as in chess, but only in the directions north, west or northwest. Each move consists of moving one of the queens any number of squares. Each square can hold more than one queen. Whoever puts the last queen in the top left corner wins.



Notes

To each queen we can associate a Wyt Queen game (see p. 135). Our game is then the sum of these games.

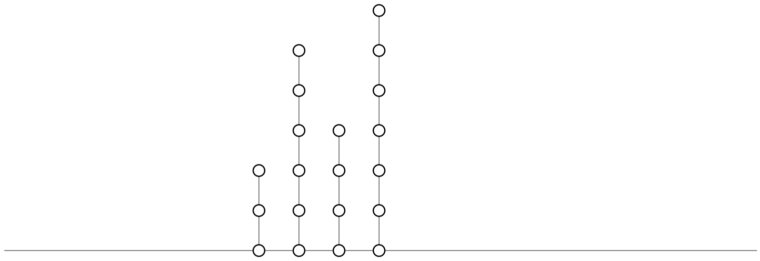
Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.

Green Hackenbush

To play this game we draw a bush, that is, a set of segments connected to the *ground*. Each move consists of erasing one segment, but all the other segments that lose connection to the ground must disappear also. Whoever cuts the last segment wins.

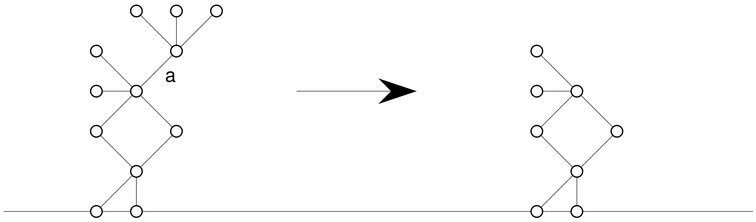
The easiest case corresponds to having several stalks:



This is just a Nim game with piles of sizes 2, 5, 3, and 6.

In general, the situation is more complicated.

An example of a legal move:

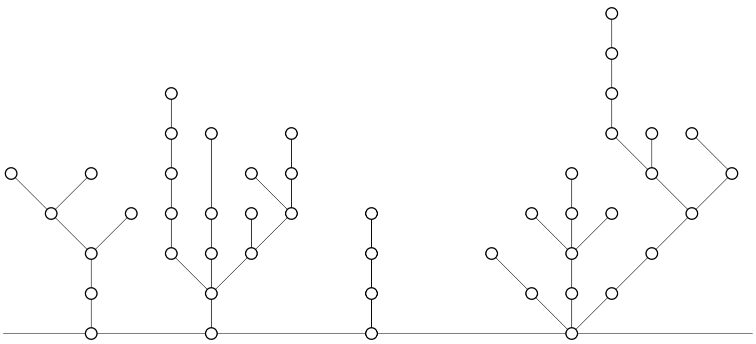


If a player decides to cut the segment **a**, then three other segments go away.

This is, of course, an impartial game. According to our theory, each of its positions corresponds to a Nim pile with a size given by the Grundy function.

It is not true that each particular bush is the sum of smaller bushes, because these are not usually isolated. Therefore, the theory we presented on the sums of games does not apply here. However, we'll present two principles particulary useful for calculating the Grundy values of the bush's positions.

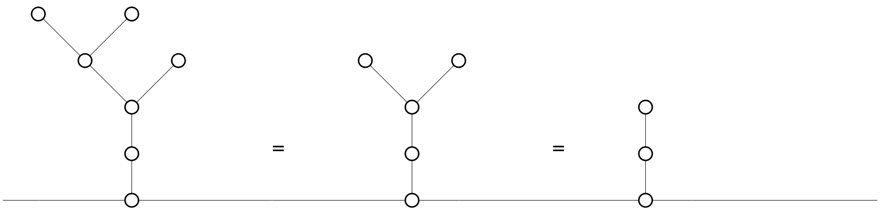
The simplest bushes are *trees*. These are bushes that have one root. They are easy to spot since in a tree there is only one way from each vertex to the ground:



To analyze this kind of "plant" we have the *Colon principle*: if n stalks converge in a vertex, they can be replaced by one, the size of which is given by the Nim sum of the sizes of the original stalks.

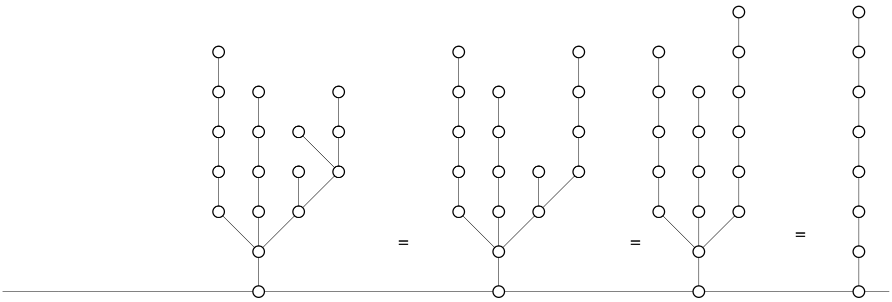
This principle is applied from the most remote segments towards the root, simplifying in each step, ending with just one stalk. Recall that the size of a stalk gives its Grundy number.

An example:



because $1 \oplus 1 = 0$.

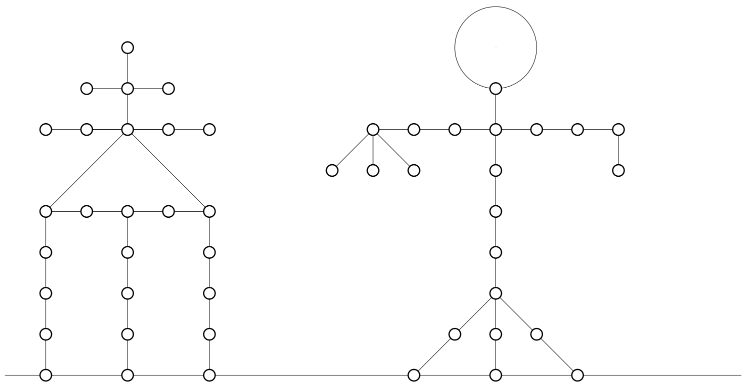
Still another example:



because $1 \oplus 2 = 3$, $1 \oplus 4 = 5$ and $4 \oplus 5 \oplus 6 = 7$.

For the general case, we'll allow more than one root and the existence of cycles (closed paths in the bush) and loops (curved segments, connecting a vertex to itself). As far as playing the game is concerned, loops and regular segments are indistinguishable. We can put a segment in the place of a loop anytime we want.

We'll be dealing with bushes like these:

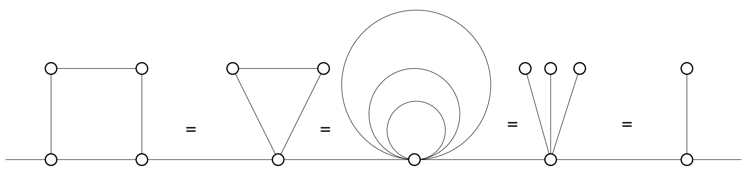


Note also that the ground behaves like a special vertex.

To *fuse* two adjacent vertices means to make them coincide. The segment connecting these vertices is transformed in a loop.

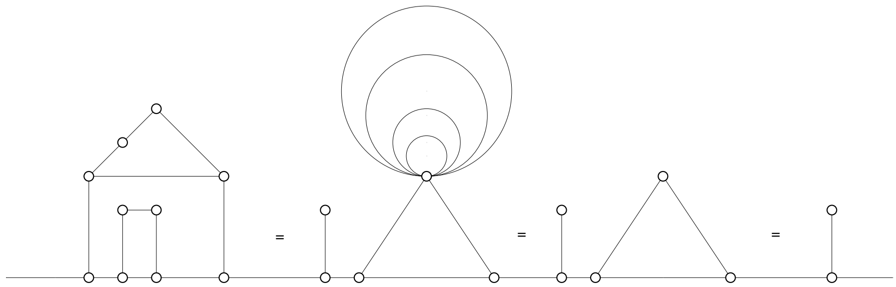
To analyze complex bushes, we use the *fusion principle*, which states that, in any bush, each cycle can be fused into one of its vertices without changing the global Grundy.

An example, where we also use that fact that the ground is just a special vertex:



In the first step, we identified the ground with a vertex. In the second, we applied the fusion principle to some vertices. In the third, we put segments in the place of the loops. The last step is just an application of the Colon principle.

Successive uses of these two principles make possible the determination of the Grundy value of very complicated bushes. A last example is given below:



We knew already that the door is equivalent to a segment. The roof disappears by fusion of its vertices followed by the Nim addition of its segments ($1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0$). Two segments, which add up to zero, and an isolated one are all that is left. Therefore, the whole picture has a Grundy value 1. It is then a N-position.

This is a game fit for pencil-and-paper (or chalk and blackboard). The reader is invited to draw very messy forests and start playing them.

Reference

E. Berlekamp, J. Conway, R. Guy, *Winning Ways*, A. K. Peters.