HFM2021

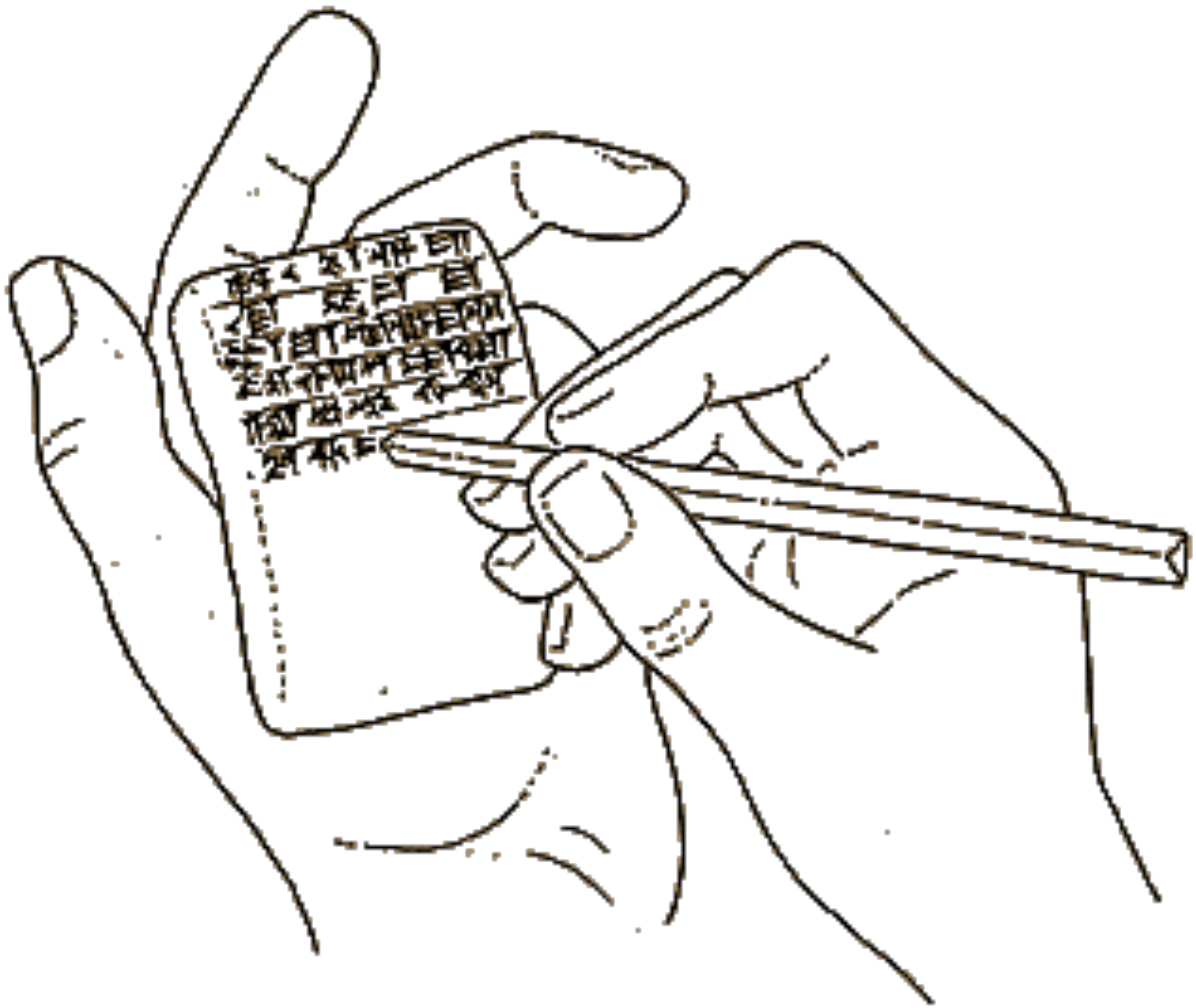
Jorge Nuno Silva & Bruno Jacinto

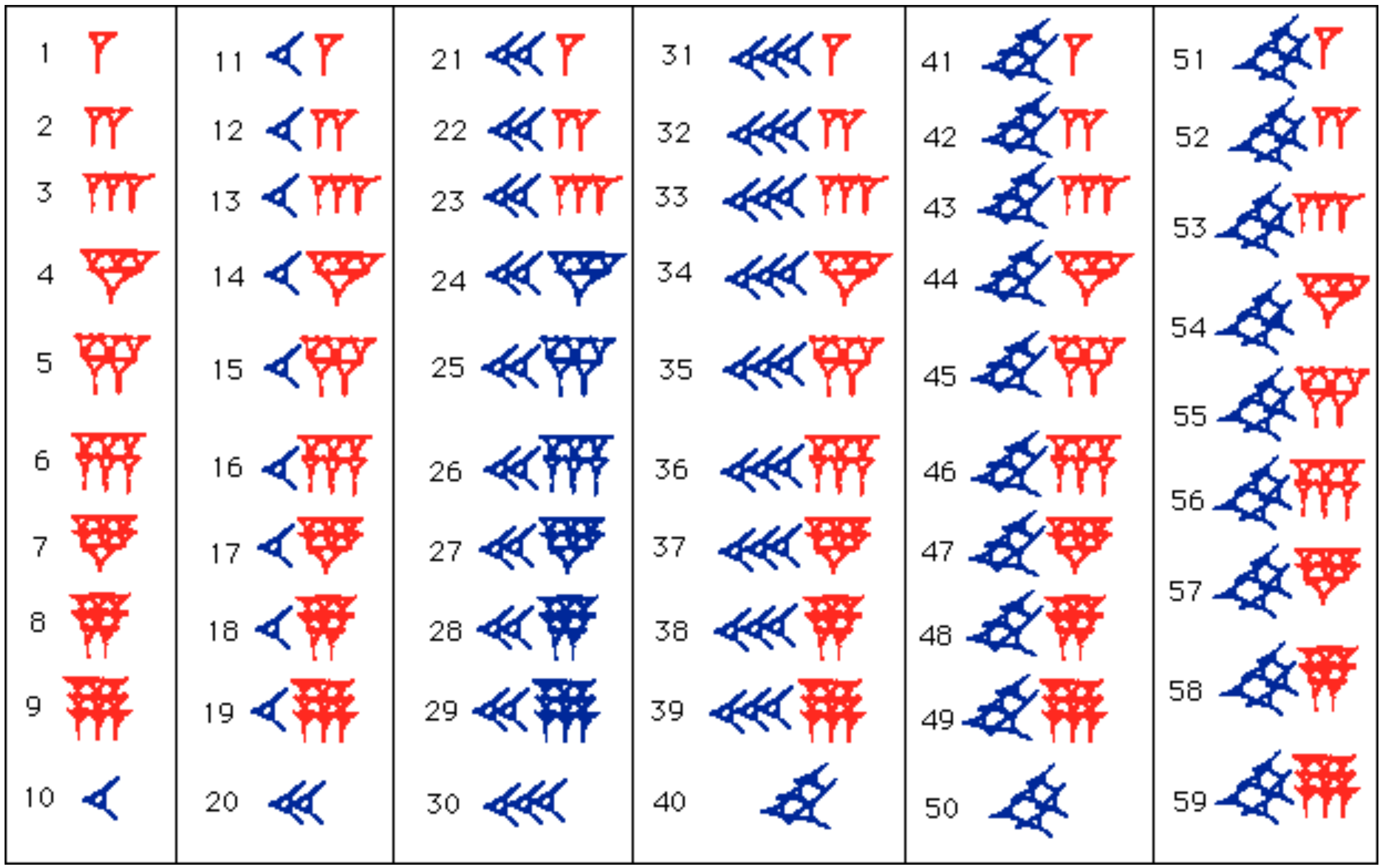
http://jnsilva.ludicum.org/HFM/HFM2021/hfm2021.html

Babilónia

phillipmartin.com


EUROPE
Russia
Black Sea
ASIA
Caspian Sea
Turkey
Tigris
Euphrates
Syria
MESOPOTAMIA
Mediterranean Sea
Iraq
Baghdad
Iran
Egypt
Red Sea
Saudi Arabia
Persian Gulf
Present-day boundary

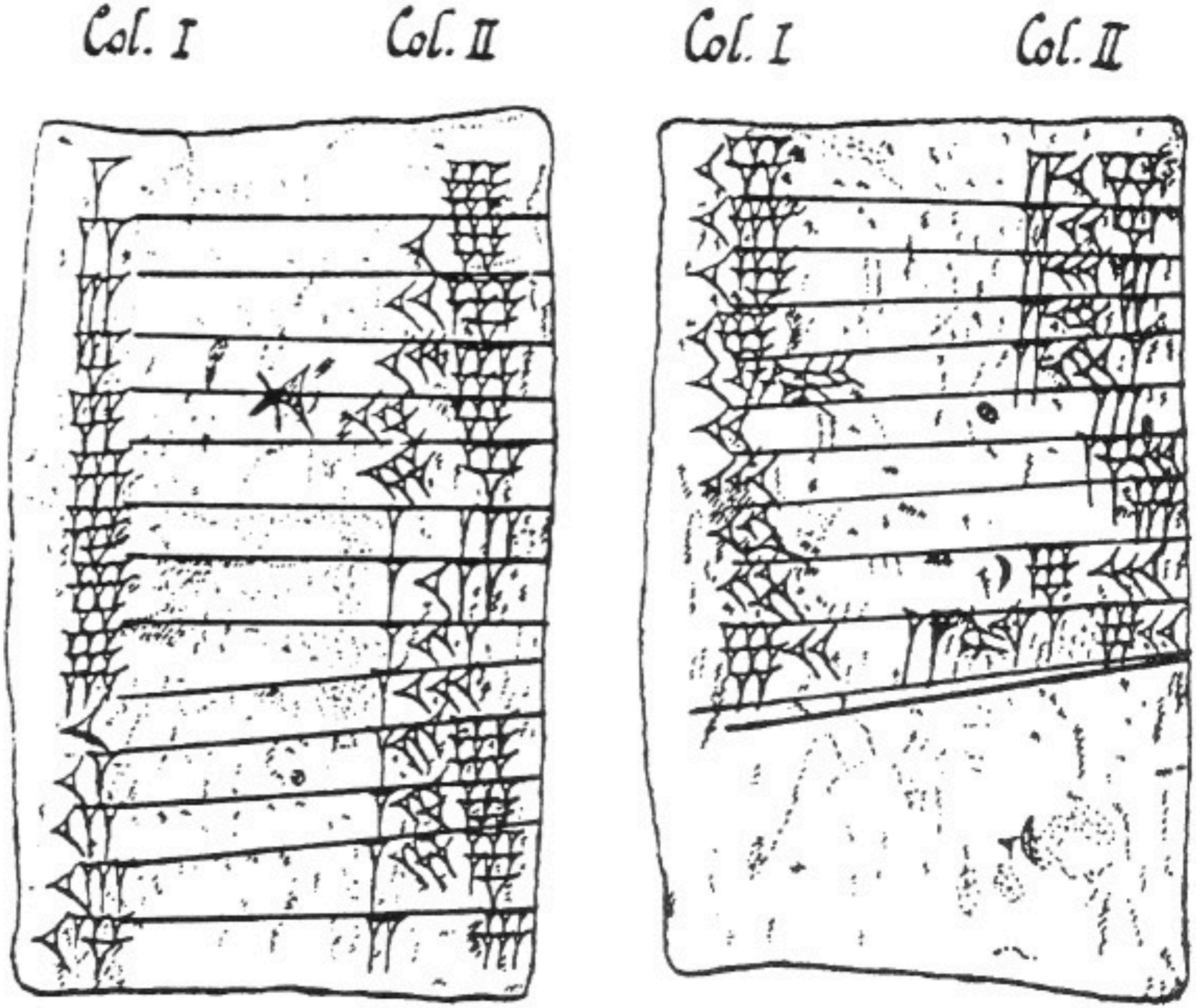




32 e 23

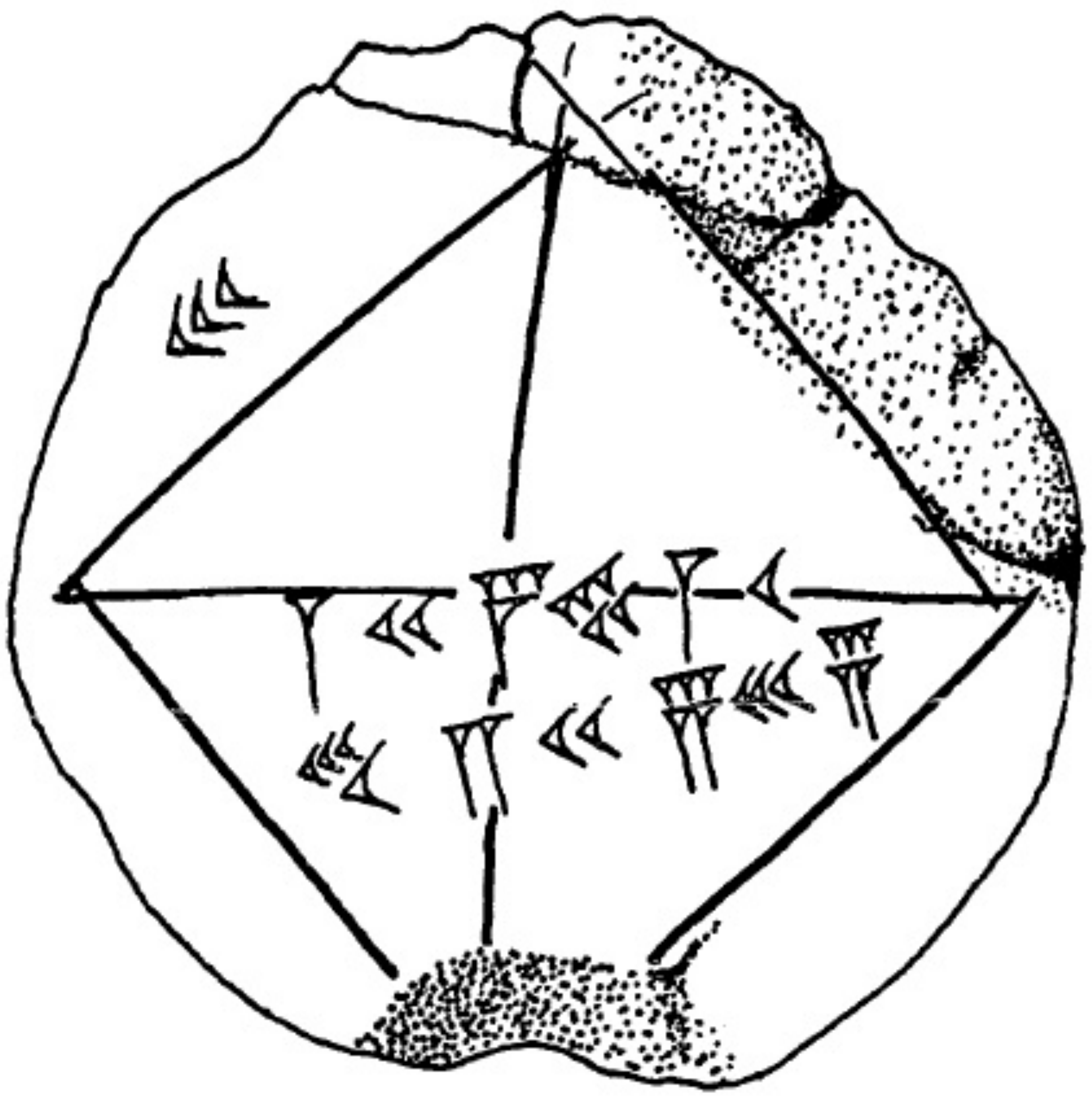
23,45,56

11;30



A Babylonian multiplication table for 9 (Department of Archaeology, University of Pennsylvania).

YBC 7289



30
1;24,51,10
42;25,35

$$\sqrt{30^2 + 30^2} \approx 42.426407... \approx 42;25,35$$

$$\sqrt{2} \approx 1.414214 \approx 1;24,51,10$$

$$\sqrt{6}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y & = & 500 \\ x + y & = & 1800 \end{array}\right.$$

x=900+d   y=900-d

7. Exprima em notação sexagesimal

a) 76
b) 234
c) 1265
d) 87432

8. Calcule

a) 1,23 x 2,9
b) 2,4,23 x 3,34

*

7. Exprima em notação sexagesimal

a) 76
b) 234
c) 1265
d) 87432

8. Calcule

a) 1,23 x 2,9
b) 2,4,23 x 3,34

*

2 *Exprima cada fracção em notação sexagesiamal:*

1. $1/6$.
2. $1/9$.
3. $1/5$.

3 *Converta cada um dos seguintes números do sistema sexagesimal para o decimal:*

1. $1,23,45$.
2. $12;3,45$.
3. $0;12,3,45$.
4. $1,23;45$.

4 *Multiplique* $12,3;45$ *por* 60.

5 *Determine, em base* 60, *os recíprocos de* 18, 32, 54, 64.

6 *Multiplique* 25 *por* $1,04$ *e* 18 *por* $1,21$. *Divida* 50 *por* 18 *e* $1,21$ *por* 32. *Use o algoritmo habitual da multiplicação adaptado para a base* 60.

BM 13901:

Adicionei a superfície e o lado do meu quadrado: 0;45.

$$x^2 + x = c$$

$$x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

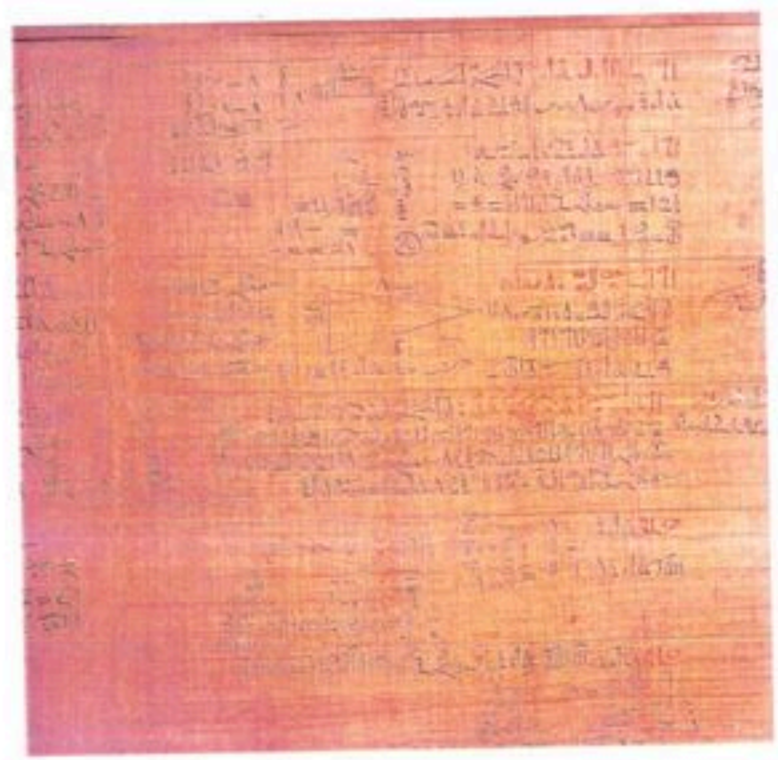
$$x + \frac{1}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}$$

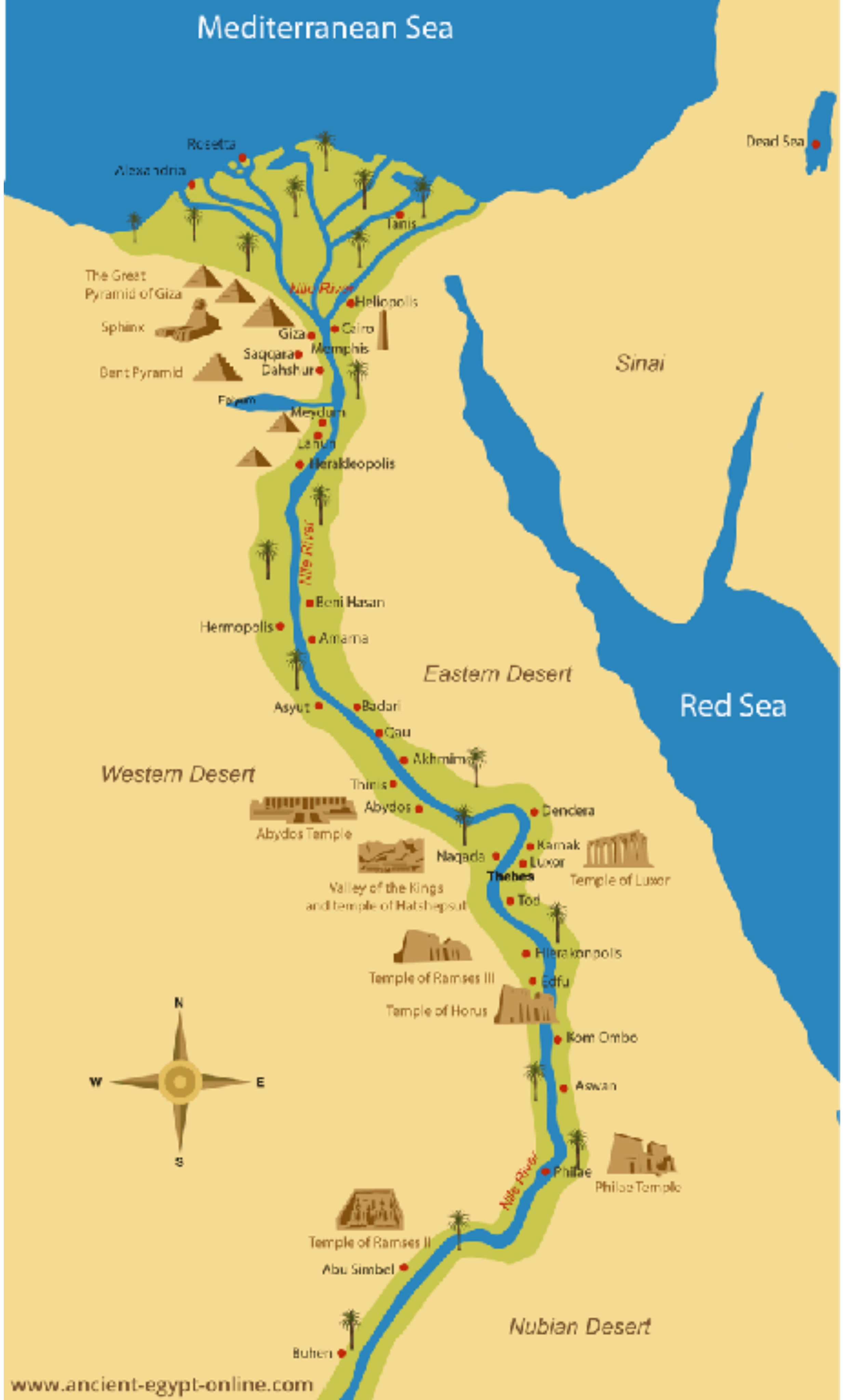
(e4)

PAPIRO DE RHIND
(−1650)

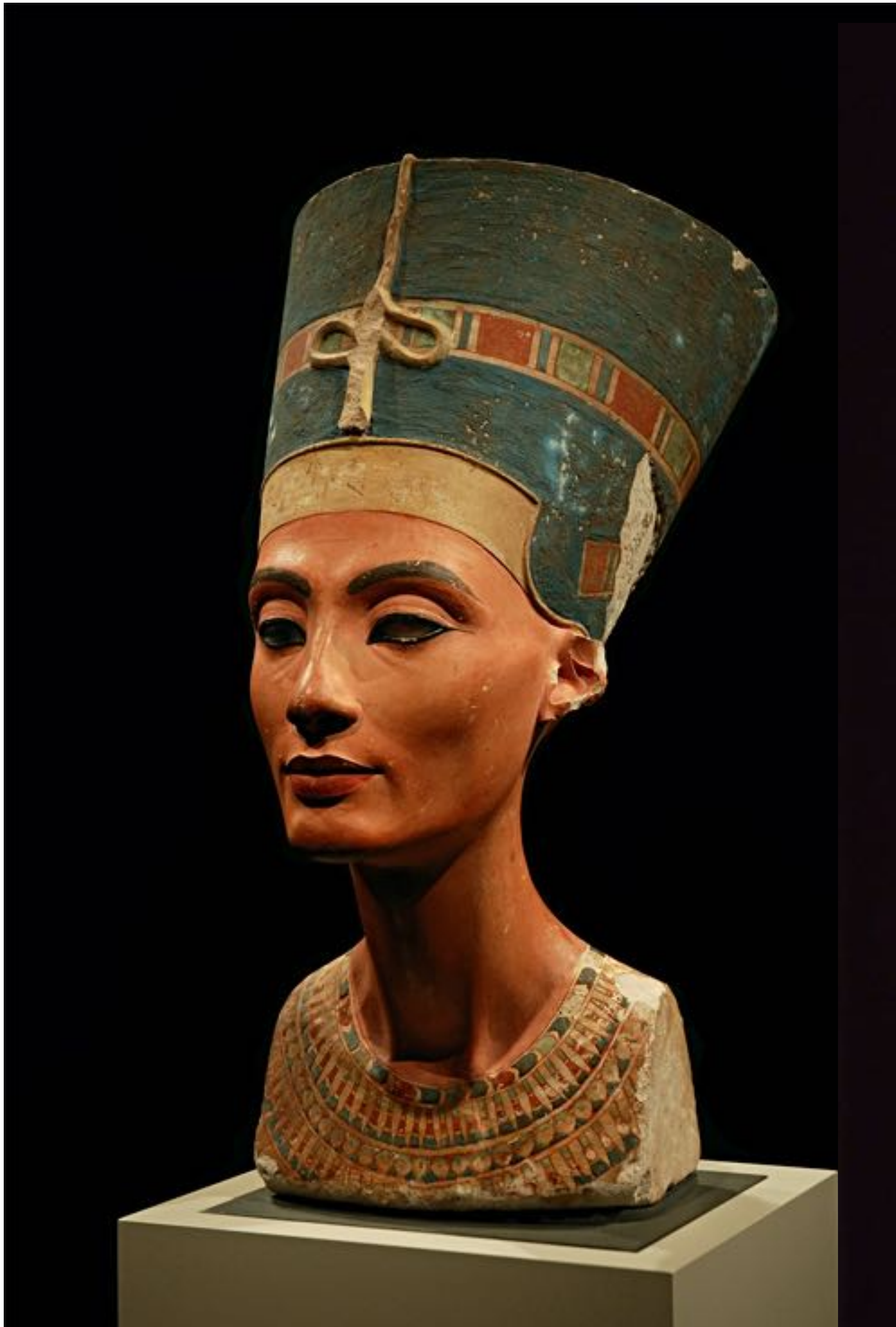
"Estudo completo de tudo que existe, dando conhecimento de tudo, de todas as coisas obscuras"...

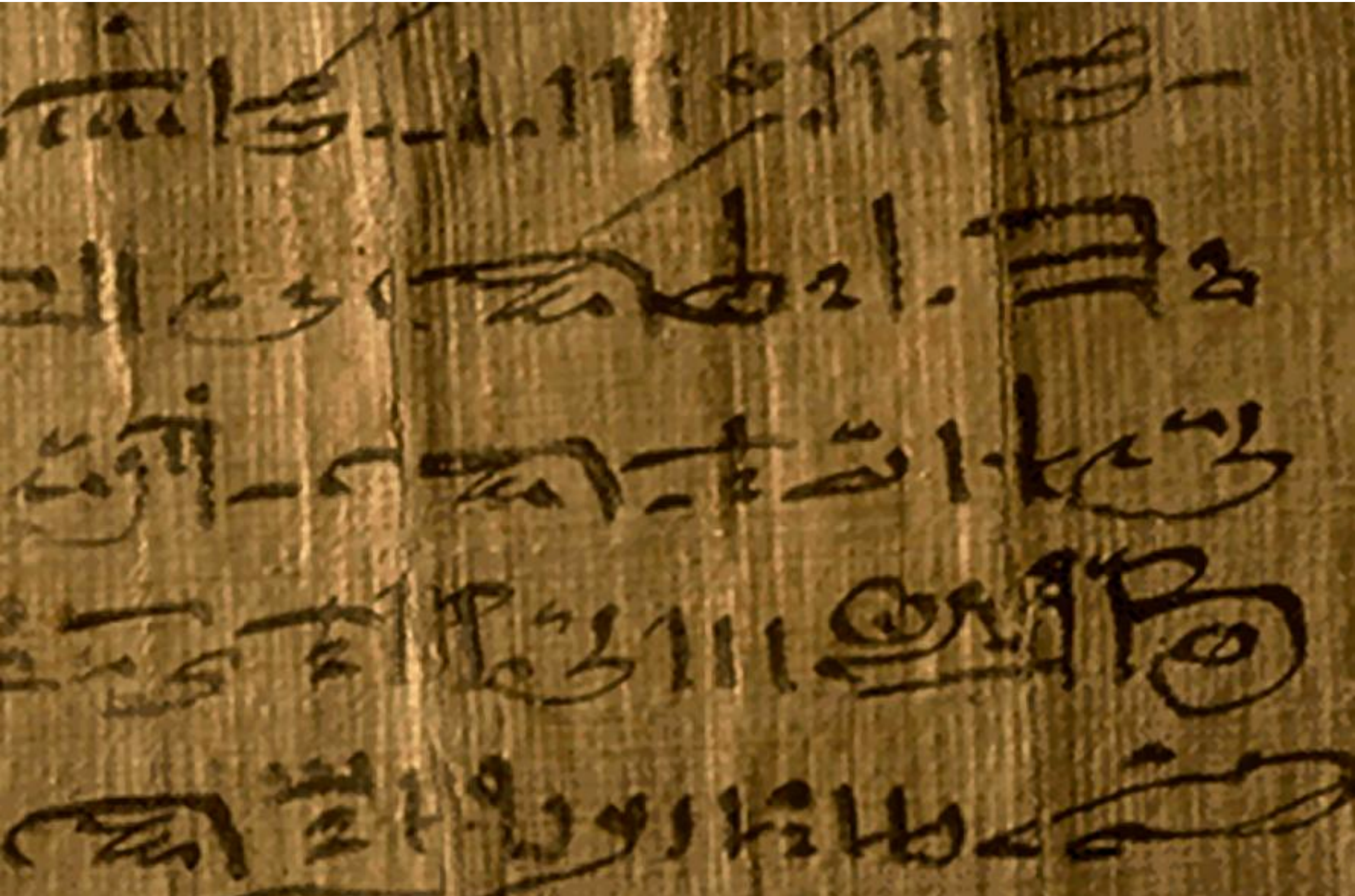


Papiro de Rhind (séc. XVII aC)


Mediterranean Sea
Rosetta
Alexandria
Tanis
Dead Sea
The Great
Pyramid of Giza
Nile River
Heliopolis
Sphinx
Giza
Cairo
Memphis
Saqqara
Dahshur
Bent Pyramid
Sinai
Meydum
Lahun
Herakleopolis
Nile River
Beni Hasan
Hermopolis
Amarna
Eastern Desert
Red Sea
Asyut
Badari
Qau
Akhmim
Western Desert
Thinis
Abydos
Abydos Temple
Dendera
Karnak
Naqada
Luxor
Thebes
Temple of Luxor
Valley of the Kings
and temple of Hatshepsut
Tod
Hierakonpolis
Temple of Ramses III
Edfu
Temple of Horus
Kom Ombo
N
W
E
S
Aswan
Philae
Philae Temple
Nile River
Temple of Ramses II
Abu Simbel
Nubian Desert
Buhen
www.ancient-egypt-online.com

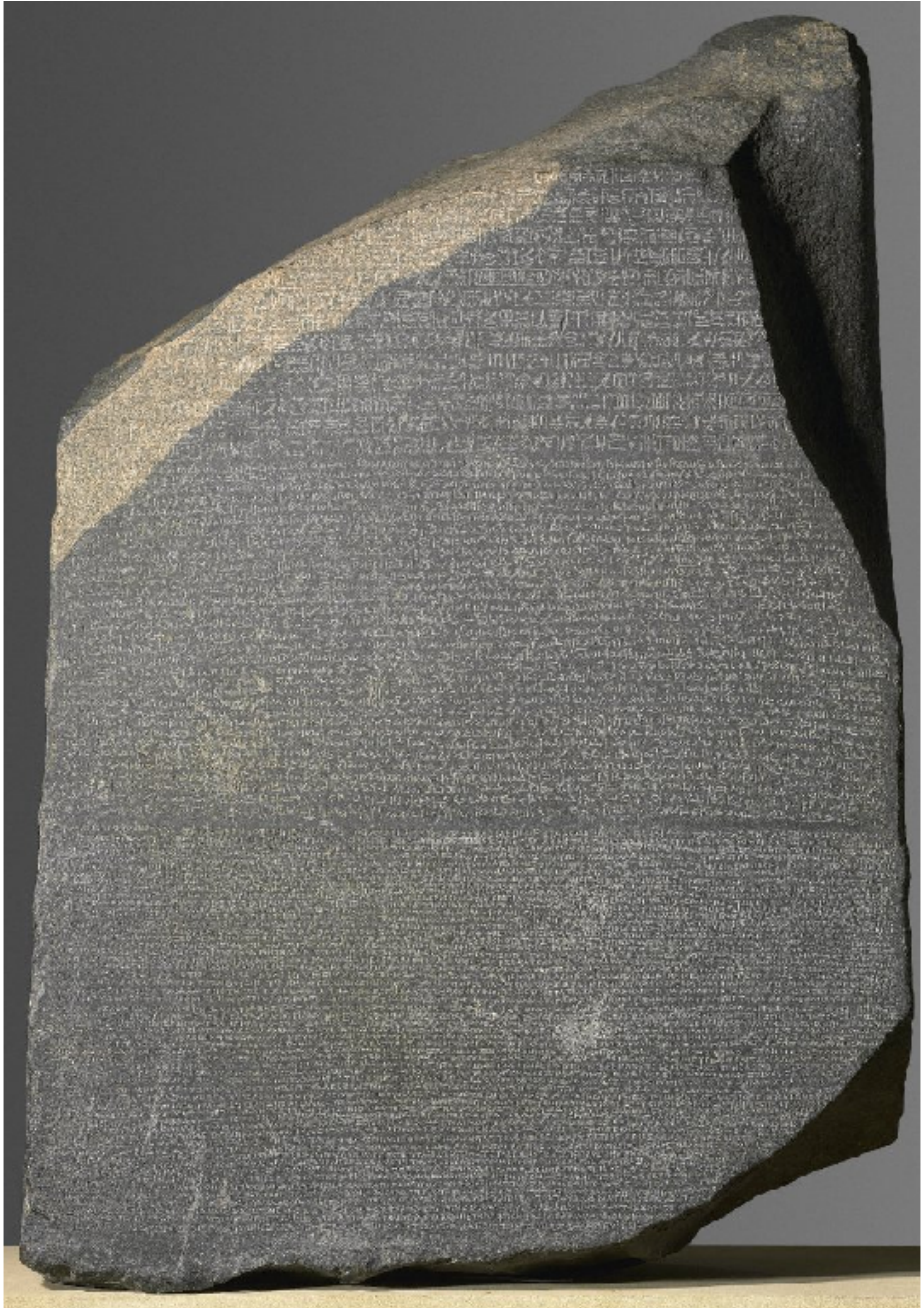
Egyptian History Time-Line
Akhenaten/
Tut/
Mentuhotep
Ramses
Cheops
Ptolemy/
Cleopatra
New
Kingdom
Middle
Kingdom
Libyan
Late/
Persian
Old
Kingdom
2nd
3rd
Intermediate
Period
1st
Greek
Pre-
Dynastic
Roman
Early
Dynastic
11
18
Dynasty 1 3 9-11 15-17 21 25 31
Date 3000 2000 1000 BC/AD



Jean-François Champollion
(1790 – 1832)

hierático, hieroglífico, demótico



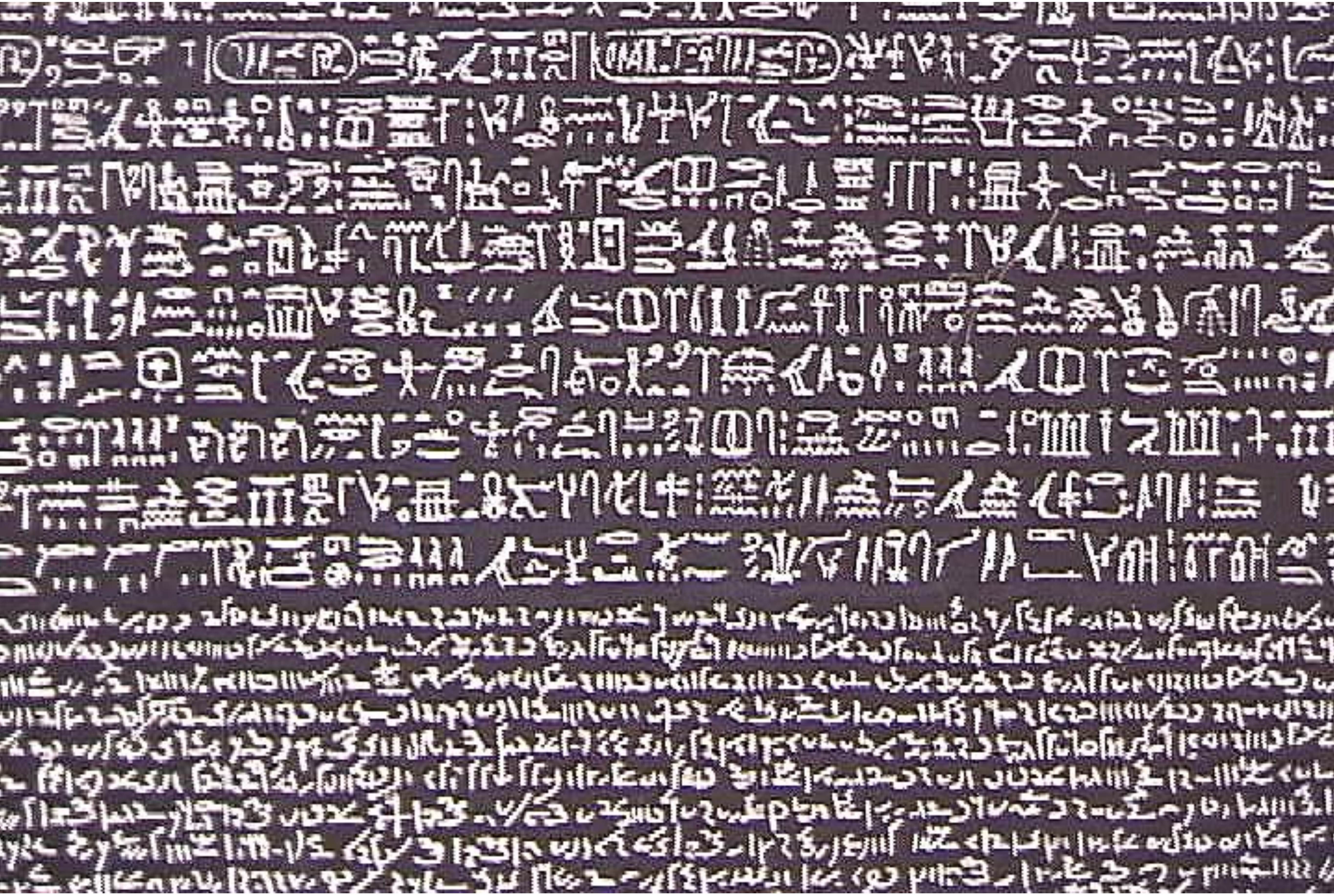
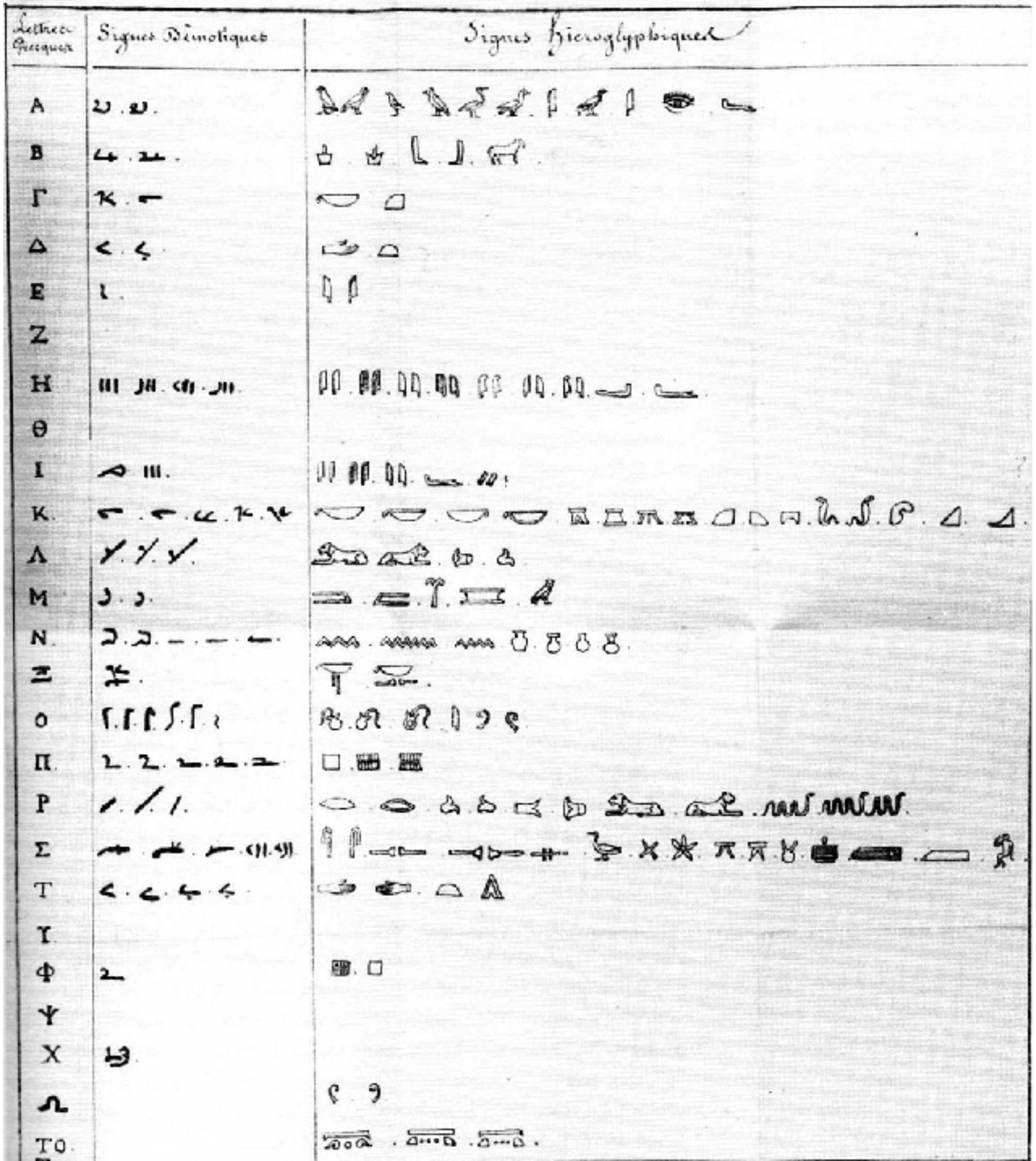


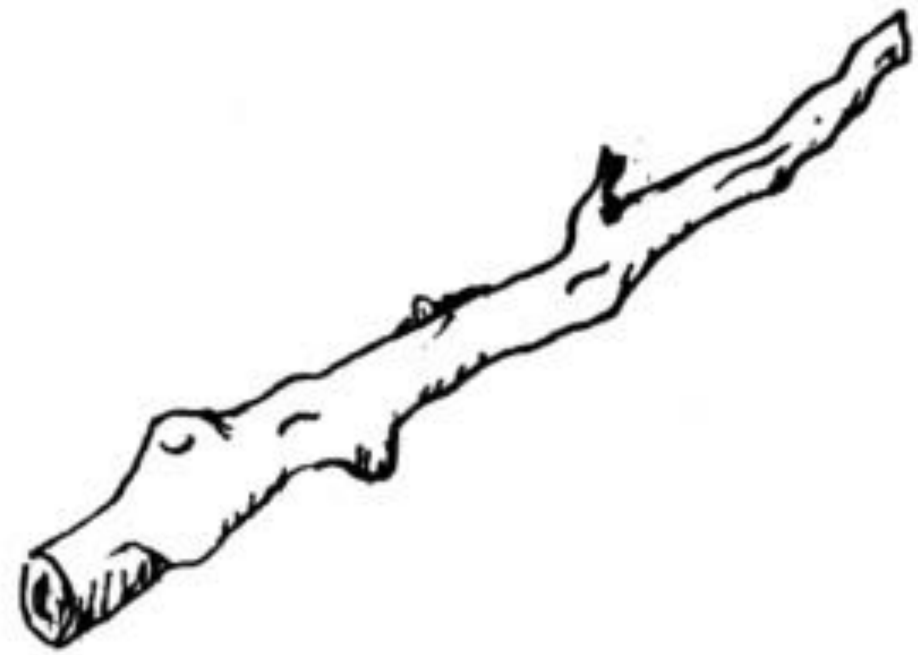
Tableau des Signes Phonétiques
des Écritures Hiéroglyphique et Démotique des anciens Égyptiens



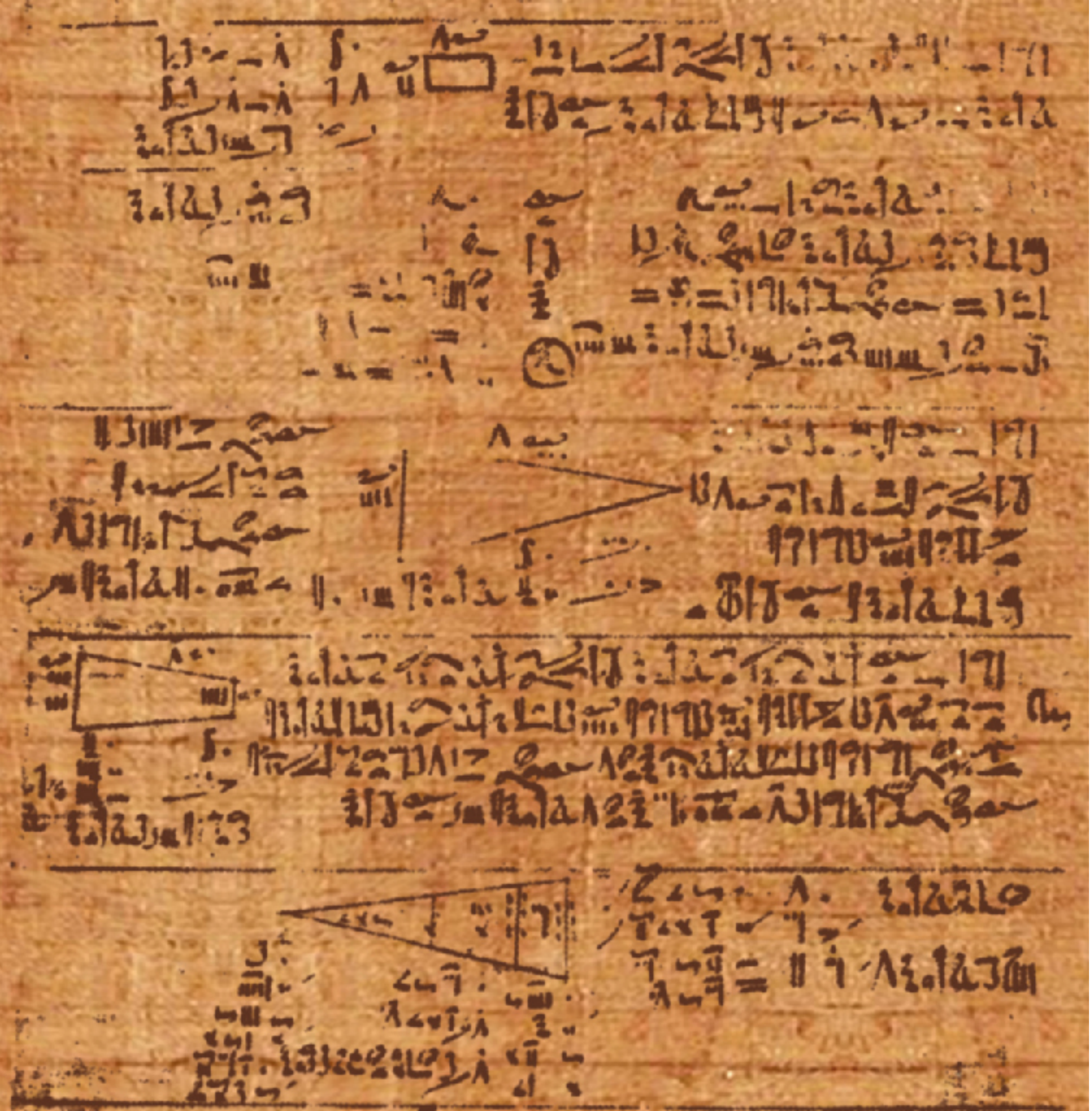
Bee

Leef

Belief



Carapau



Papiro de Rhind
-XVII

1	𓏺
10	𓎆
100	𓍢
1000	𓆼
10000	𓂭

𓆼 𓍢 𓍢 𓎆 𓎆 𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺

Mas a ordem poderia ser outra. O mesmo número poderia ser representado por:

É por isso que dizemos que o sistema em questão não era posicional.

As contas eram feitas com estes símbolos. Um exemplo: 213+41. Começamos por escrever os números na simbologia da época:

e agora juntamos símbolos semelhantes:

que representa 254.

152

Tableau des symboles
pour les nombres de 1 à 9 000

N	Hiéroglyphiques	Hiératiques	N	Hiéroglyphiques	Hiératiques
1			100		
2			200		
3			300		
4			400		
5			500		
6			600		
7			700		
8			800		
9			900		
10			1 000		
20			2 000		
30			3 000		
40			4 000		
50			5 000		
60			6 000		
70			7 000		
80			8 000		
90			9 000		

base 10, mas não é posicional

234 = ||||∩∩∩99 = ||||99∩∩∩

1 **Soma**: por grupos, reordenando:

$$\begin{array}{r} 321 \\ +\ 85 \\ \hline 406 \end{array}$$

| ∩∩ 999
||| ∩∩∩∩
+ || ∩∩∩∩

||| ∩∩∩∩∩ 999
||| ∩∩∩∩∩

isto é: ||| 9999
|||

2 **Subtracção**: reconvertendo alguns grupos antes para viabilizar subtracções nos diversos grupos:

$$\begin{array}{r} 123 \\ -\ 45 \\ \hline 78 \end{array}$$

||| ∩∩9
||||| ∩∩∩∩

convertendo: ||||| ∩∩∩∩∩
||||| ∩∩∩∩∩
||| ∩∩

− ||||| ∩∩∩∩

|||| ∩∩∩∩
|||| ∩∩∩

Egipto antigo

19 x 71

71 x 19

91 : 7

por que funciona?

33 x 44

15.09.2020

E6

Multiplicação: Duplicações sucessivas.

19×71

* 1	71
* 2	142
4	284
8	568
* 16	1136
19	1349

corresponde a:

$$19\times 71=(1+2+16)\times 71 = 1\times 71+2\times 71+16\times 71$$

71×19

* 1	19
* 2	38
* 4	76
8	152
16	304
32	608
* 64	1216
71	1349

corresponde a

$$71\times 19=(1+2+4+64)\times 19 = 1\times 19+2\times 19+4\times 19+64\times 19$$

E7

Funciona devido a ser sempre possível expansão em base 2.

Não há batota. Não à batota!

Divisão: É só multiplicar!

$91 \div 7$

$x \times 7 = 91$

1	7 *
2	14
4	28 *
8	56 *
13	91

A divisão não é uma operação nova!

Mas nem sempre é tão simples:

$35 \div 8$

$(x \times 8 = 35)$

1	8
2	16
4	32

Temos $35 - 32 = 3$. Como obter 3 como soma de elementos da coluna da direita? Dividindo 8 por 2 temos 4, dividindo 4 por 2 temos 2 e dividindo 2 por 2 temos 1, e $3 = 2+1$.

Notação: $\frac{1}{n} = \bar{n}$

$$\begin{array}{ll}
1 & 8 \\
2 & 16 \\
4 & 32\ * \\
\overline{2} & 4 \\
\overline{4} & 2\ * \\
\overline{8} & 1\ * \\
\hline
4\,\overline{4}\,\overline{8} & 35
\end{array}$$

Só usavam fracções com numerador 1, excepto $\frac{2}{3}$ $(=\bar{\bar{3}})$

Recorriam à divisão para exprimir em fracções unitárias os racionais.

$\frac{6}{7}$

$(x \times 7 = 6)$

$$\begin{array}{ll}
1 & 7 \\
\overline{2} & 3\,\overline{2}\ * \\
\overline{4} & 1\,\overline{2}\,\overline{4}\ * \\
 & \\
\overline{7} & 1 \\
\overline{14} & \overline{2}\ * \\
\overline{28} & \overline{4}\ * \\
\hline
\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{14}\,\overline{28} & 6
\end{array}$$

$3\,\overline{2} + 1\,\overline{2}\,\overline{4} = 5\,\overline{4}$

ainda faltam 3/4

Que todo o racional se pode escrever como soma de fracções unitárias (fracções egípcias) foi provado por Sylvester em 1880, mas já o Fibonacci (1202) seguia o mesmo método.

Seja $0<\frac{p}{q}<1$ uma fracção não unitária e seja $\frac{1}{n}$ a maior fracção unitária que não excede $\frac{p}{q}$. Então $\frac{p}{q}-\frac{1}{n}$ é uma fracção que, na forma irredutível $\frac{r}{s}$, tem $r<p$.

tem-se $\frac{p}{q}-\frac{1}{n}=\frac{np-q}{nq}$

vejamos que $np-q<p$

se $np-q\geq p$ então $np-q+q-p\geq p+q-p$

i.e. $np-p\geq q$

$\therefore \frac{1}{np-p}\leq\frac{1}{q}$

$\therefore \frac{p}{np-p}\leq\frac{p}{q}$

$\therefore \frac{1}{n-1}\leq\frac{p}{q}$ o q contraria a escolha de n.

E10

subtraindo sucessivamente as maiores frações unitárias que for possível somos levados a um processo finito.

$$\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{4}{5} < 1$$

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

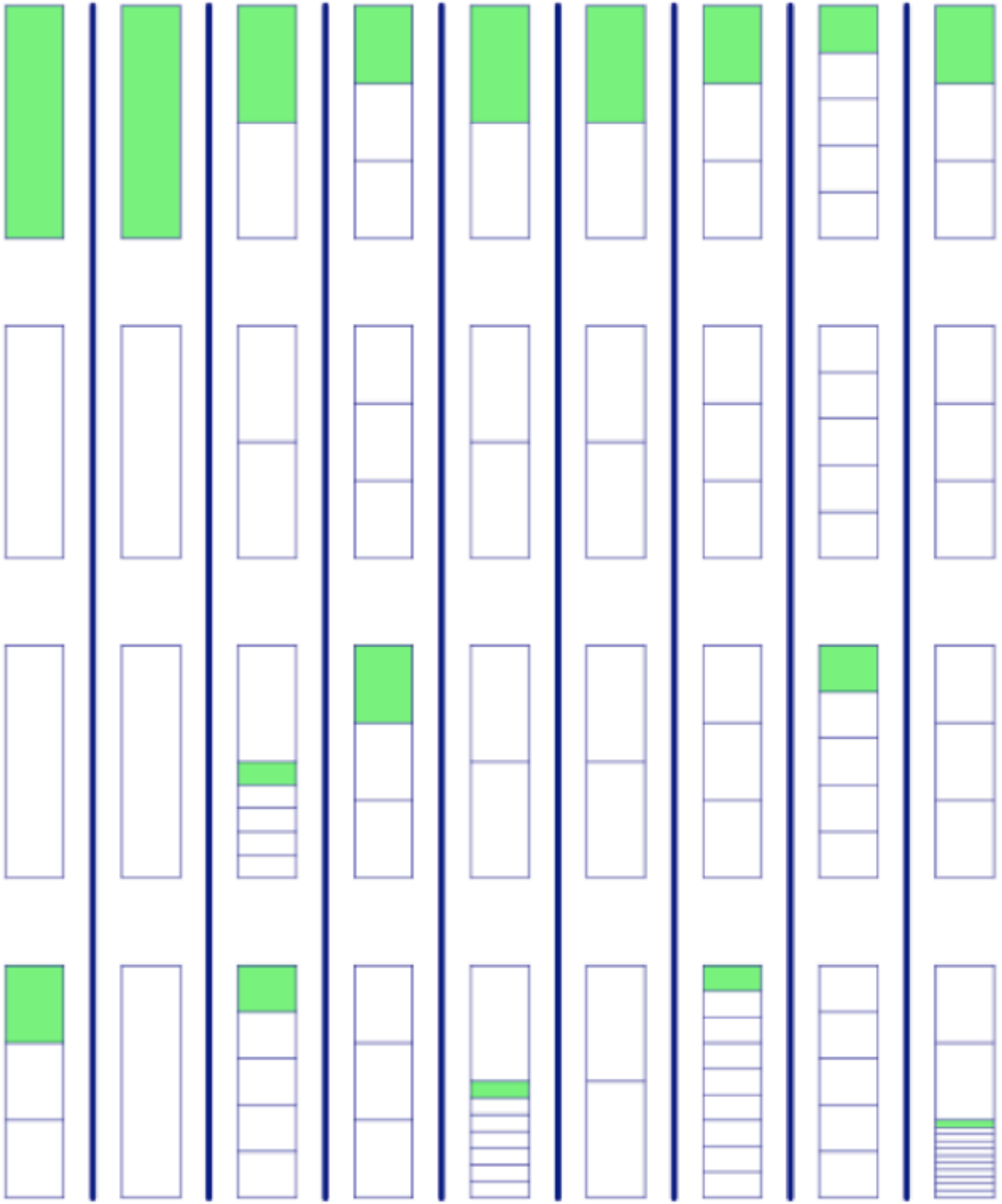
$$\therefore \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

Multiplicação com frações, a necessidade de saber $\frac{2}{n}$ para os vários valores de n.

$$(2\ \bar{4}) \times (1\ \bar{2}\ \bar{7})$$

$$\begin{array}{ll}
1 & 1\ \bar{2}\ \bar{7} \\
{*}2 & 3\ \bar{4}\ \overline{28} \\
\bar{2} & \bar{2}\ \bar{4}\ \overline{14} \\
{*}\bar{4} & \bar{4}\ \bar{8}\ \overline{28} \\
\hline
2\ \bar{4} & 3\ \bar{2}\ \bar{8}\ \overline{14}
\end{array}$$

24.09.2020



4/3, ... , 4/11

Outro método para obter
frações unitárias
(splitting method)

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

ex: $\frac{2}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{19} = \frac{1}{19} + \frac{1}{20} + \frac{1}{19\times 20}$

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42} + \frac{1}{31} + \frac{1}{30\times 31}$$

$$= \dots$$

*

Uma divisão com frações (Rhind 33):

E12

$37 \div (1\ \bar{\bar{3}}\ \bar{2}\ \bar{7})$

1	$1\ \bar{\bar{3}}\ \bar{2}\ \bar{7}$
2	$4\ \bar{3}\ \bar{4}\ \overline{28}$
4	$8\ \bar{\bar{3}}\ \bar{2}\ \overline{14}$
8	$18\ \bar{3}\ \bar{7}$
16	$36\ \bar{\bar{3}}\ \bar{4}\ \overline{28}$

$36\ \bar{\bar{3}}\ \bar{4}\ \overline{28}$ já é próximo de 37. Quanto falta?

Isto é, qual é a quantidade x que verifica

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + x = 1 \ ?$$

ou, qual é y tal que

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{y}{84} = 1 \ ?$$

multiplicando por 84:

$$56 + 21 + 3 + y = 84$$

$$\therefore y = 4$$

$$\therefore x = \frac{1}{21}$$

O que se deve multiplicar por $1\,\bar{\bar{3}}\,\bar{2}\,\bar{7}$ para obter $\overline{21}$?

$$z \times (1\,\bar{\bar{3}}\,\bar{2}\,\bar{7}) = \overline{21}$$

multiplicando por 42:

$$z \times 97 = 2$$

$$\therefore \quad z = \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

Tem-se finalmente:

1	$1\,\bar{\bar{3}}\,\bar{2}\,\bar{7}$
2	$4\,\bar{3}\,\bar{4}\,\overline{28}$
4	$8\,\bar{\bar{3}}\,\bar{2}\,\overline{14}$
8	$18\,\bar{3}\,\bar{7}$
* 16	$36\,\bar{\bar{3}}\,\bar{4}\,\overline{28}$
* $\overline{56}\,\overline{679}\,\overline{776}$	$\overline{21}$
$16\,\overline{56}\,\overline{679}\,\overline{776}$	37

E14

FRACÇÕES EGÍPCIAS – PAPIRO DE RHIND

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{17} = \frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$$

$$\frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$$

$$\frac{2}{21} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{23} = \frac{1}{12} + \frac{1}{276}$$

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}$$

$$\frac{2}{27} = \frac{1}{18} + \frac{1}{54}$$

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{31} = \frac{1}{20} + \frac{1}{124} + \frac{1}{155}$$

$$\frac{2}{33} = \frac{1}{22} + \frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{37} = \frac{1}{24} + \frac{1}{111} + \frac{1}{296}$$

$$\frac{2}{39} = \frac{1}{26} + \frac{1}{78}$$

$$\frac{2}{41} = \frac{1}{24} + \frac{1}{246} + \frac{1}{328}$$

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}$$

$$\frac{2}{45} = \frac{1}{30} + \frac{1}{90}$$

$$\frac{2}{47} = \frac{1}{30} + \frac{1}{141} + \frac{1}{470}$$

$$\frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196}$$

$$\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$$

$$\frac{2}{53} = \frac{1}{30} + \frac{1}{318} + \frac{1}{795}$$

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$$

$$\frac{2}{57} = \frac{1}{38} + \frac{1}{114}$$

$$\frac{2}{59} = \frac{1}{36} + \frac{1}{236} + \frac{1}{531}$$

$$\frac{2}{61} = \frac{1}{40} + \frac{1}{244} + \frac{1}{488} + \frac{1}{610}$$

$$\frac{2}{63} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$$

$$\frac{2}{65} = \frac{1}{39} + \frac{1}{195}$$

$$\frac{2}{67} = \frac{1}{40} + \frac{1}{335} + \frac{1}{536}$$

$$\frac{2}{69} = \frac{1}{46} + \frac{1}{138}$$

$$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}$$

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{365}$$

$$\frac{2}{75} = \frac{1}{50} + \frac{1}{150}$$

$$\frac{2}{77} = \frac{1}{44} + \frac{1}{308}$$

$$\frac{2}{79} = \frac{1}{60} + \frac{1}{237} + \frac{1}{316} + \frac{1}{790}$$

$$\frac{2}{81} = \frac{1}{54} + \frac{1}{162}$$

$$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$$

$$\frac{2}{85} = \frac{1}{51} + \frac{1}{255}$$

$$\frac{2}{87} = \frac{1}{58} + \frac{1}{174}$$

$$\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

$$\frac{2}{93} = \frac{1}{62} + \frac{1}{186}$$

$$\frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{380} + \frac{1}{570}$$

$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}$$

$$\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$$

$\frac{2}{n}$ só para n ímpar $3 \leq n \leq 101$

- $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$$\boxed{\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}}$$ (Crivo!)

$$\frac{2}{63} = \frac{2}{3 \times 21} = \frac{1}{2 \times 21} + \frac{1}{6 \times 21} = \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$$

- $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$

$$\boxed{\frac{2}{5k} = \frac{1}{3k} + \frac{1}{15k}}$$

escaparam $\frac{2}{35}$, $\frac{2}{55}$ (que foi tratado como múltiplo de 11)

e $\frac{2}{95}$ (tratado como múltiplo de 19)

- $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$$\boxed{\frac{2}{7k} = \frac{1}{4k} + \frac{1}{28k}}$$

- $\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}$

$$\frac{2}{55} = \frac{1}{6 \times 5} + \frac{1}{66 \times 5} = \frac{1}{30} + \frac{1}{330}$$

para os primos 3, 5, 7, 11 usou-se

$$\boxed{\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}}}$$

[e também para o 23]

Para os outros parece que se usou qualquer coisa como o seguinte:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{a} + \frac{2a-p}{a\,p}$$

onde a deve ser escolhido com muitos divisores e verificando $a > \frac{p}{2}$

depois tenta-se escrever $2a-p$ como soma de divisores de a.

$\frac{2}{89}$ tomar $a = 60$

temos $\frac{2}{89} = \frac{1}{60} + \frac{31}{60\times 89} = \frac{1}{60} + \frac{15+10+6}{60\times 89}$

$$= \frac{1}{60} + \frac{1}{356} + \frac{1}{534} + \frac{1}{890}$$

E19

• As excepções são $\frac{2}{35}$ e $\frac{2}{91}$.

Média aritmética de p e q: $A(p,q) = \frac{p+q}{2}$

Média geométrica de p e q: $G(p,q) = \sqrt{pq}$

Média Harmónica de p e q: $H(p,q) = \frac{2}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$

tem-se $A(p,q) \times H(p,q) = pq$

$$\therefore \frac{2}{pq} = \frac{2}{A(p,q)\,H(p,q)} = \frac{2}{p+q}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

($\frac{2}{p+q}$ é egípcia porque $p+q$ é par)

o Temos então

$$\frac{2}{35} = \frac{2}{5\times 7} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{91} = \frac{2}{7\times 13} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{13}\right) = \frac{1}{70} + \frac{1}{130}$$

• $\frac{2}{101} = \frac{1}{101} + \frac{1}{202} + \frac{1}{303} + \frac{1}{606}$

tem-se $\boxed{\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}}$

porque 6 é perfeito ($\sigma(6) = 12$)

2 e a última fórmula resolve tudo...

E20

$$\frac{2}{3}$$

$\bar{\bar{3}}$

. 'Se te disserem 'quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$?' Calcula duas vezes dele e 6 vezes dele. $\frac{2}{3}$ dele é isto.' (denominador ímpar)

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{6\times 5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$$

$\bar{\bar{3}}$ de $\bar{5}$ $= \overline{10}\ \overline{30}$ $\qquad \frac{2}{3} \times \frac{1}{m} = \frac{1}{2m} + \frac{1}{6m}$

. $\bar{\bar{3}}$ de $\overline{11}$ $= \overline{22}\ \overline{66}$

denominador par: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3+6} = \frac{1}{9}$

$\bar{\bar{3}}$ de $\bar{8} = \overline{12}$ $\qquad$ $\bar{\bar{3}}$ de $\bar{6} = \bar{9}$

$m = 2k$

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{m} = \frac{2}{3\times 2k} = \frac{1}{3k} =$$

$$= \frac{1}{k+2k} = \frac{1}{\frac{m}{2} + m}$$

Problemas do papiro de Rhind

• 6 pães para 10 pessoas

$$\frac{6}{10} = \frac{5+1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

• Uma quantidade e seu sétimo dela dá 19. Qual é a quantidade?

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

tentar $x = 7$

dá $7 + \frac{7}{7} = 19$, isto é, $8 = 19$

está errado. Por quanto se tem de corrigir o tiro?

ora $8 \times \frac{19}{8} = 19$

logo $7 \times \frac{19}{8}$ é a solução

tem-se $7 \times \frac{19}{8} = 7 \times (2\ \bar{4}\ \bar{8}) = 16\ \bar{2}\ \bar{8}$

Pensa num número, soma-lhe dois terços, retira um terço do que obtiveste e diz a resposta. O escriba supõe que a resposta que lhe disseram foi 10 e conclui que o número original era 9.

Para nós, hoje, este *truque* pode não impressionar muito, mas passa por compreender que, se o número pensado for designado por N, o processo proposto equivale a calcular:

$$N + \frac{2}{3}N - \frac{1}{3}\left(N + \frac{2}{3}N\right) = \frac{10}{9}N$$

Vamos exemplificar. Calculemos 9×14. Vamos organizar o nosso algoritmo em duas colunas, uma encabeçada por 1 a outra por 14:

1	14

Agora dupliquemos ambos os elementos desta linha:

1	14
2	28

E assim sucessivamente:

1	14
2	28
4	56
8	102

Terminamos aqui porque o dobro de 8 já é maior que 9. Na coluna da esquerda marcamos com um * os números que, quando somados, dão 9:

*1	14
2	28
4	56
*8	112

E somamos os números da coluna da direita correspondentes: 14+112=126, que nos dá o valor correcto de 9x14.

Este processo, ainda hoje em uso em algumas regiões asiáticas, baseia-se no facto de qualquer número natural se poder escrever como soma de potências de 2. Na multiplicação acima, o processo foi equivalente a escrever:

$$9 \times 14 = (1 + 8) \times 14 = 14 + 8 \times 14 = 14 + 2 \times 2 \times 2 \times 14 = 14 + 112 = 126$$

Curiosamente, se considerarmos a multiplicação 14x9, que tem o mesmo valor, o aspecto do algoritmo muda um pouco:

1	9
*2	18
*4	36
*8	72

$$14 \times 9 = (2 + 4 + 8) \times 9 = 2 \times 9 + 4 \times 9 + 8 \times 9 = 18 + 36 + 72 = 126$$

1	12*
2	24
4	48*
8	96*

O problema 79 do *Papiro de Rhind* contém uma multiplicação (7x2801) e a tabela seguinte:

Casas	**7**
Gatos	**49**
Ratos	**343**
Espigas	**2401**
Medidas	**16807**
Total	**19607**

1	2801
2	5602
4	11204
Total	19607

Os totais são iguais. Na nossa notação actual este facto escreve-se

$$7+7^2+7^3+7^4+7^5 = 7\times \frac{7^5-1}{7-1} = 7 \text{ x } 2801$$

É surpreendente como, com métodos tão primitivos, o escriba sabia calcular esta soma de duas formas diferentes.

As I was going to St Ives
I met a man with seven wives
And every wife had seven sacks
And every sack had seven cats
And every cat had seven kits
Kits, cats, sacks, wives
How many were going to St Ives?

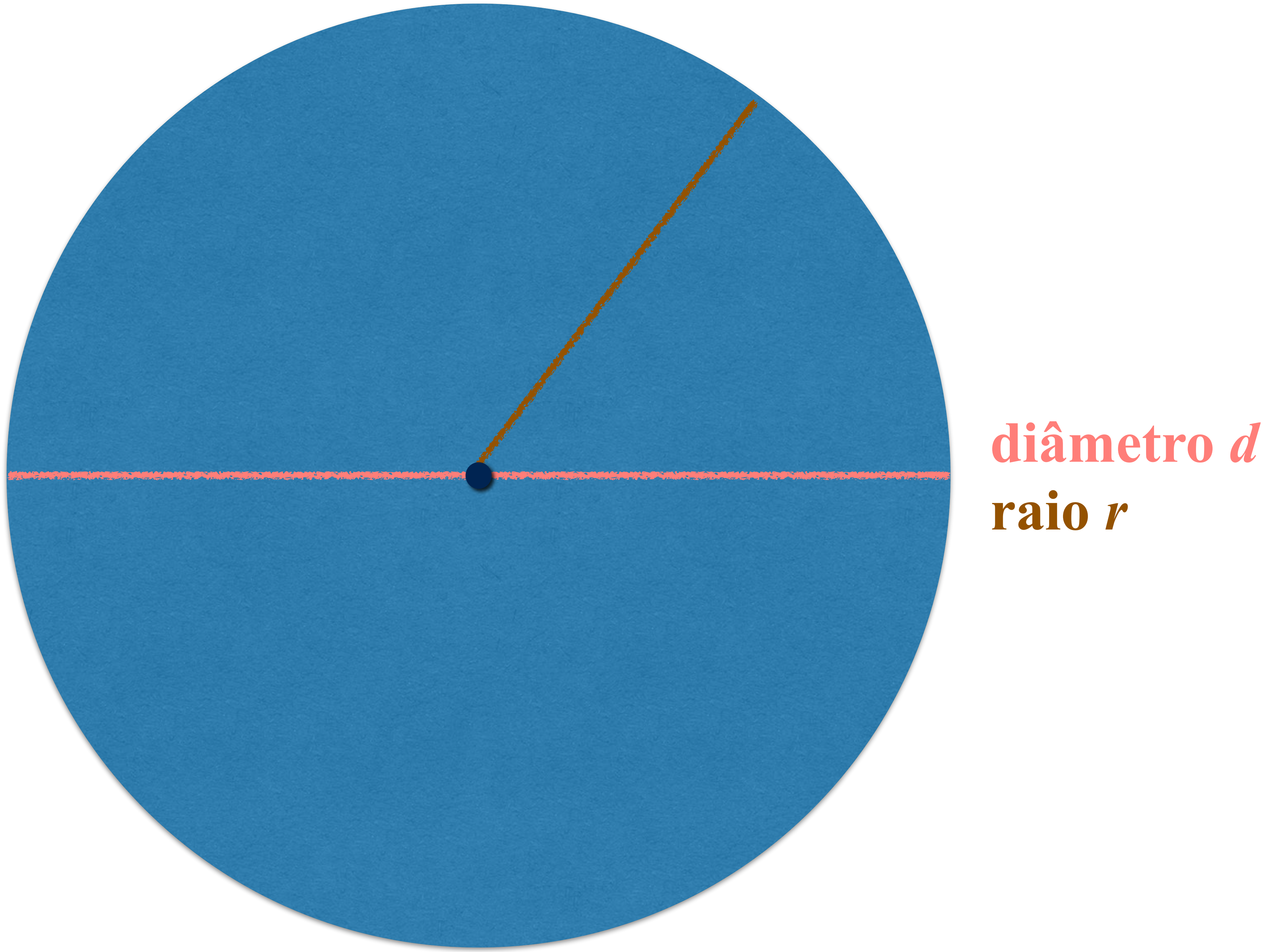
Uma possível versão em português será

A caminho de St. Ives,
Encontrei um homem com sete esposas.
Cada esposa tinha sete sacos,
Cada saco tinha sete gatos,
Cada gato tinha sete gatinhos,
Gatinhos, gatos, sacos e esposas,
Quantos iam a caminho de St. Ives?

Usando o método egípcio, compute:

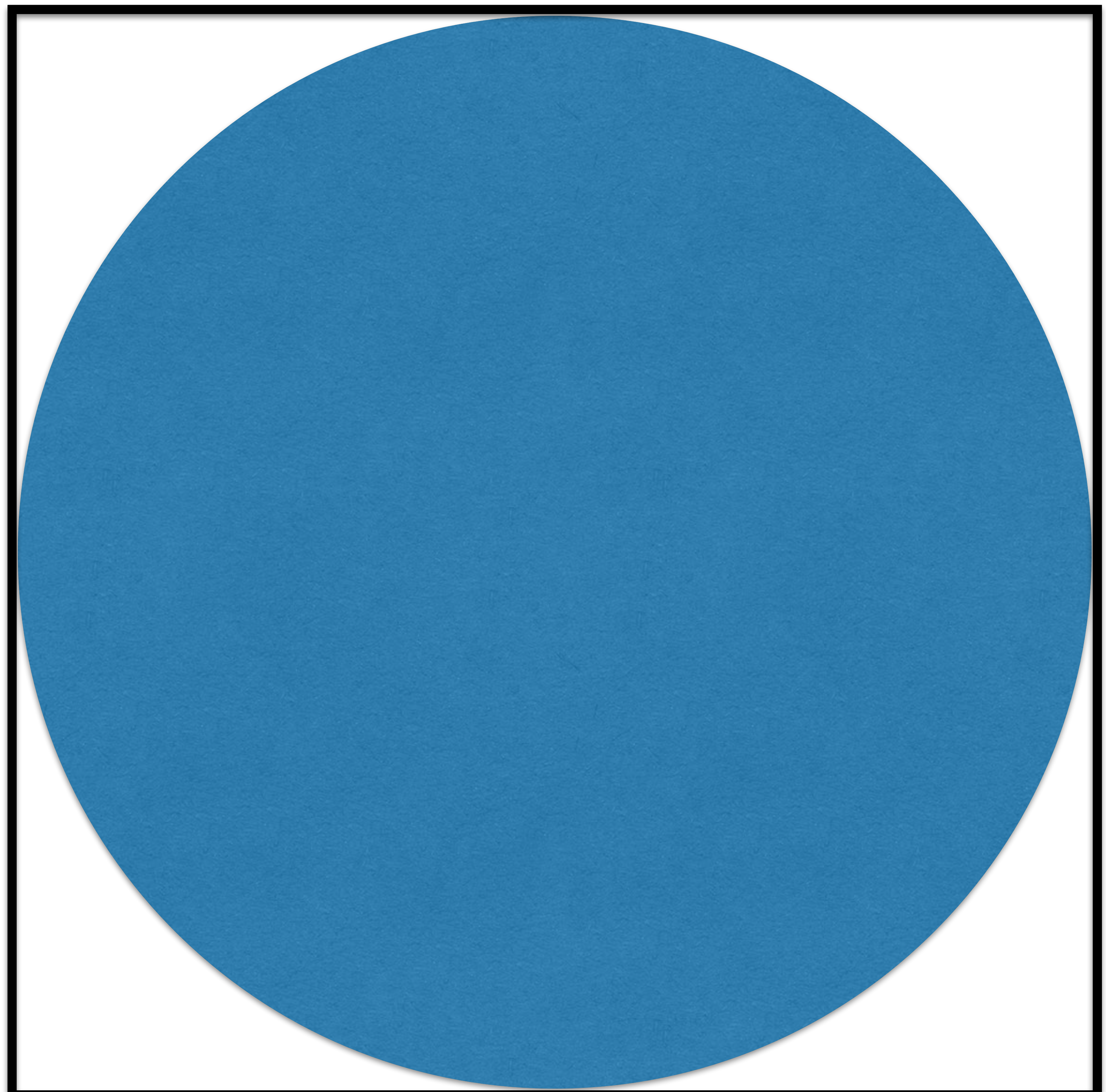
1. $18 \cdot 25$.
2. $26 \cdot 33$.
3. $85 \cdot 21$.
4. $184 \div 8$.
5. $19 \div 8$.
6. $61 \div 8$.
7. $(11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}) \cdot 37$.

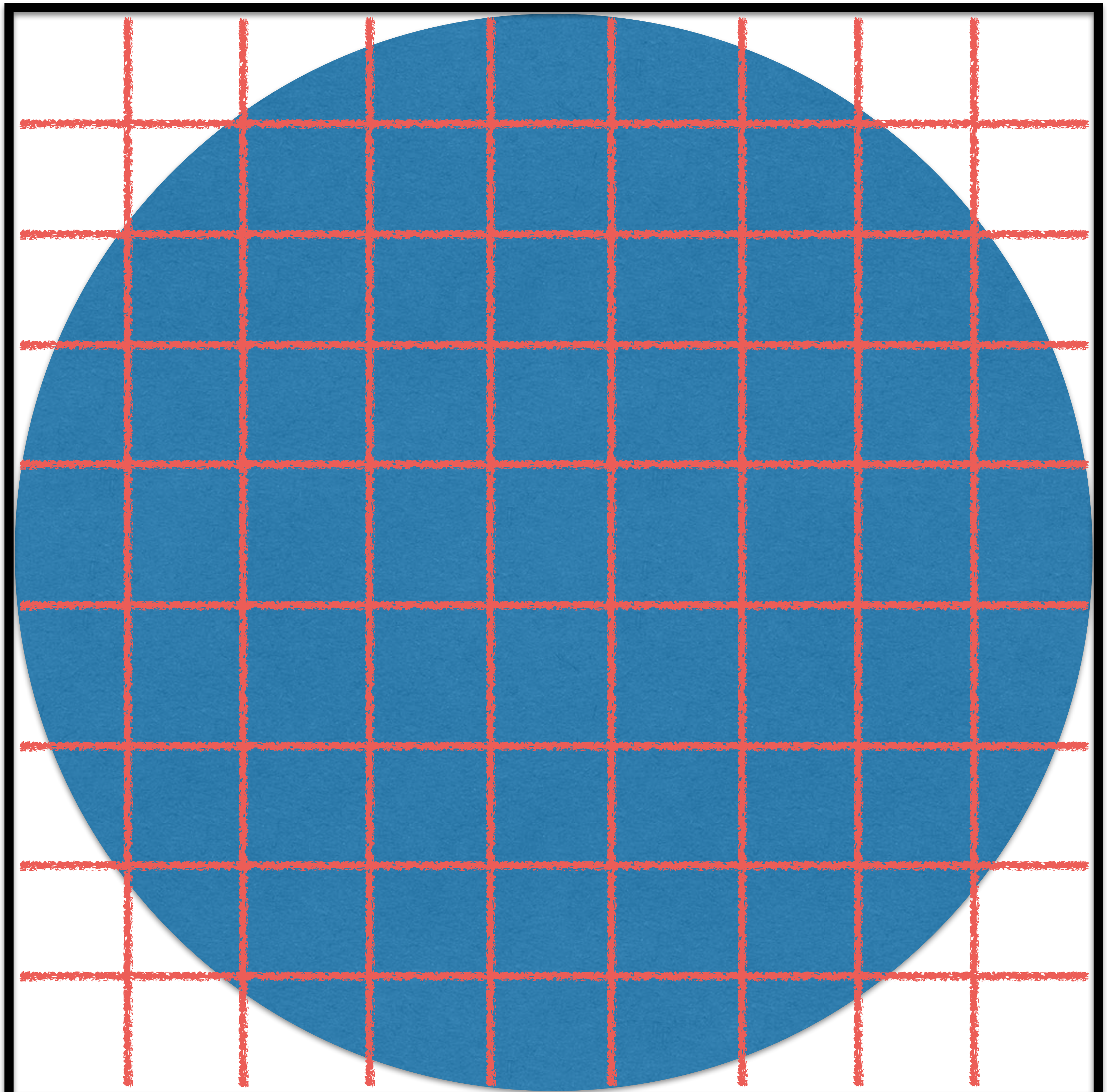
O que diz o Papiro de Rhind (-1650) sobre a área do círculo…

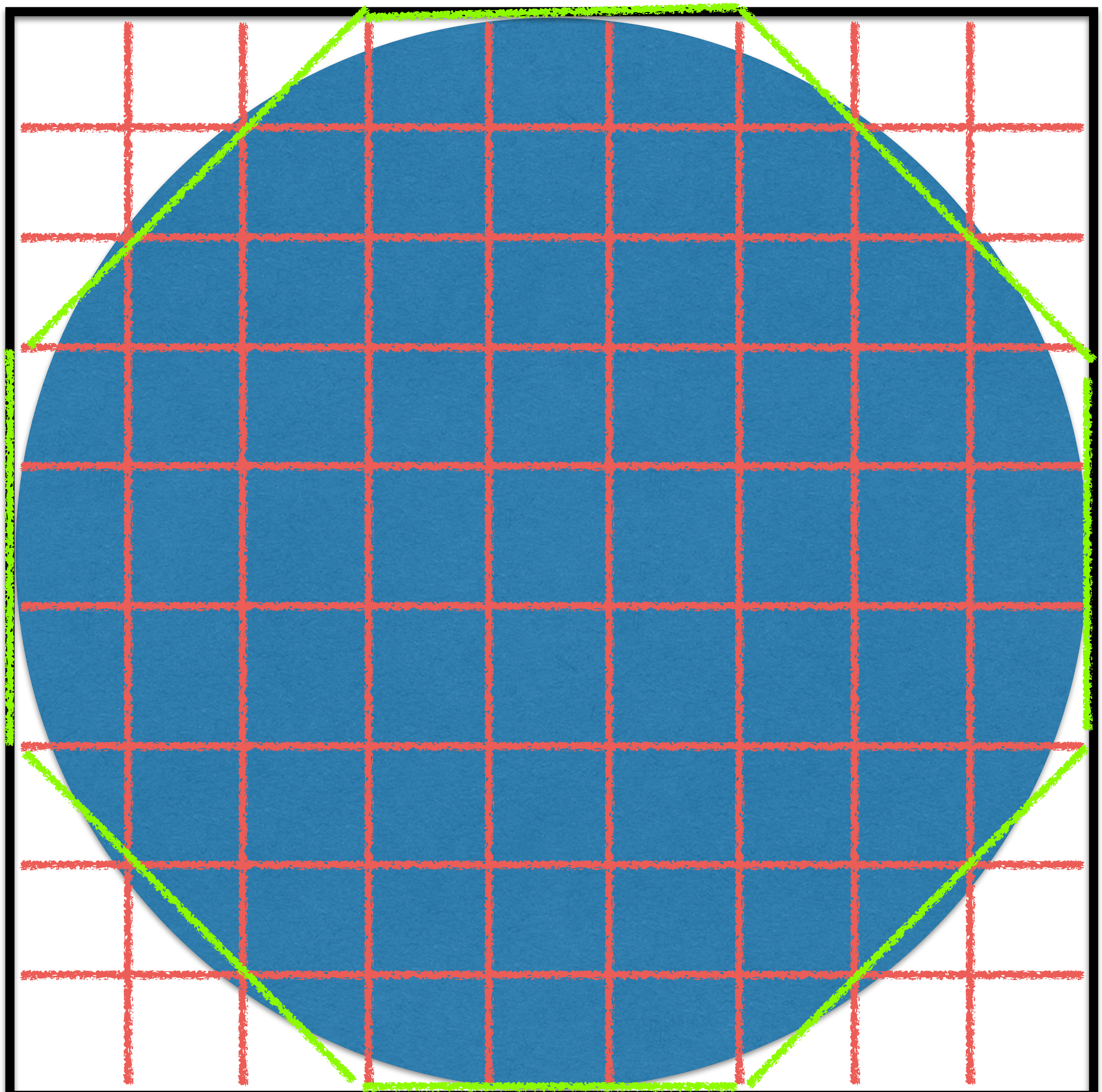

diâmetro *d*
raio *r*

Problemas 48, 50

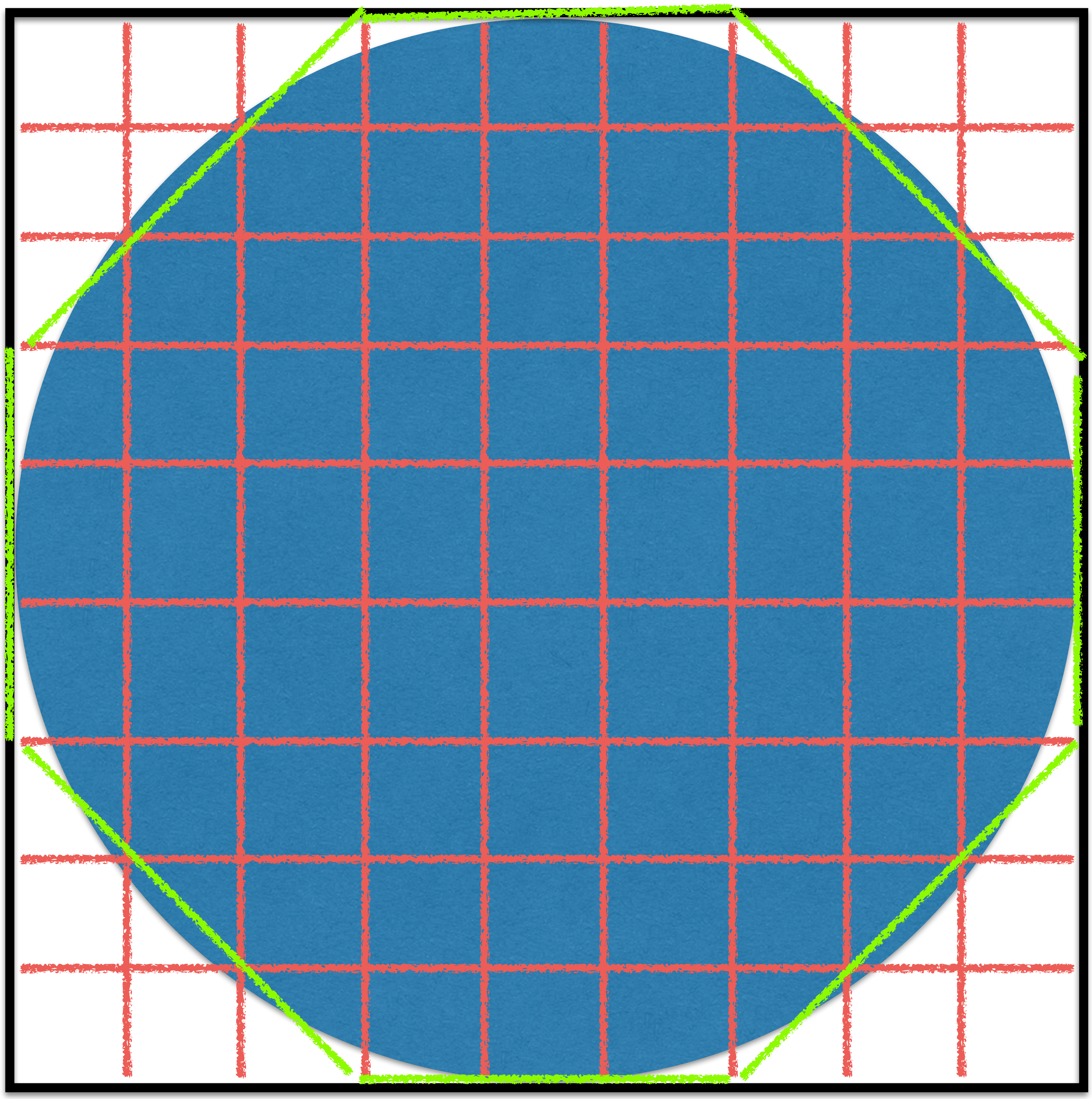
Para um círculo de diâmetro 9,
a área determinada é 8x8 = 64



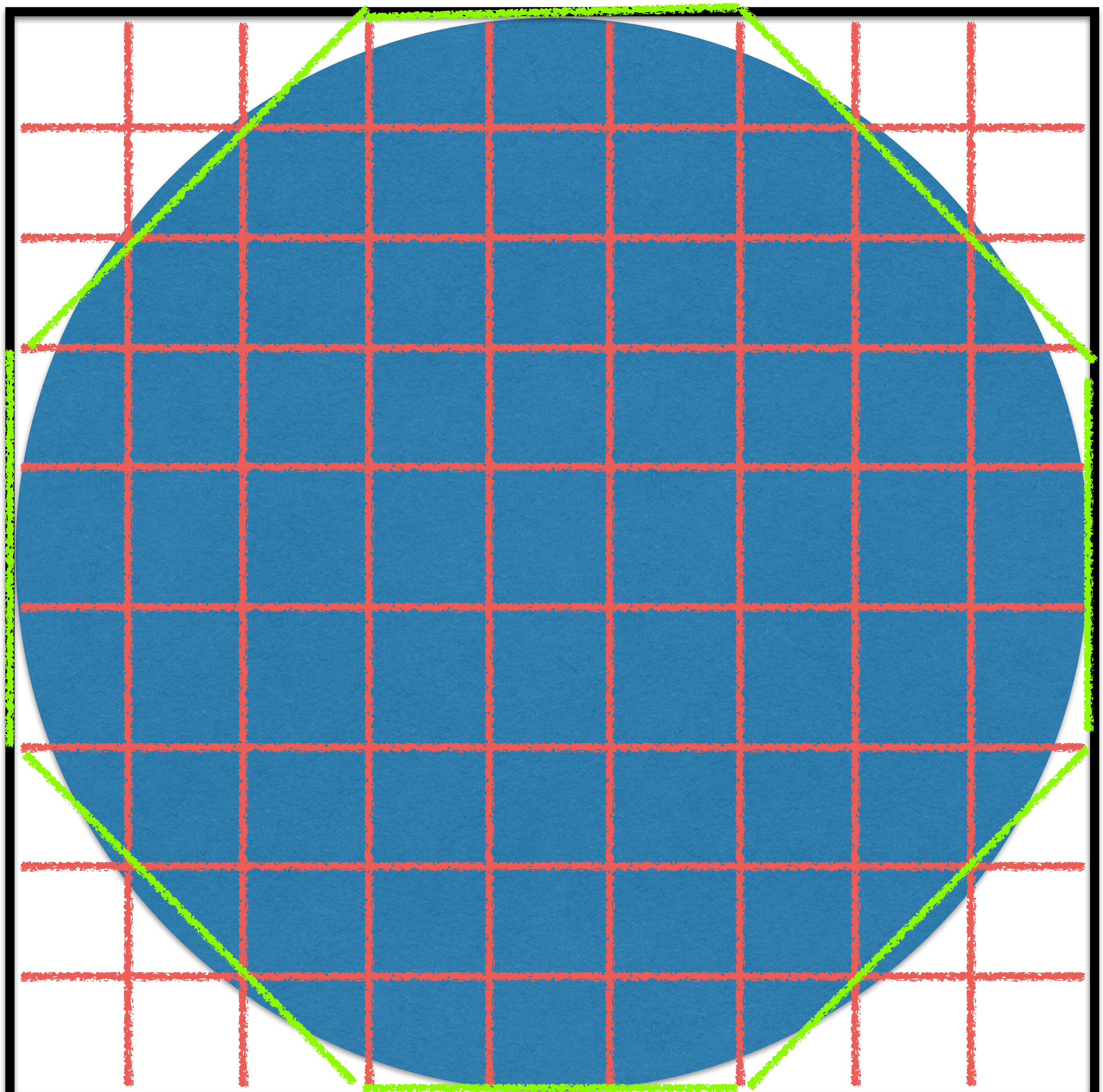




Unidade = d/9

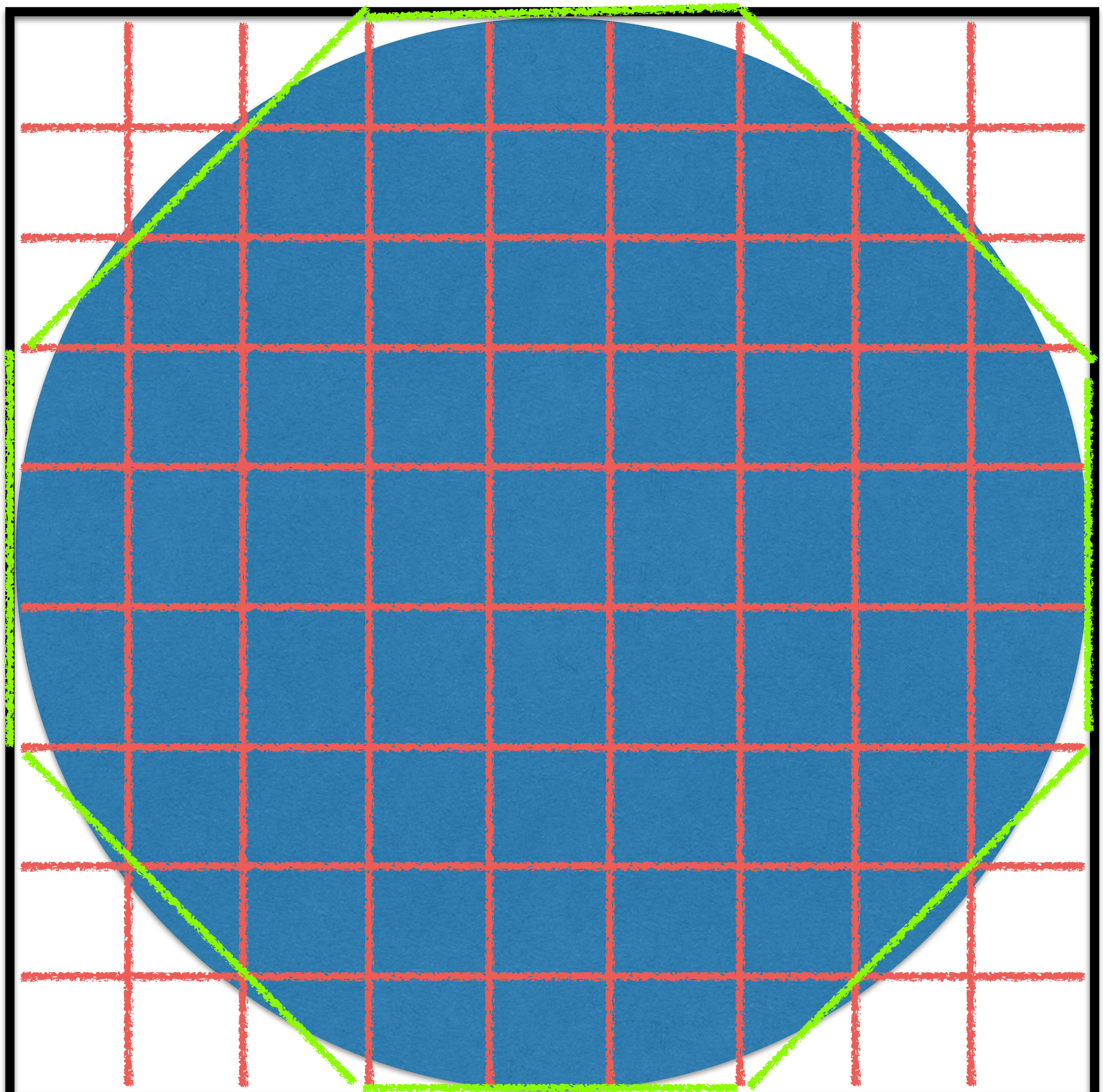


Área do octógono = 81 - 18 = 63 unidades

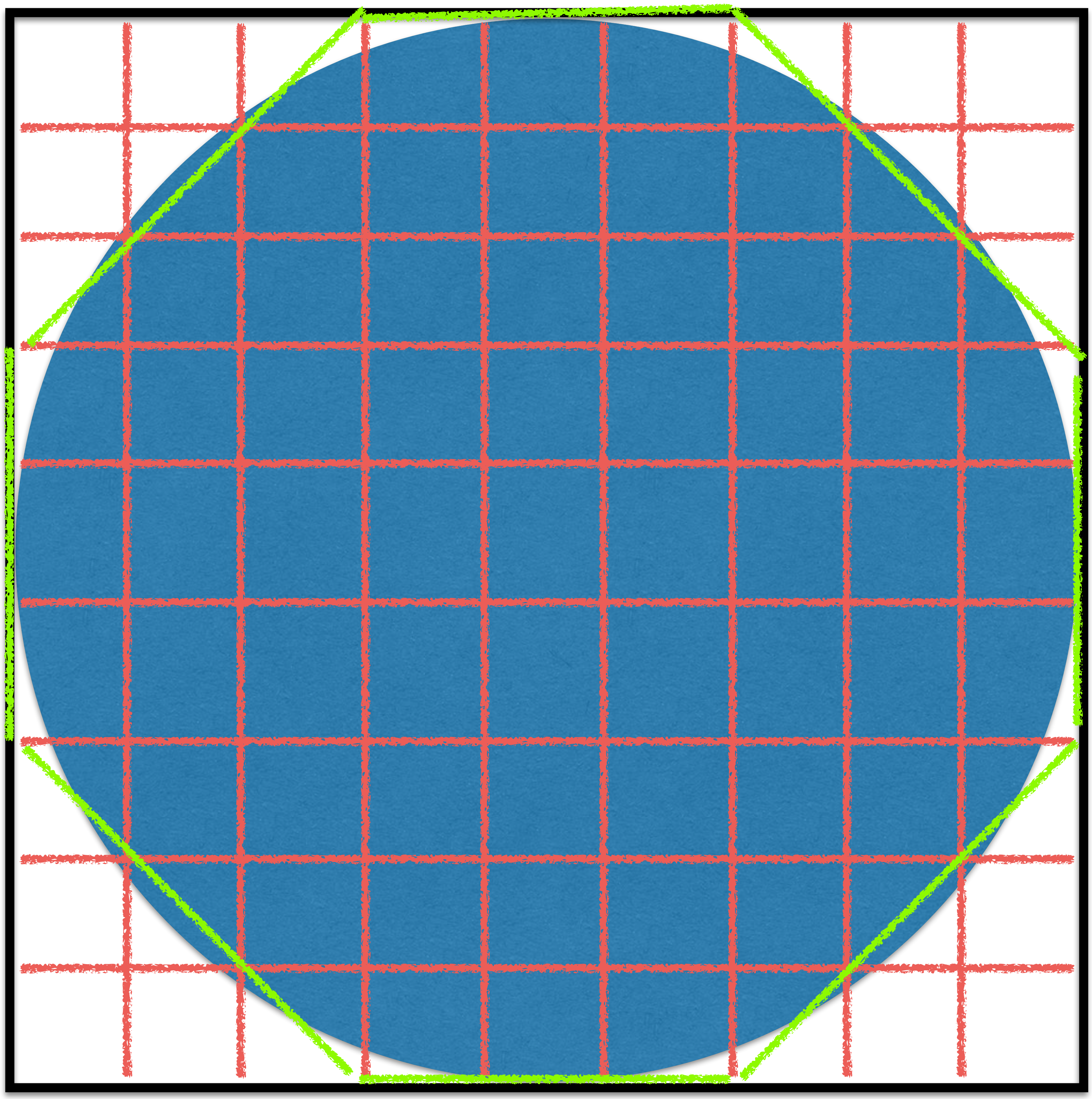


$$63 \approx 64 = 8^2$$

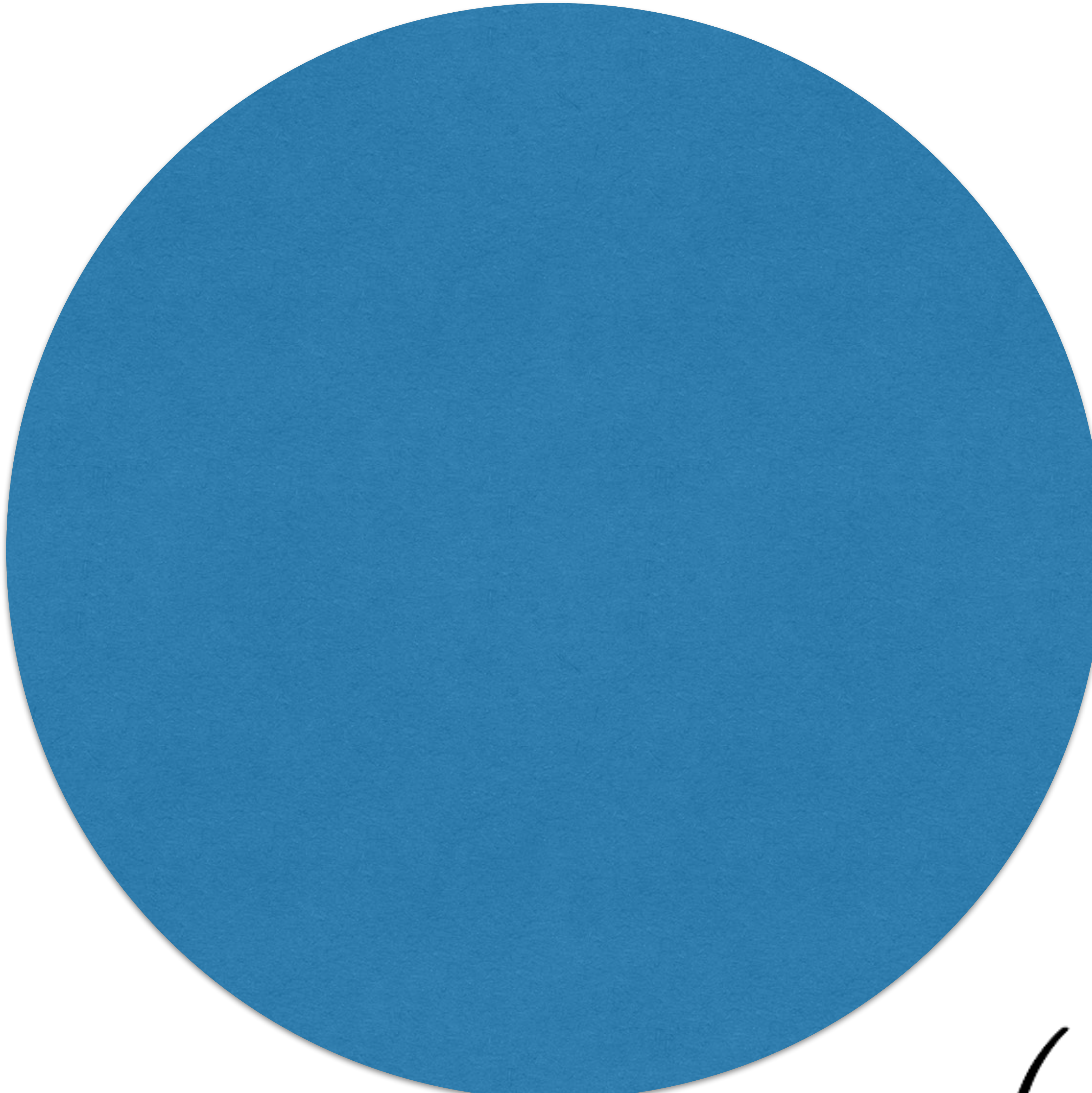
Lindo!



A area do octógono é quase igual
à de um quadrado de lado 8 unidades.



A área do octógono também é quase igual à área do círculo…



Logo a área do círculo é aproximadamente $$\left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Nós sabemos que fórmula correcta é πr^2

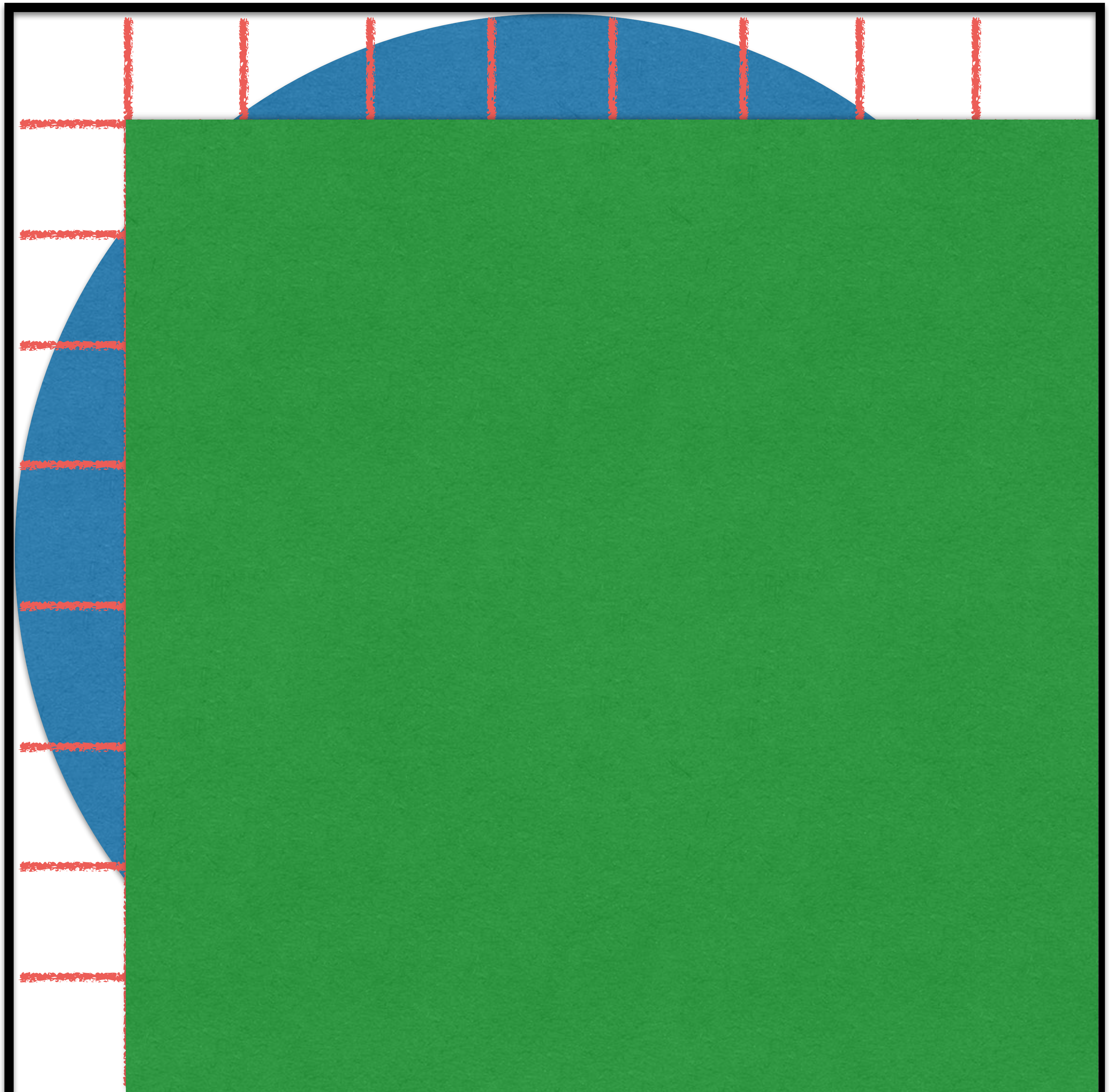
Logo, visto que

$$\left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^2 r^2$$

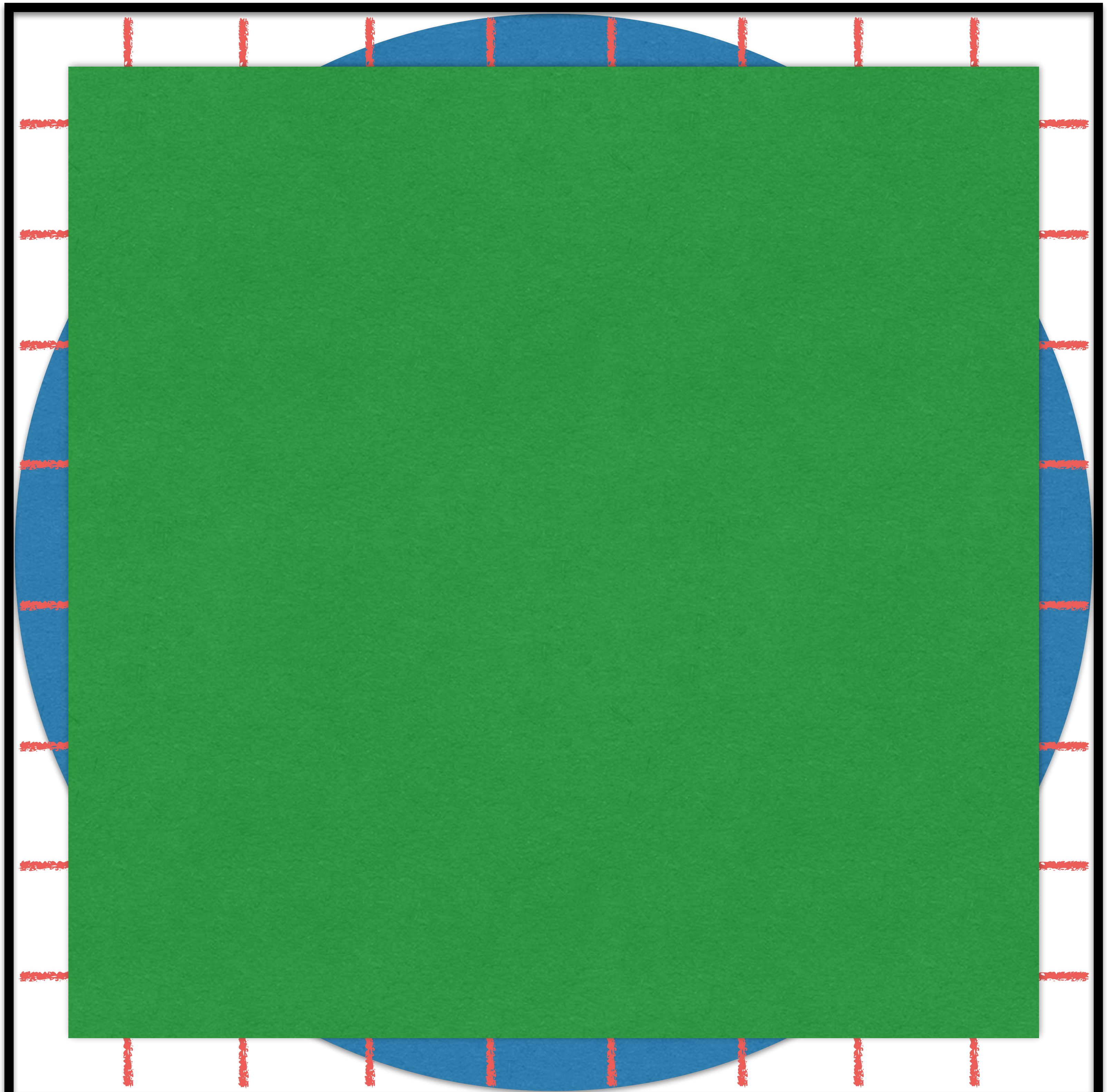
o argumento dos egípcios equivale a tomar a aproximação

$$\pi \approx 3.1604\ldots$$

Aconteceu há uns 4000 anos atrás!…



Regra prática: dado um círculo de diâmetro d, tire-se um nono a d e forme-se o quadrado com esse lado…



A aproximação é mesmo boa…

Grécia

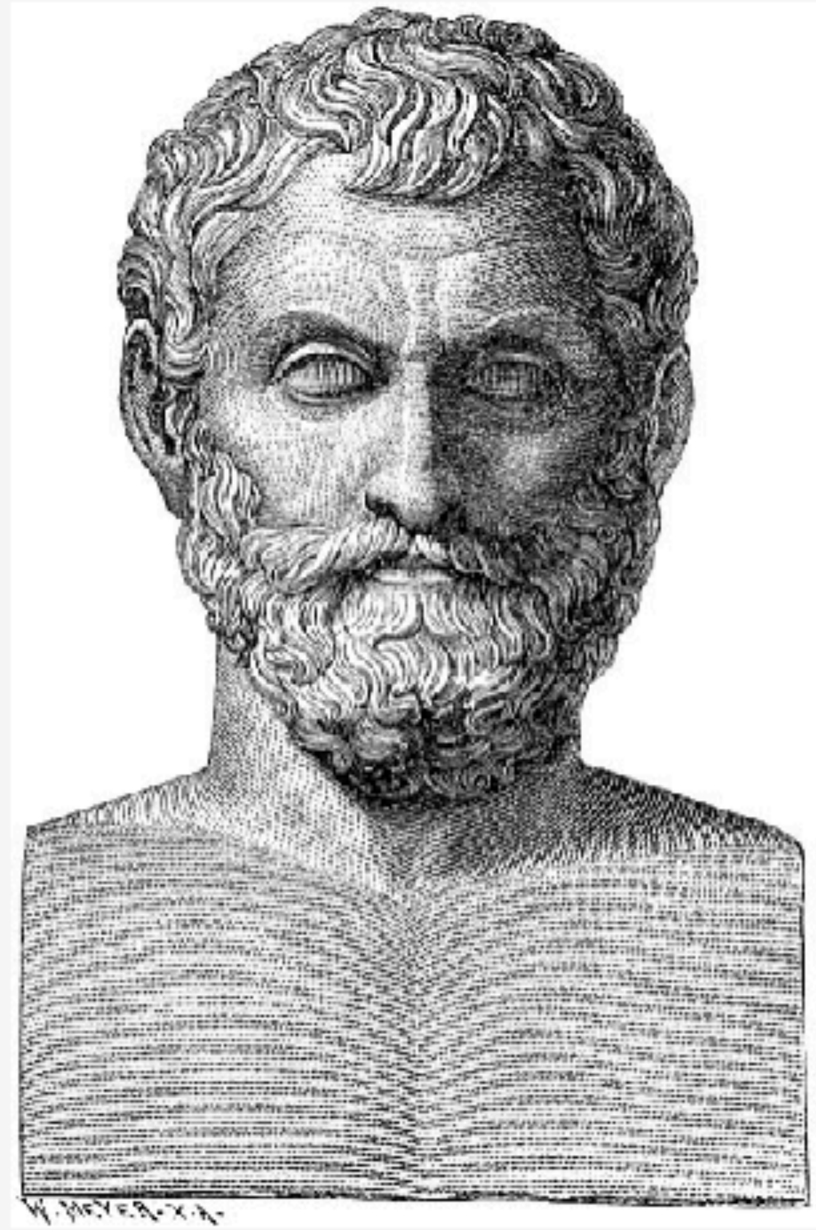
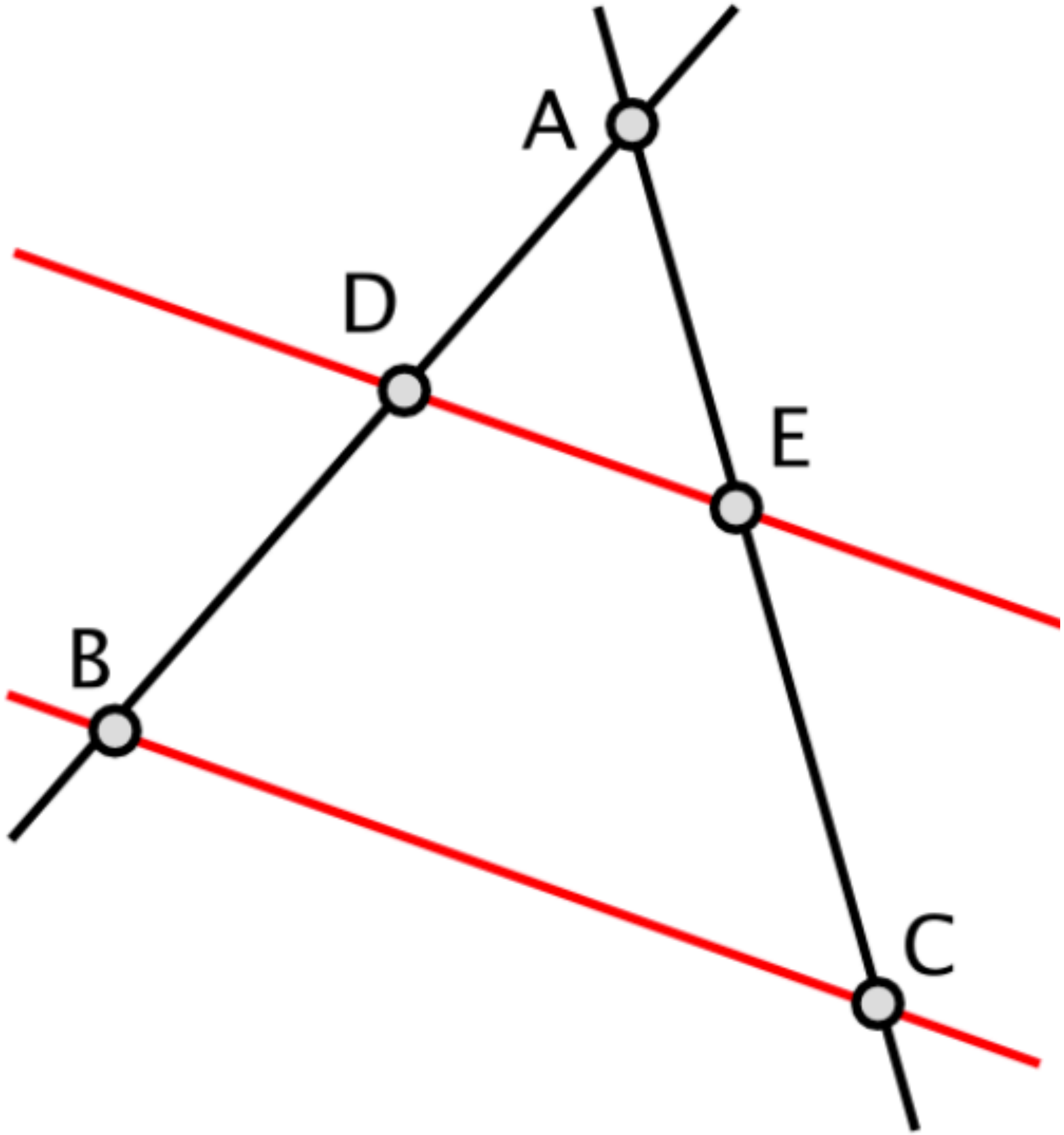
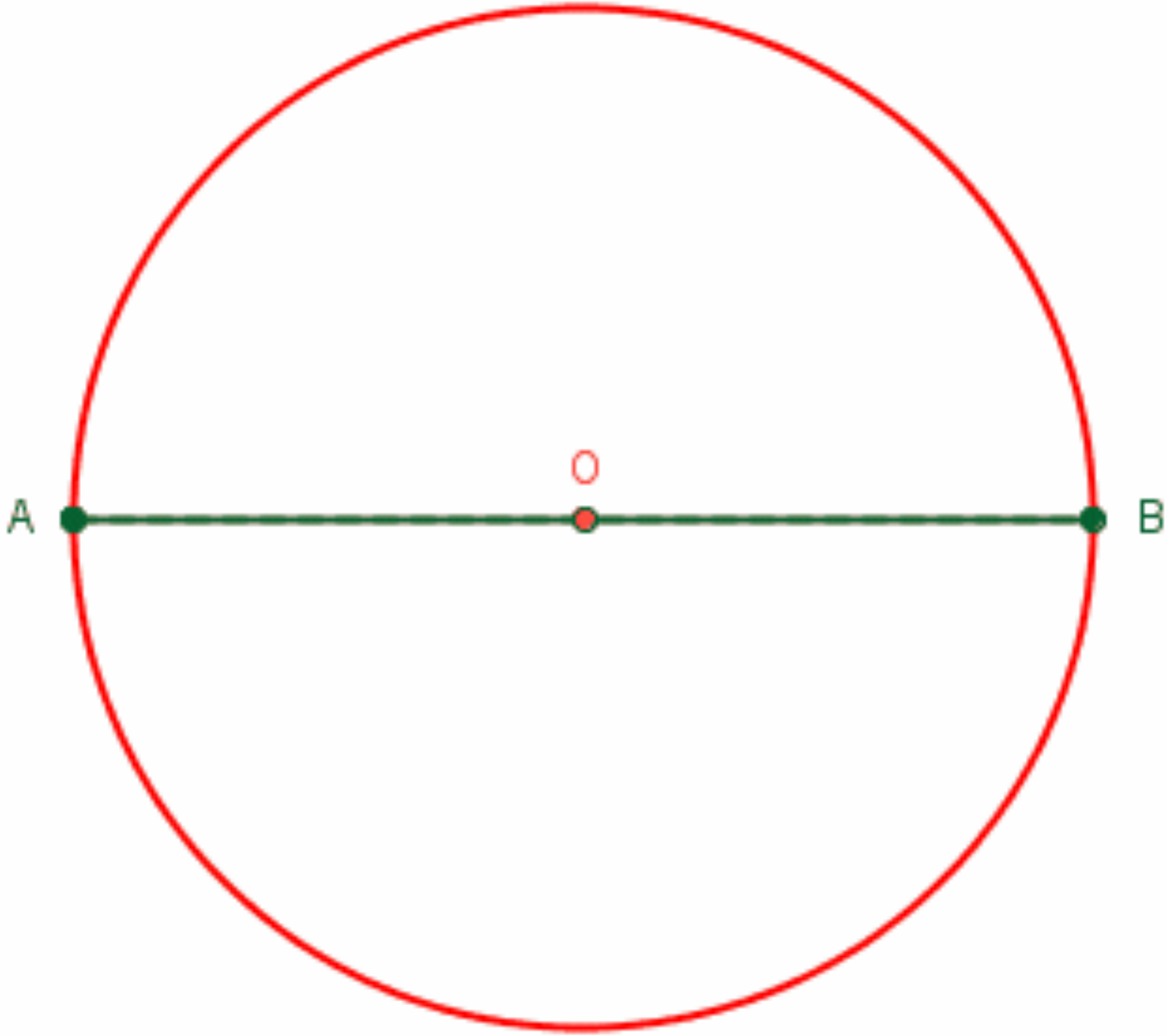


Ilustração de "Illustrerad verldshistoria utgifven av E. Wallis. volume I": Thales.

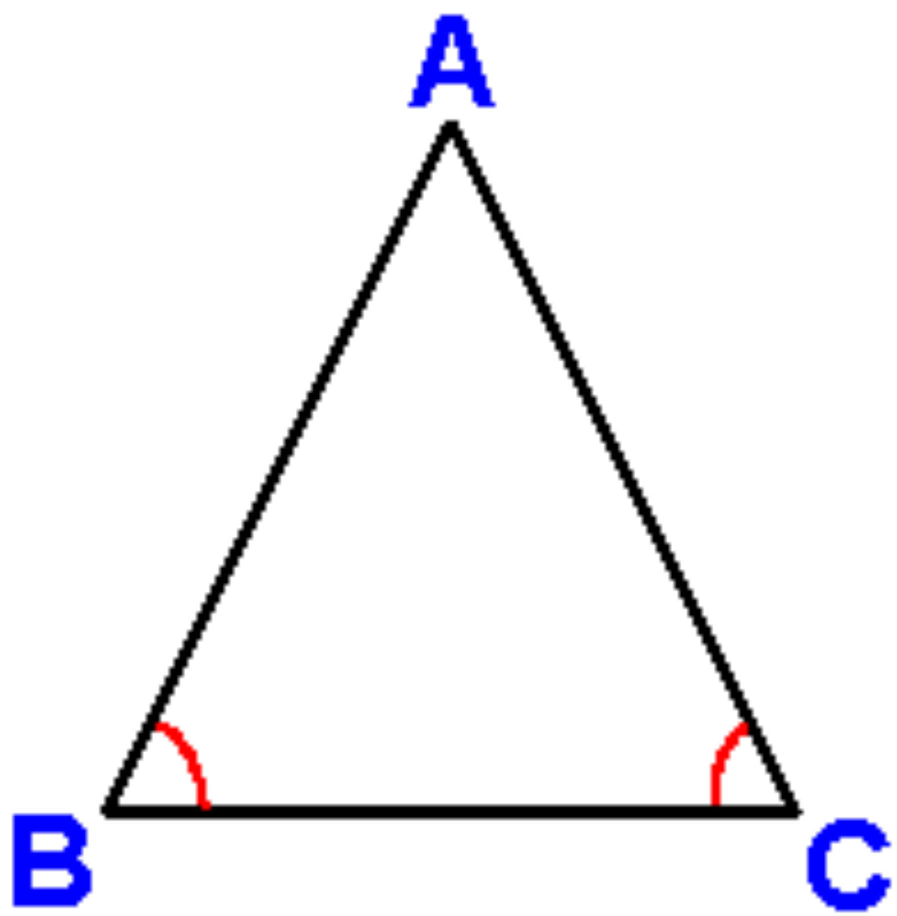
Nome completo	Θαλῆς ὁ Μιλήσιος
Escola/Tradição:	Escola Jônica, Escola de Mileto, Naturalismo
Data de nascimento:	c. 624 a.C./623 a.C.[1][2][3][4]
Local:	Mileto, atual Turquia
Morte	c. 548 a.C./546 a.C.[2][3][4]

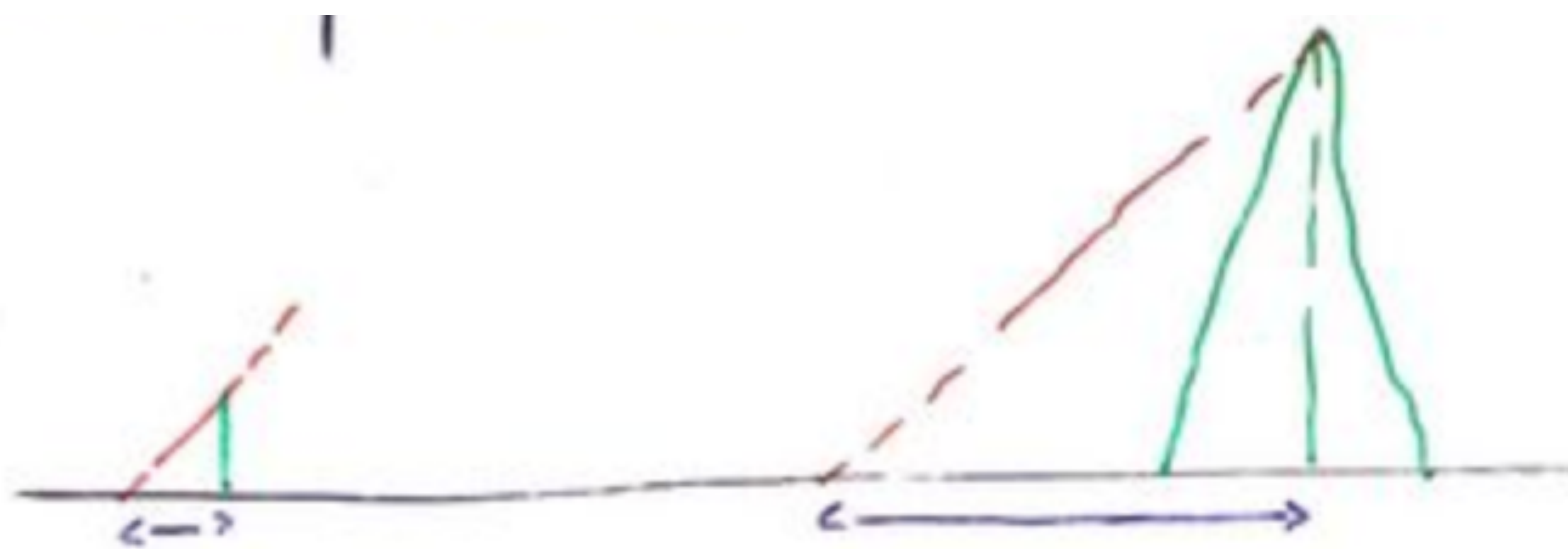


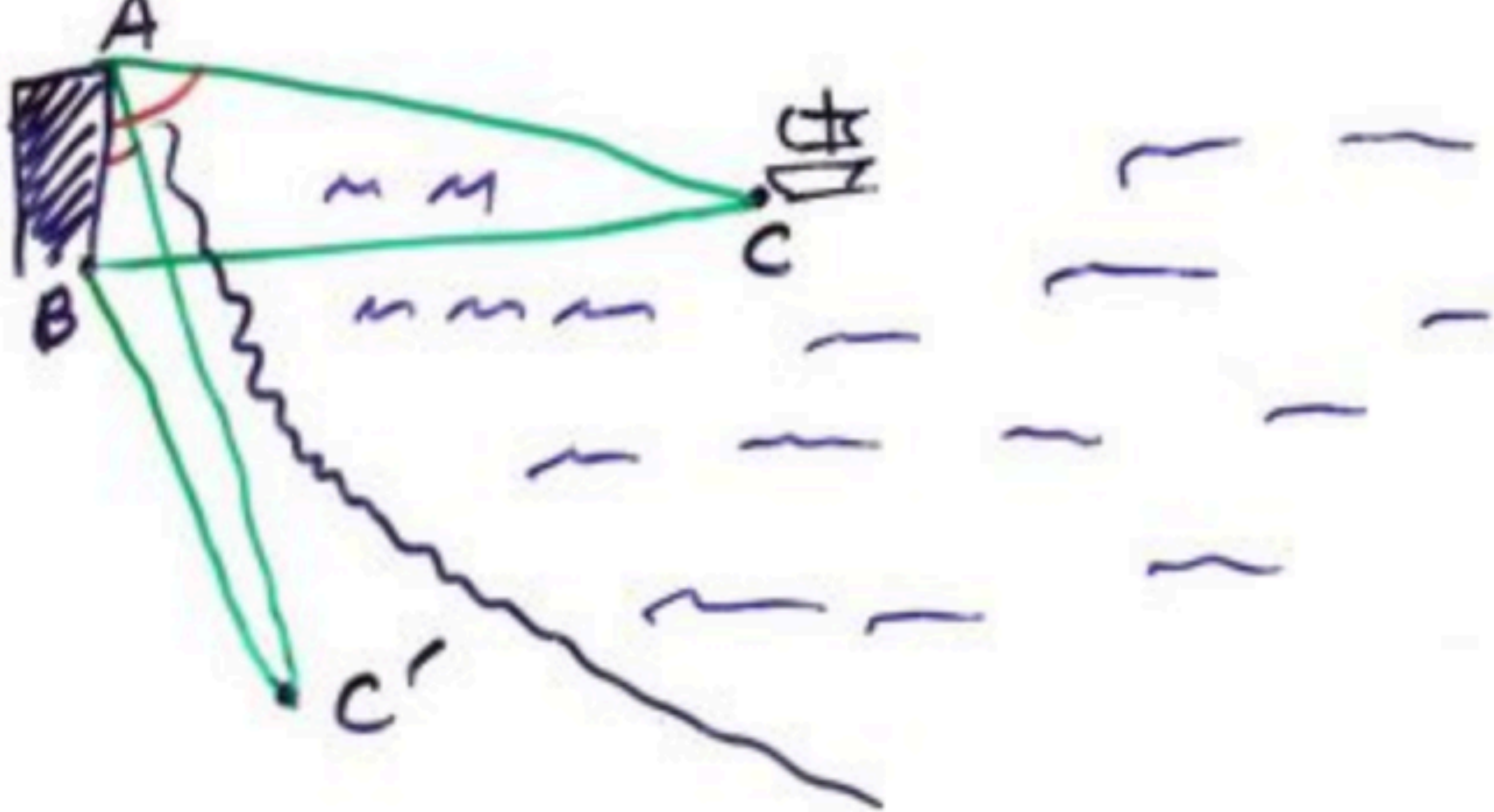
Thales' theorem: $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

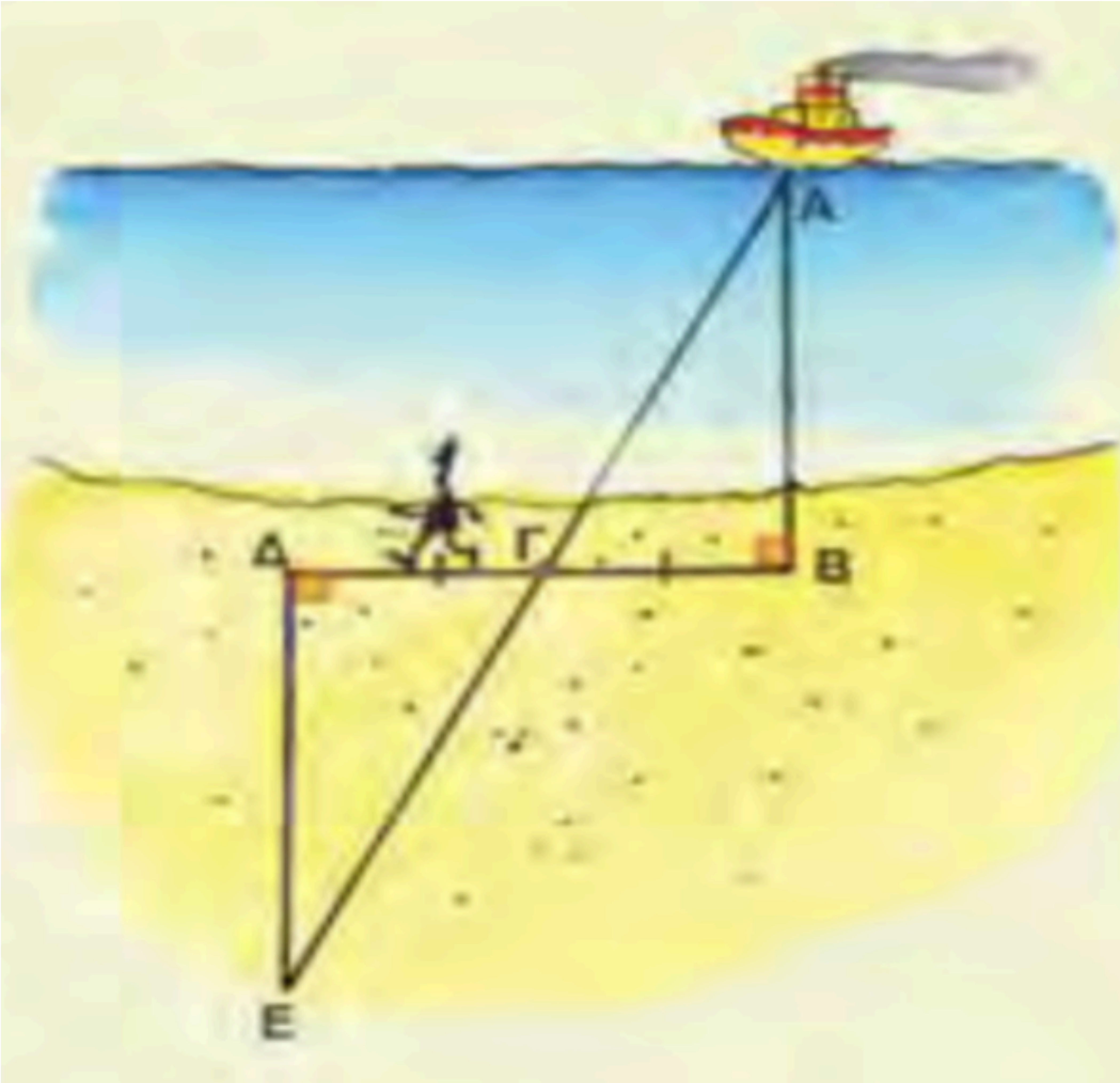


O
A
B


A
B
C



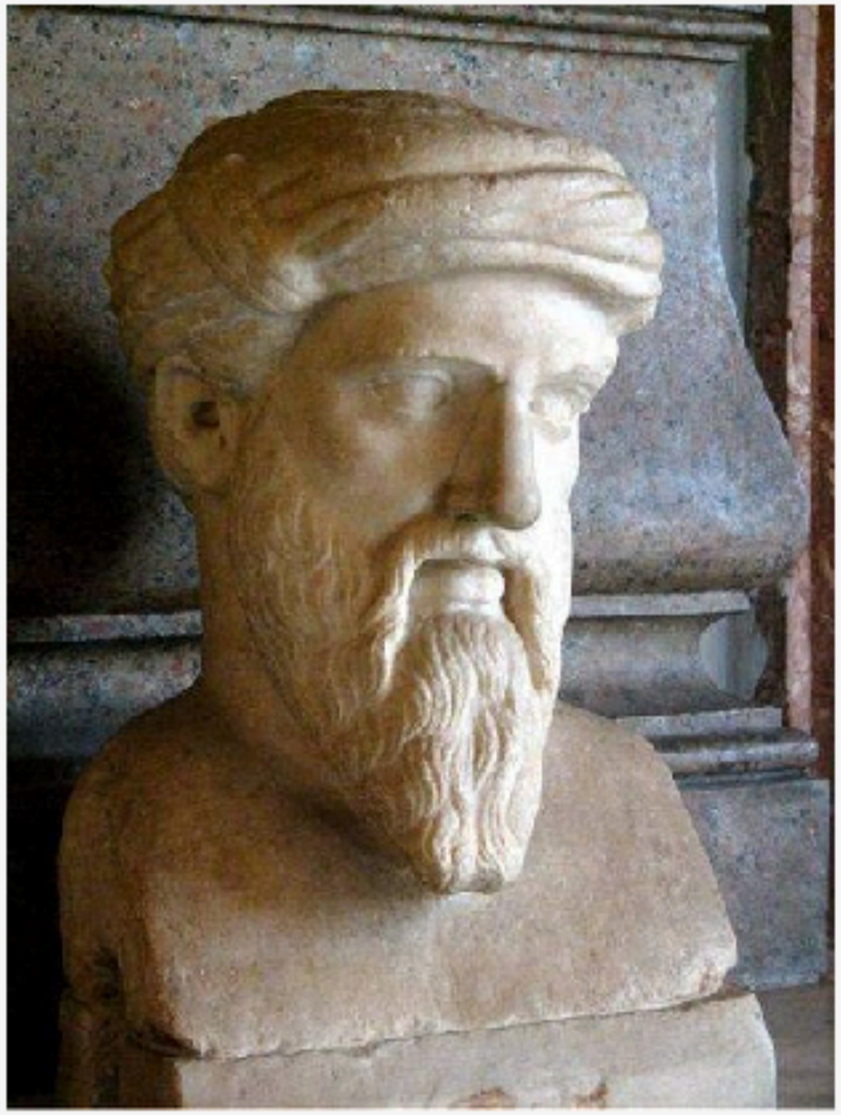

A
B
C
C′



A
Δ
Γ
B
E

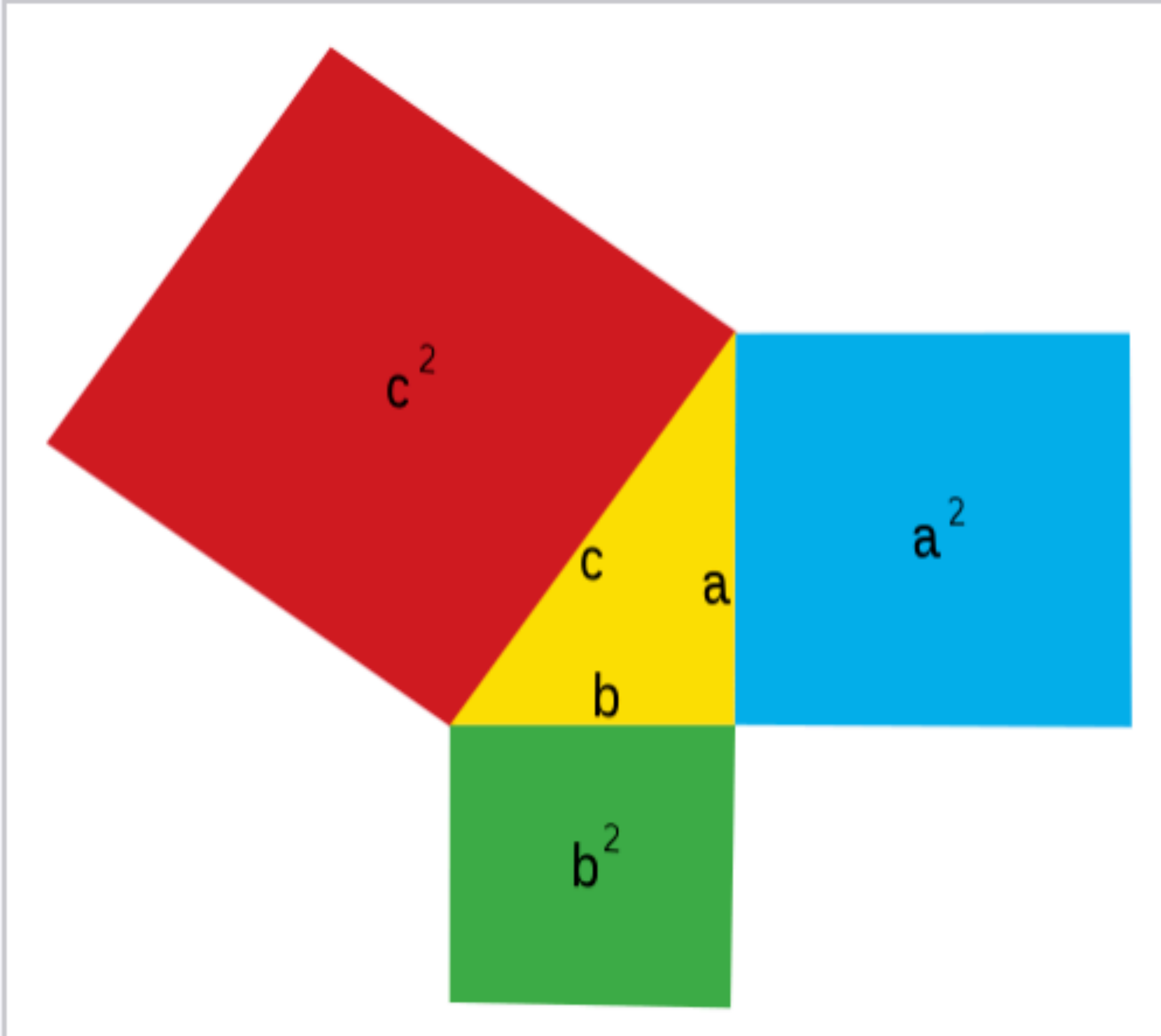
Pitágoras

Pré-socráticos

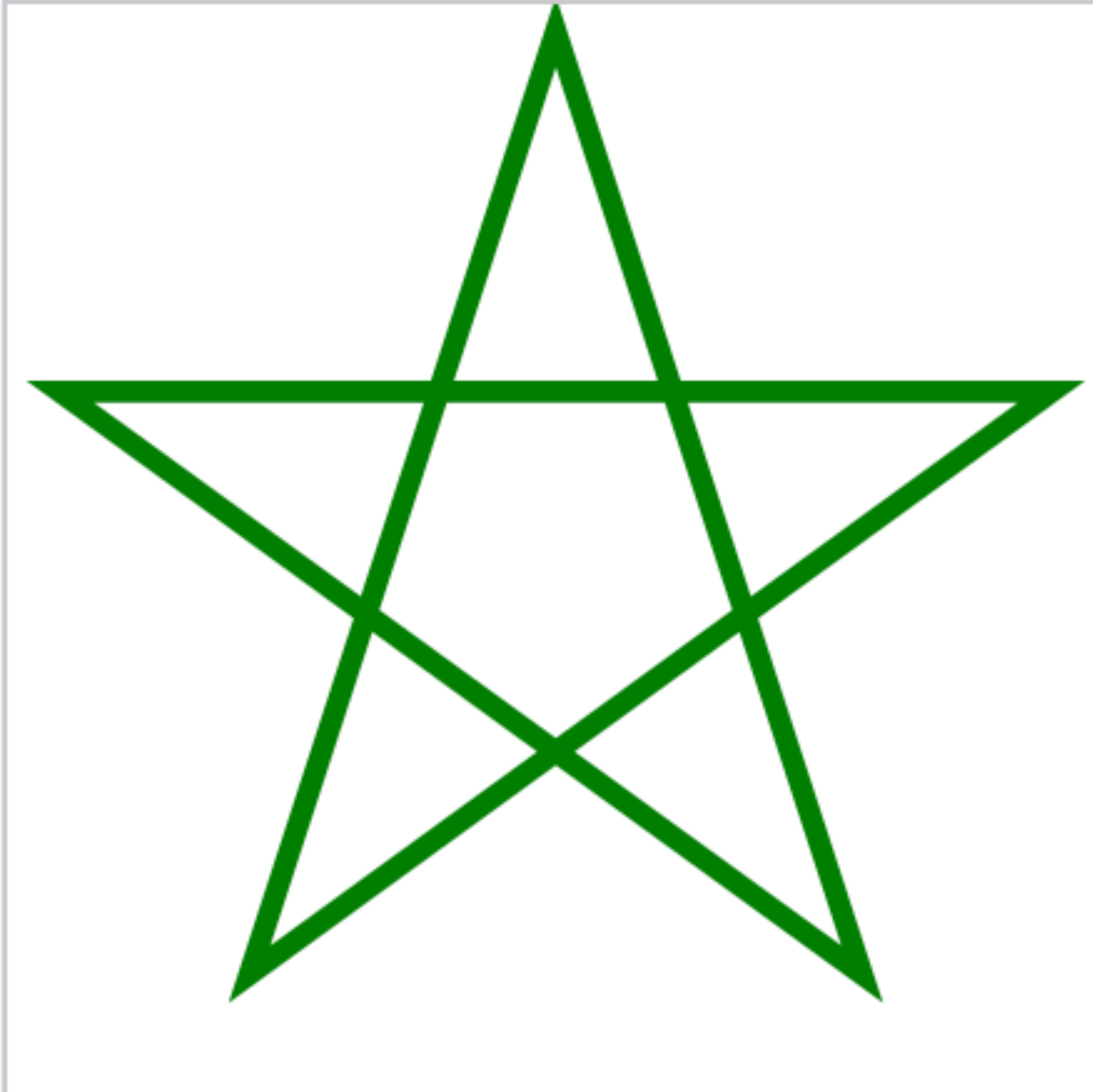


Busto de Pitágoras. Museus Capitolinos (Roma)

Nome completo	Ὁ Πυθαγόρας
Escola/Tradição:	Pitagóricos, Naturalismo, Escola Itálica
Data de nascimento:	ca. 571 a. C. - 570 a. C.
Local:	Samos
Morte	ca. 500 a. C. - 490 a. C.



O teorema de Pitágoras: a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos (*a* e *b*) equivale à área do quadrado construído sobre a hipotenusa (*c*).



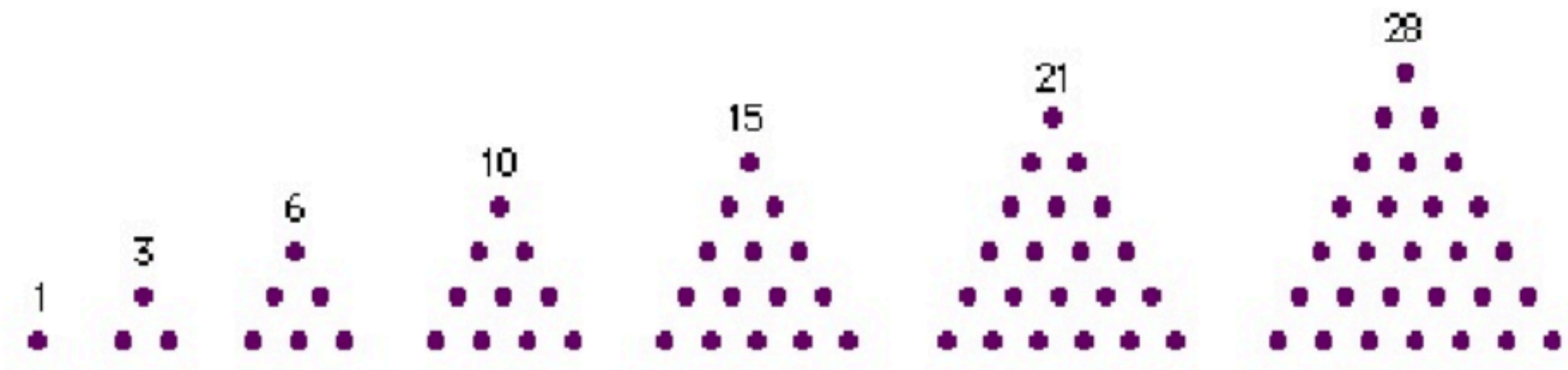
O pentagrama era o símbolo da Escola Pitagórica.

Tudo é número

Quadrívio: Aritmética, Música, Geometria, Astronomia

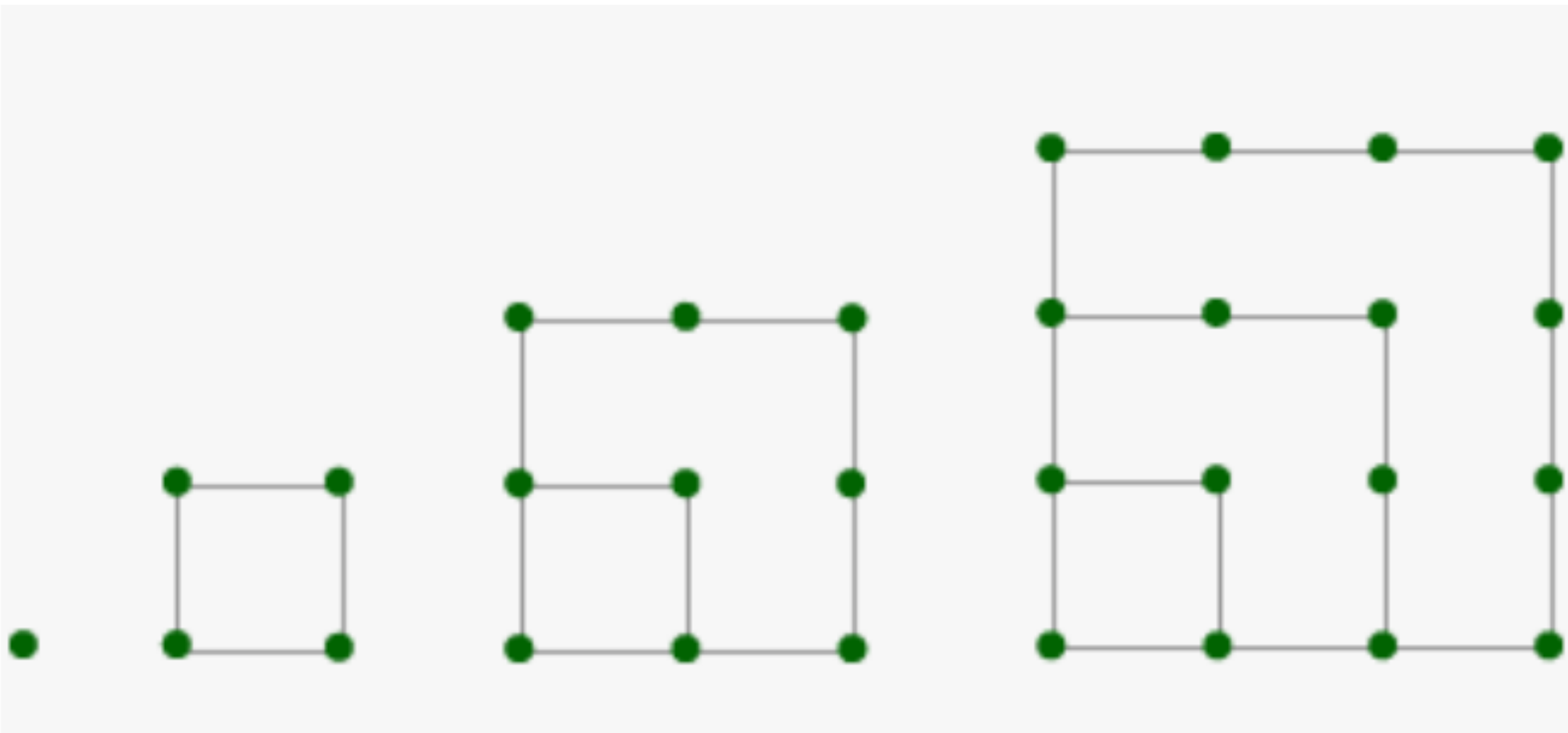
Essencialmente aritmética

Números figurados



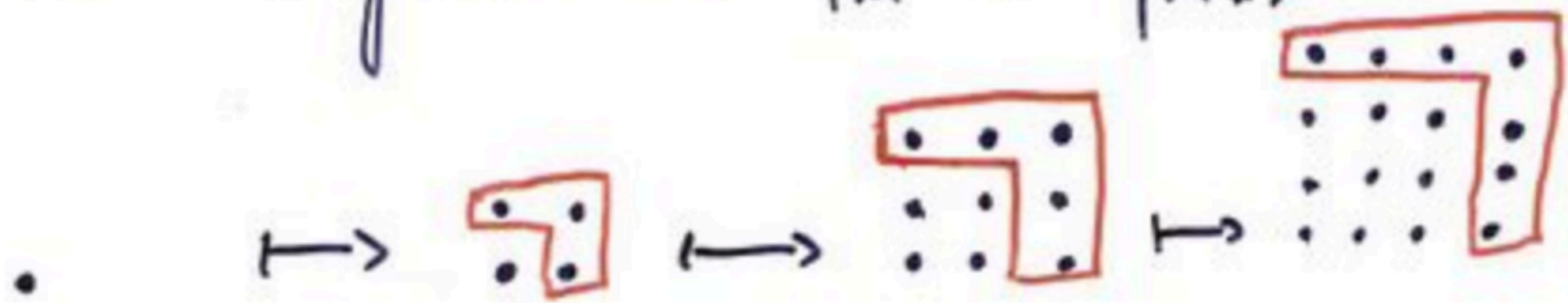
Números triangulares

Números figurados



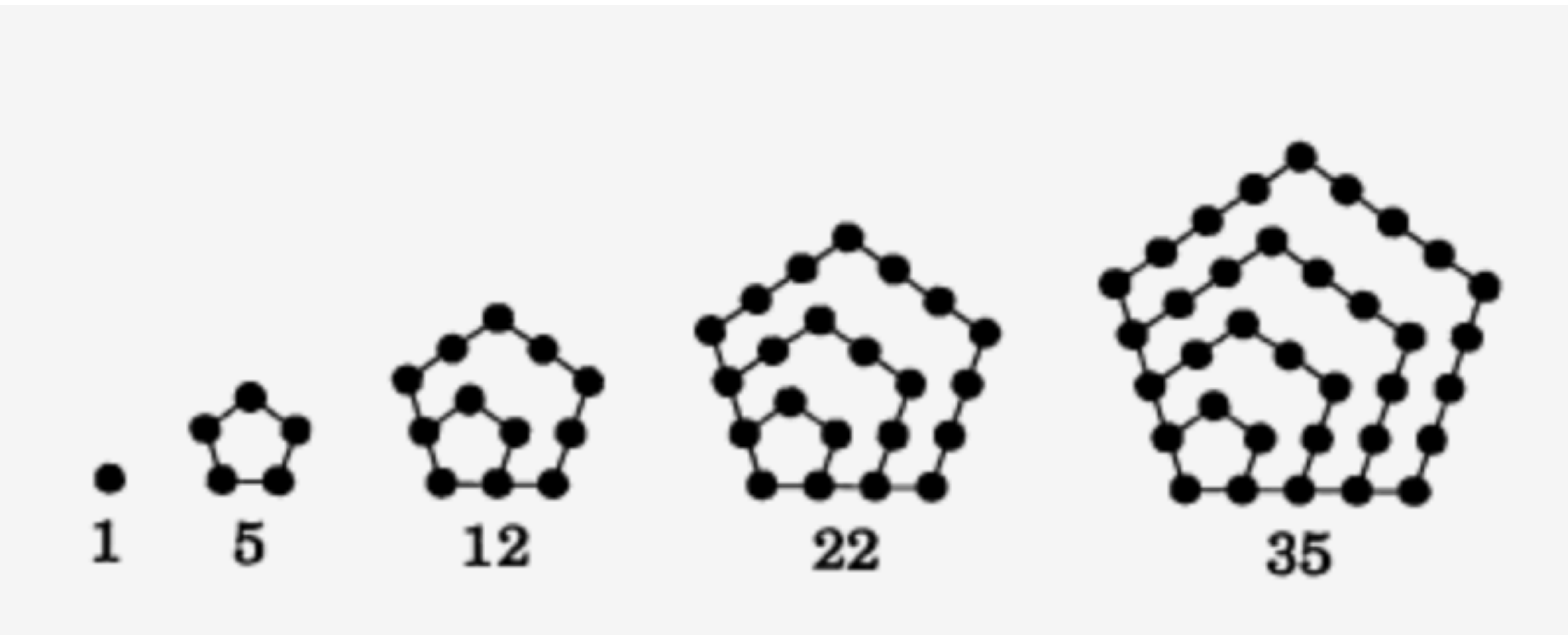
Números quadrados

Come si passa da q_n a q_{n+1}



$$(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

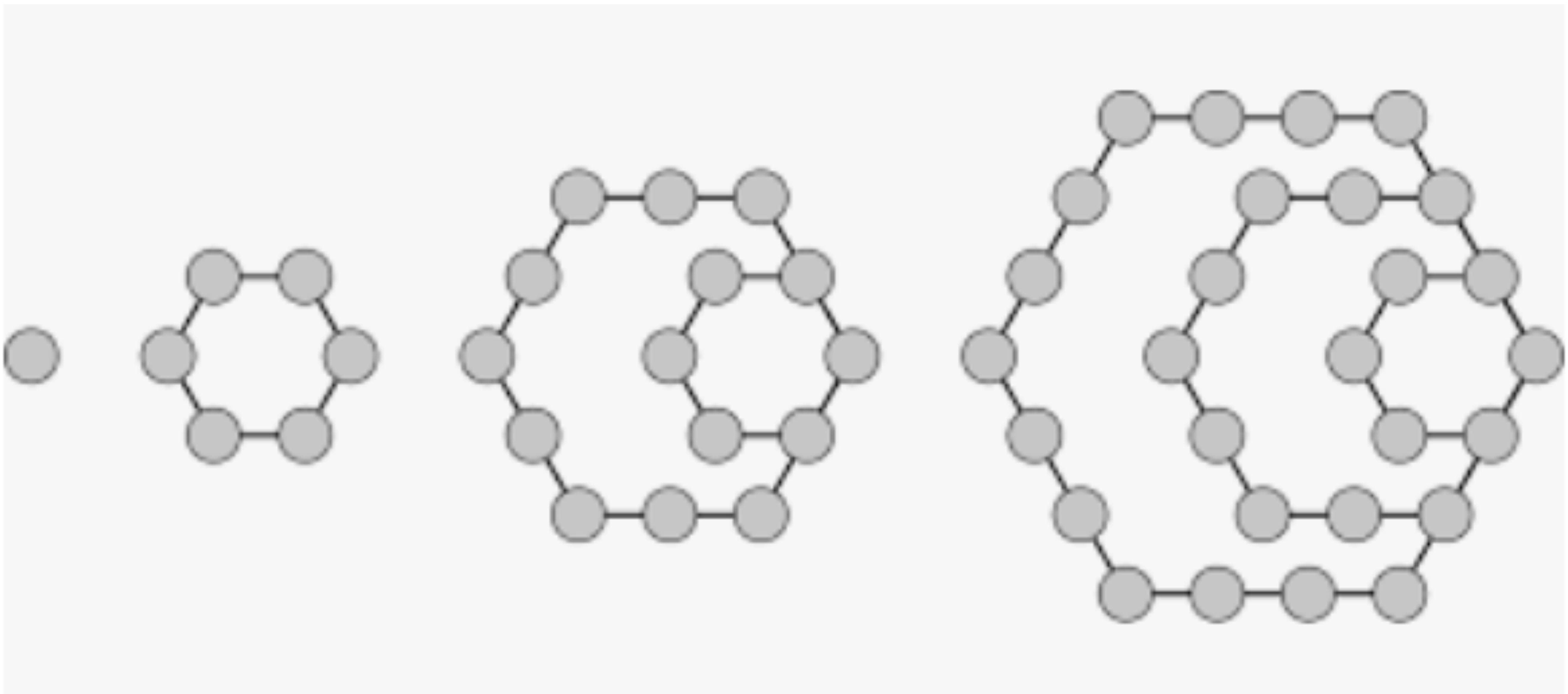
Números figurados



Números pentagonais

1

Números figurados



Números hexagonais

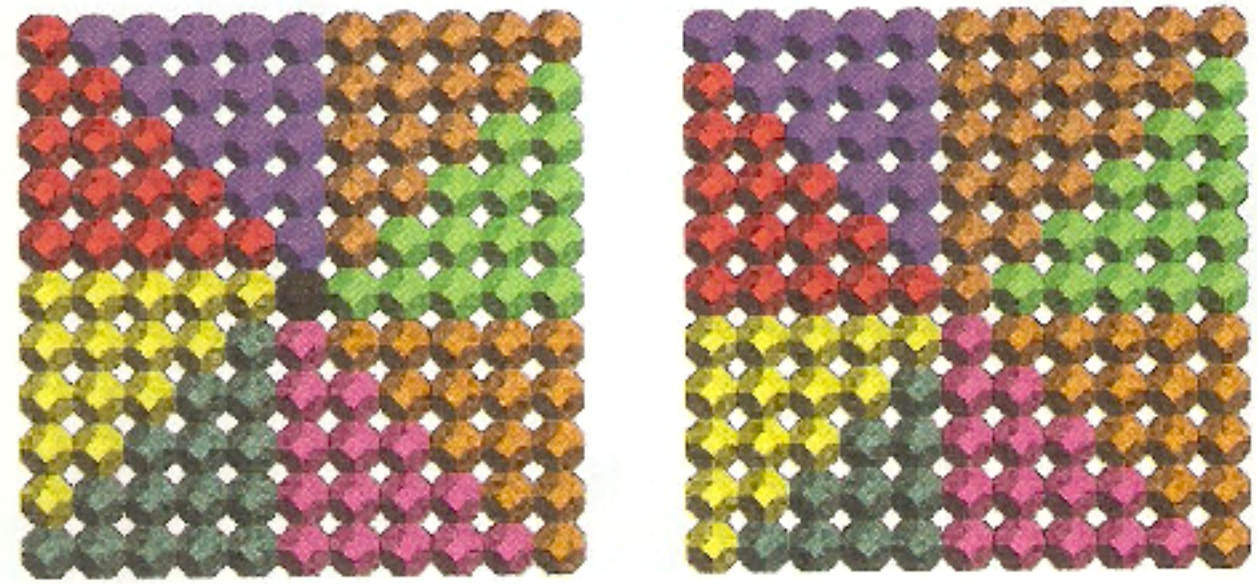


FIGURE 2.23 $(2n + 1)^2 = 8\Delta_n + 1 = \Delta_{n-1} + 6\Delta_n + \Delta_{n+1}$

triangular numbers. Figure 2.23 shows once again that an odd square is congruent to 1 modulo 8.

Which triangular numbers are also squares, for example,

$$0,\ 1,\ 36,\ 1225,\ \ldots\ ?$$

We'll have to wait until we've studied the Pell equation in Chapter 7 before we can answer that question.

The Polygonal Numbers

We obtain the different kinds of polygonal numbers by adding the first n terms of appropriate arithmetic progressions starting with 1, thus:

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$	gives	counting numbers	$1, 2, 3, 4, 5 \cdots$
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots$	gives	triangular numbers	$1, 3, 6, 10, 15 \cdots$
$1 + 3 + 5 + 7 + 11 + \cdots$	gives	square numbers	$1, 4, 9, 16, 25 \cdots$
$1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots$	gives	pentagonal numbers	$1, 5, 12, 22, 35 \cdots$
$1 + 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots$	gives	hexagonal numbers	$1, 6, 15, 28, 45 \cdots$
$1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \cdots$	gives	heptagonal numbers	$1, 7, 18, 34, 55 \cdots$
$1 + 7 + 13 + 19 + 25 + \cdots$	gives	octagonal numbers	$1, 8, 21, 40, 65 \cdots$

Notice that the number of sides in the polygon is *two more* than the common difference: we shall soon see, in Figure 2.24, and also in Chapter 4 on Catalan numbers, that it is two more than the number of triangles that make up the polygon. The third member of each sequence is always divisible by 3, and the fifth member by 5: is the seventh always divisible by 7?

These **polygonal numbers** get their names from arrangements of dots (Figure 2.24), which have been studied at least since the time of Pythagoras (ca. 540 B.C.).

Each sequence in Figure 2.24 can be formed from the row above by adjoining a triangle of Δ_{n-1} blobs of a new color to the left of each polygon. We already know that

$$n + \Delta_{n-1} = \Delta_n, \text{ the } n\text{th } \textbf{triangular number}, \text{ and that}$$
$$\Delta_n + \Delta_{n-1} = n + 2\Delta_{n-1} = n^2, \text{ the } n\text{th } \textbf{square}, \text{ and this continues:}$$
$$n^2 + \Delta_{n-1} = n + 3\Delta_{n-1} = \frac{1}{2}n(3n-1), \text{ the } n\text{th } \textbf{pentagonal number},$$
$$n + 4\Delta_{n-1} = n(2n-1), \text{ the } n\text{th } \textbf{hexagonal number},$$

$$p - Poligono_n = n + (p-2)\Delta_{n-1}$$

and so on.

The p-sided polygonal number with n blobs in each side is

$$n + (p-2)\Delta_{n-1} = \frac{1}{2}pn(n-1) - n(n-2).$$

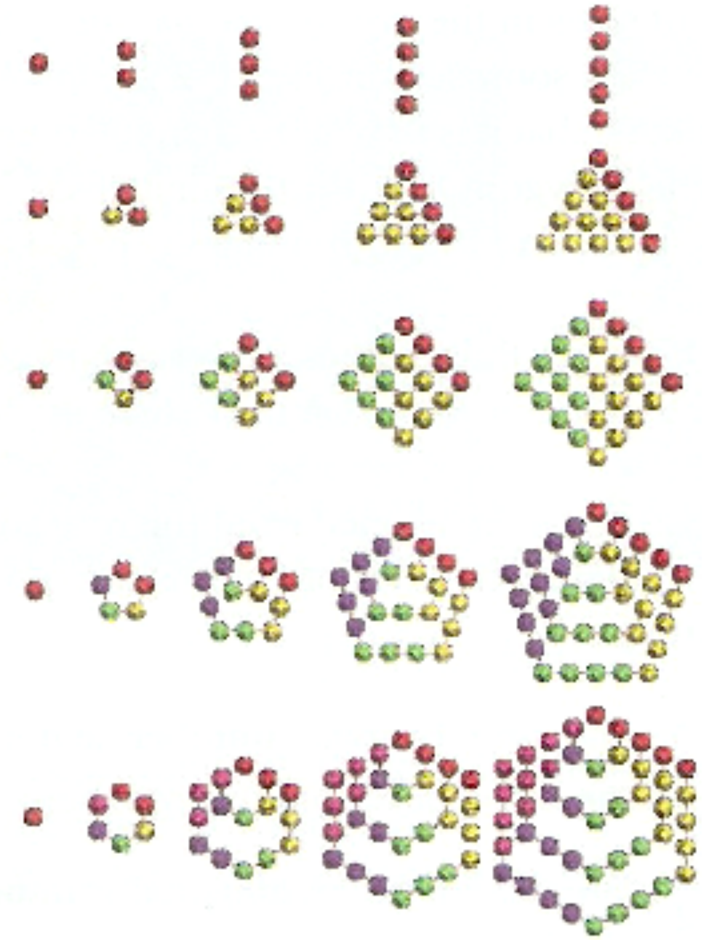
For example, the nth hexagonal number is

$$n + 4\Delta_{n-1} = \Delta_n + 3\Delta_{n-1},$$

as you can see from Figure 2.25, which also shows (compare Figure 2.22) that

$$\boxed{\text{Every hexagonal number is a triangular number.}}$$

In fact, just the odd-sided triangular numbers give hexagonal num-



/4

FIGURE 2.24 *Building polygonal numbers in two different ways. Adding gnomons (move from left to right in each row) increases the number of blobs in a side. Adding triangles (read down the page in each column) increases the number of sides: yellow makes triangles; green makes squares; blue makes pentagons; and violet makes hexagons.*

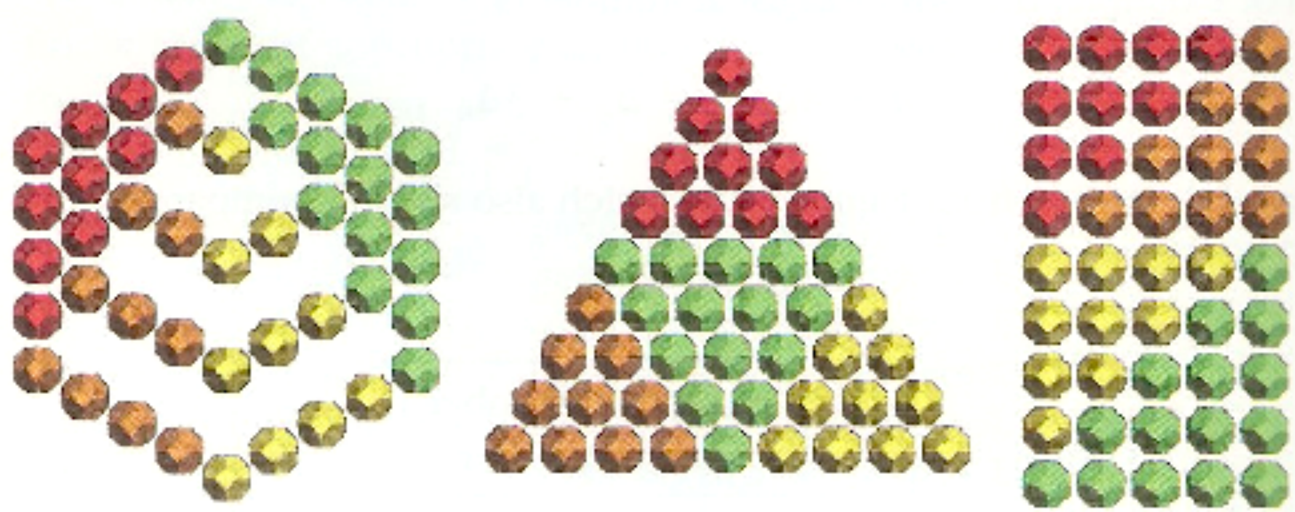


FIGURE 2.25 *The nth hexagonal number* $= 3\Delta_{n-1} + \Delta_n = \Delta_{2n-1} = n(2n-1)$.

Número poligonal com *3* lados e *n* pontos em cada lado:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Número poligonal com *p* lados e *n* pontos em cada lado:

$$n + (p-2)t_{n-1}$$

$$H_{10} = 10 + 4\triangle_9 = 10 + 4 \times \frac{9 \times 10}{2} = 190$$

Primos são que só formam rectângulo trivial

Planos (ou compostos) são os outros

$5 = 5 \times 1$

$6 = 2 \times 3$

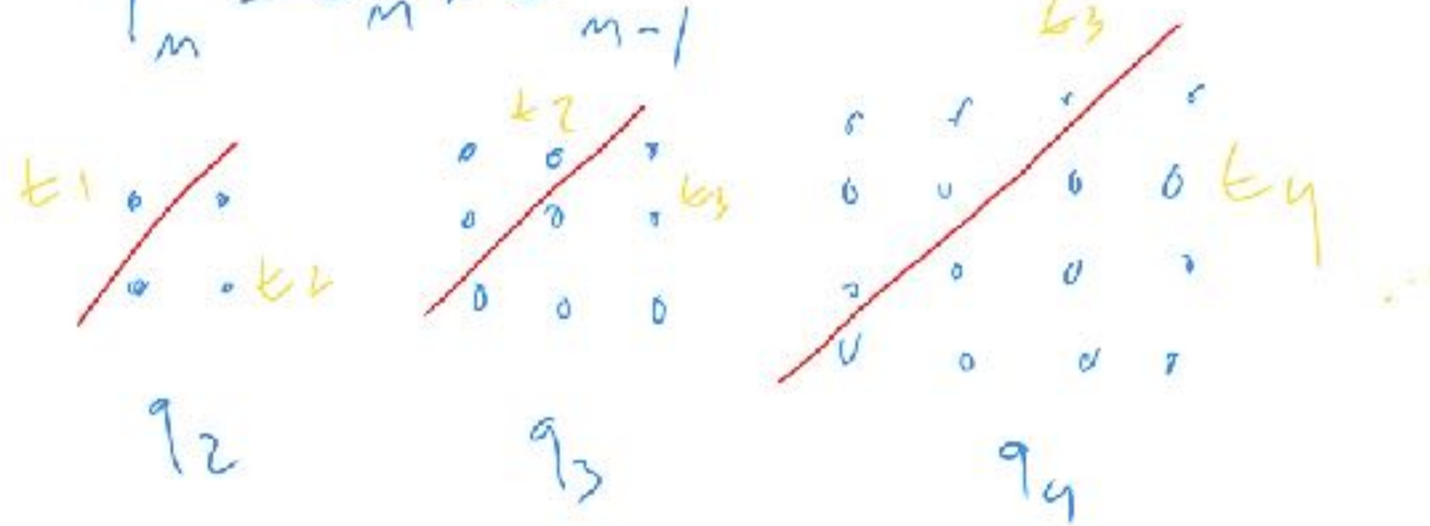
$$q_n = t_n + t_{n-1} \quad (n>1)$$

$q_2 = t_2 + t_1$

$q_3 = t_3 + t_2$

$q_4 = t_4 + t_3$

$$q_n = t_n + t_{n-1}$$



$$t_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$
\begin{array}{r}
1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
+ \quad n + n-1 + n-2 + \cdots + 1 \\
\hline
\underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n}
\end{array}
$$

$$\parallel$$

$$n(n+1)$$

Ternos pitagóricos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2$$

logo, já temos duas parcelas que são quadrados perfeitos. Falta garantir que a outra também é...

vamos fazer

$$2m + 1 = n^2$$

resolver em ordem a ***m*** e substituir em

$$m^2 + (2m + 1) = (m + 1)^2$$

obtemos...

$$n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$$

(funciona bem para ***n*** ímpar)

Dado quadrado de lado ***m***, obtém o de lado ***m+1*** juntando ***2m+1*** pontos, e obtém-se o quadrado de lado ***m-1***, tirando ***2m-1***.

Como ***(2m+1)+(2m-1) = 4m***, temos

$$4m + (m-1)^2 = (m+1)^2$$

só falta garantir que ***4m*** é um quadrado perfeito...

fazendo

$$m = n^2$$

em

$$4m + (m-1)^2 = (m+1)^2$$

vem

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2$$

Divisibilidade e ***mdc***

$a|b$ ("a divide b", "a é divisor de b", "b é múltiplo de a", "a é submúltiplo de b") se existe q tal que $b=aq$.

Se $a>b$ então os divisores comuns de a e b são os mesmos de $a-b$ e b.

Prova:

$d|a$ e $d|b \dashrightarrow d|(a-b)$

e, por outro lado,

$d|(a-b)$ e $d|b \dashrightarrow d|a$

Antifairese ou subtracção recíproca ou Algoritmo de Euclides

Máximo Divisor Comum de $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ é denotado por $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$

Acabámos de ver que, se $\boldsymbol{m>n}$**,** se tem

$$(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{m-n},\boldsymbol{n})$$

Para determinar $(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$, usa-se esta propriedade várias vezes, até termos um par de números iguais.

Claro que $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$

Exemplo

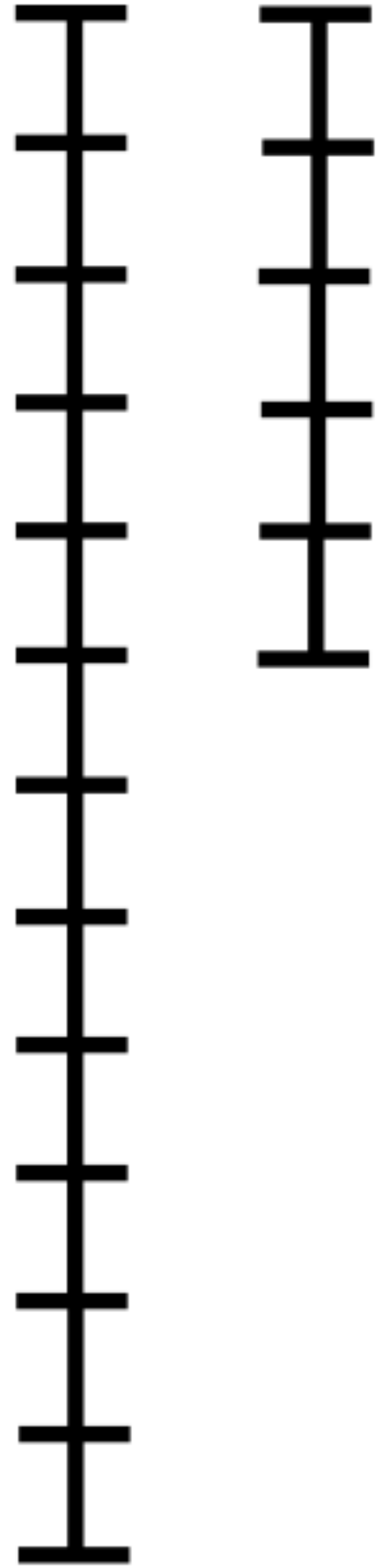
$$(54,12)=(42,12)=(30,12)=(18,12)=(6,12)=(6,6)=6$$

$$(21,34)=(21,13)=(8,13)=(8,5)=(3,5)=(3,2)=(1,2)=(1,1)=1$$

Processo **sempre finito**, porque não há cadeias infinitas descendentes nos números naturais.

Dois números naturais são sempre múltiplos de um número comum.

Como ***tudo é número***, dadas duas grandezas da mesma espécie, elas terão um submúltiplo comum.



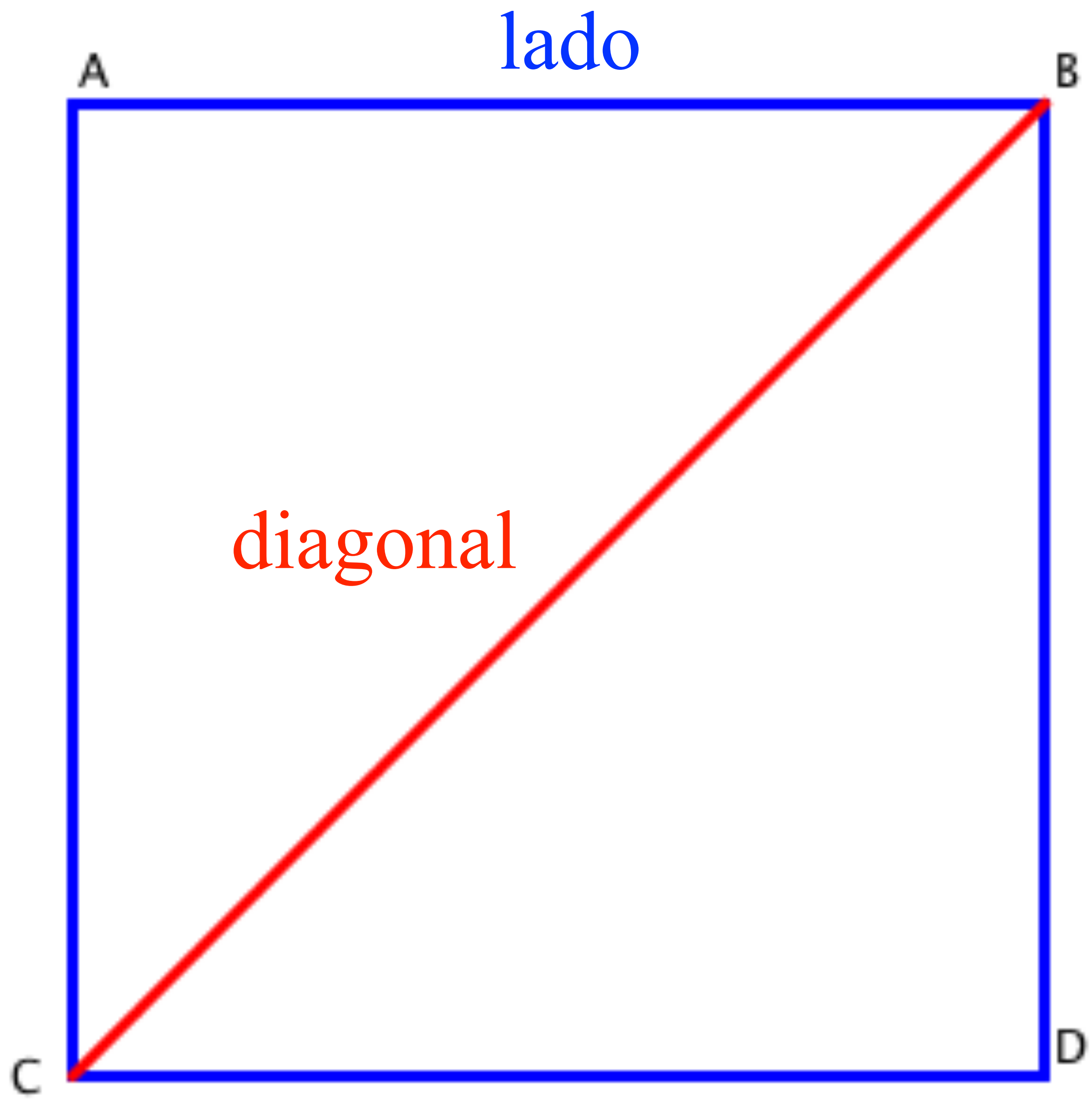
Comensurabilidade

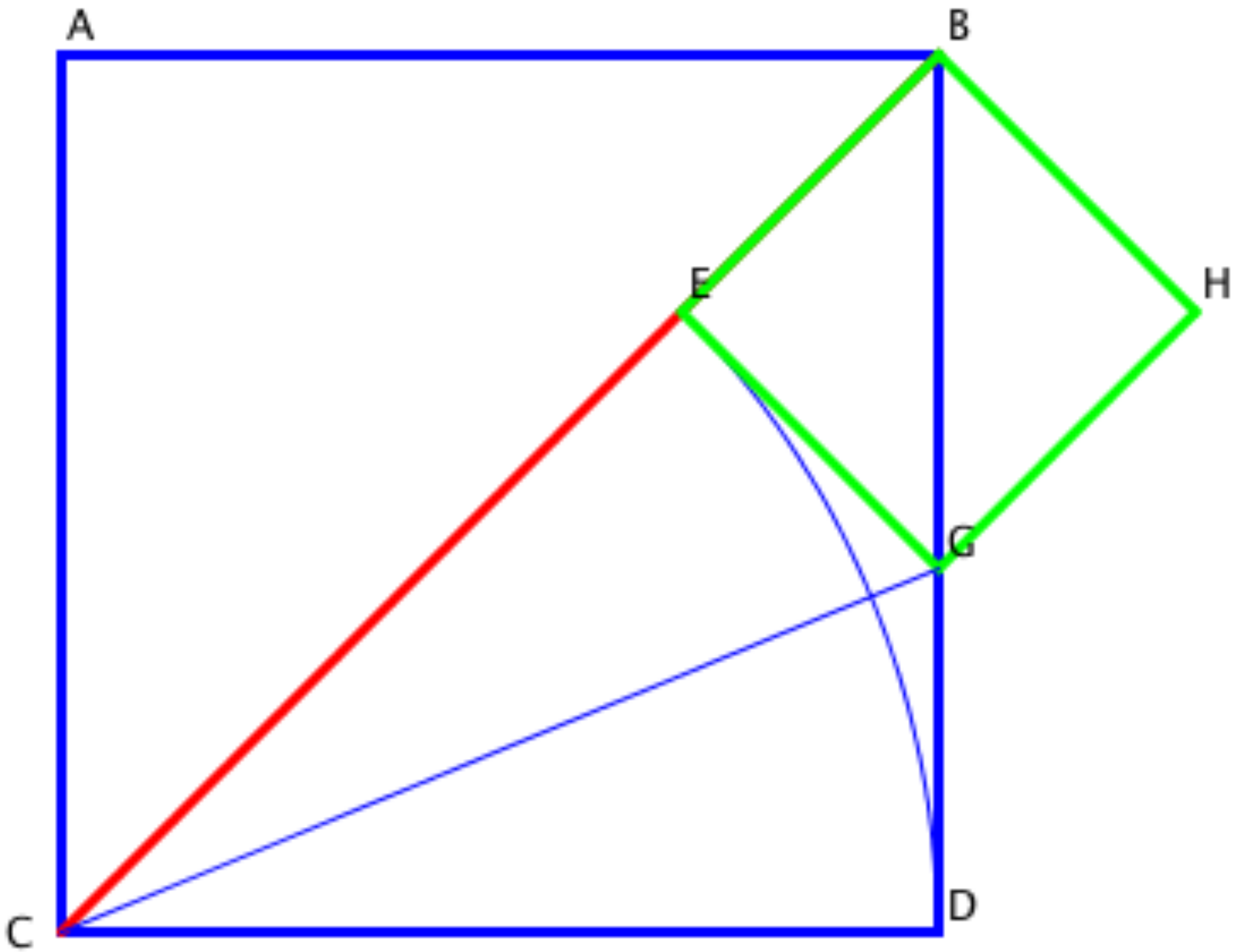
Dois números são sempre comensuráveis porque têm ***mdc***.

Duas grandezas da mesma espécie, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, são comensuráveis se existir uma outra grandeza da mesma espécie, $\boldsymbol{C}$, tal que $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são ambas múltiplos de $\boldsymbol{C}$: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{mC}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{nC}$.

Portanto duas grandezas são sempre comensuráveis...

Nota: neste caso tem-se $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{B} = \boldsymbol{m}/\boldsymbol{n}$


lado
A
B
diagonal
C
D



EG perp CB

CE=CD=lado

EB=diagonal-lado

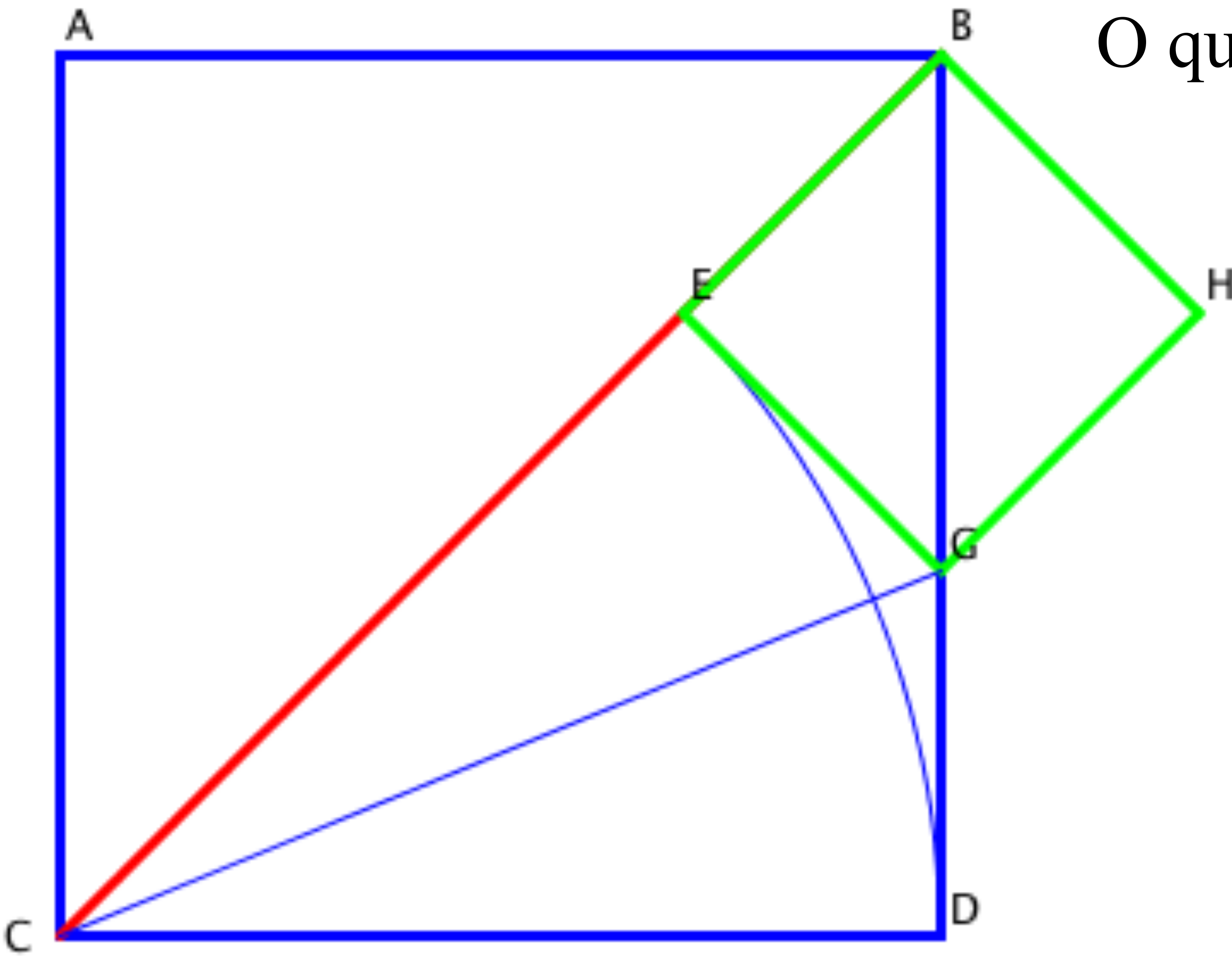
CBD=BGE (meio recto)

EB=EG (tri. iso)

EG=GD (tg por pto)

EB=GD

BG=lado-(diagonal-lado)=2 x lado-diagonal



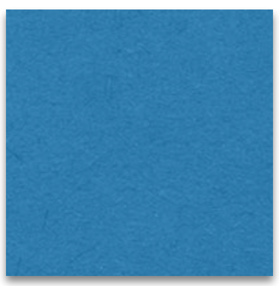
O quadrado EBHG tem lado

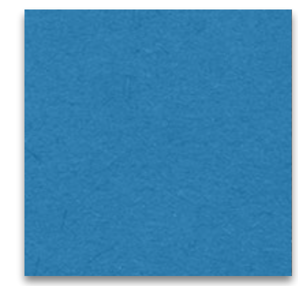
diagonal - lado

e a sua diagonal é

2 x lado - diagonal

$$(d, l) \mapsto (d - l, l) \mapsto (d - l, 2l - d)$$

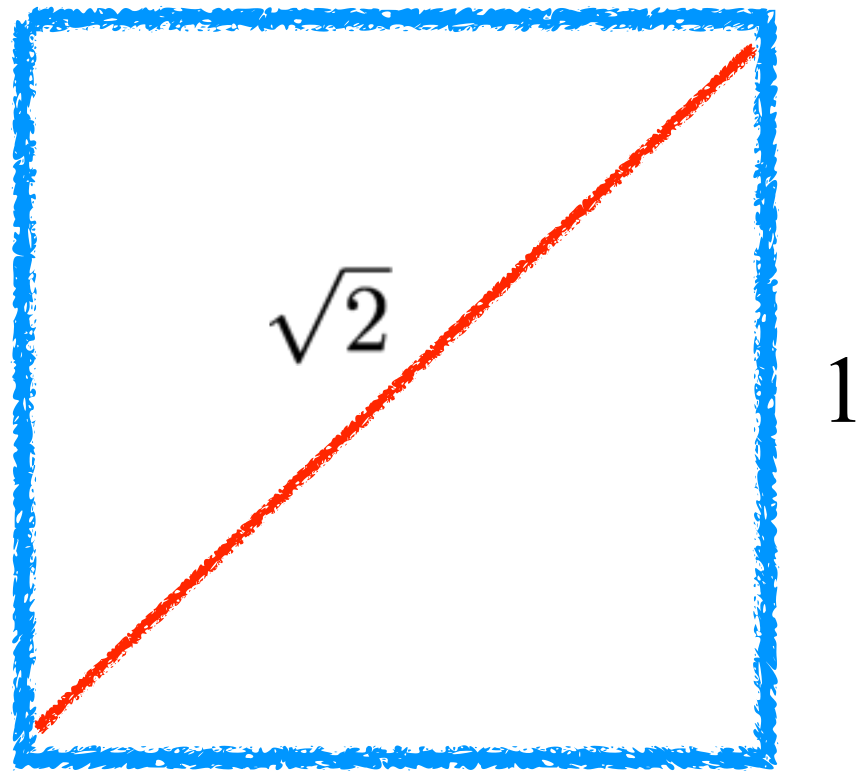




Partimos de um quadrado e, após duas iteradas, temos um quadrado!

O Algoritmo de Euclides não pode terminar!...

A diagonal e o lado de um quadrado nunca são comensuráveis!



$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Prova directa:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad (m,n) = 1$$

$$2n^2 = m^2$$

m^2 par e, portanto, m par

$$m = 2k$$

$$2n^2 = 4k^2$$

n^2 par e, portanto, n par

$$\Rightarrow\Leftarrow$$

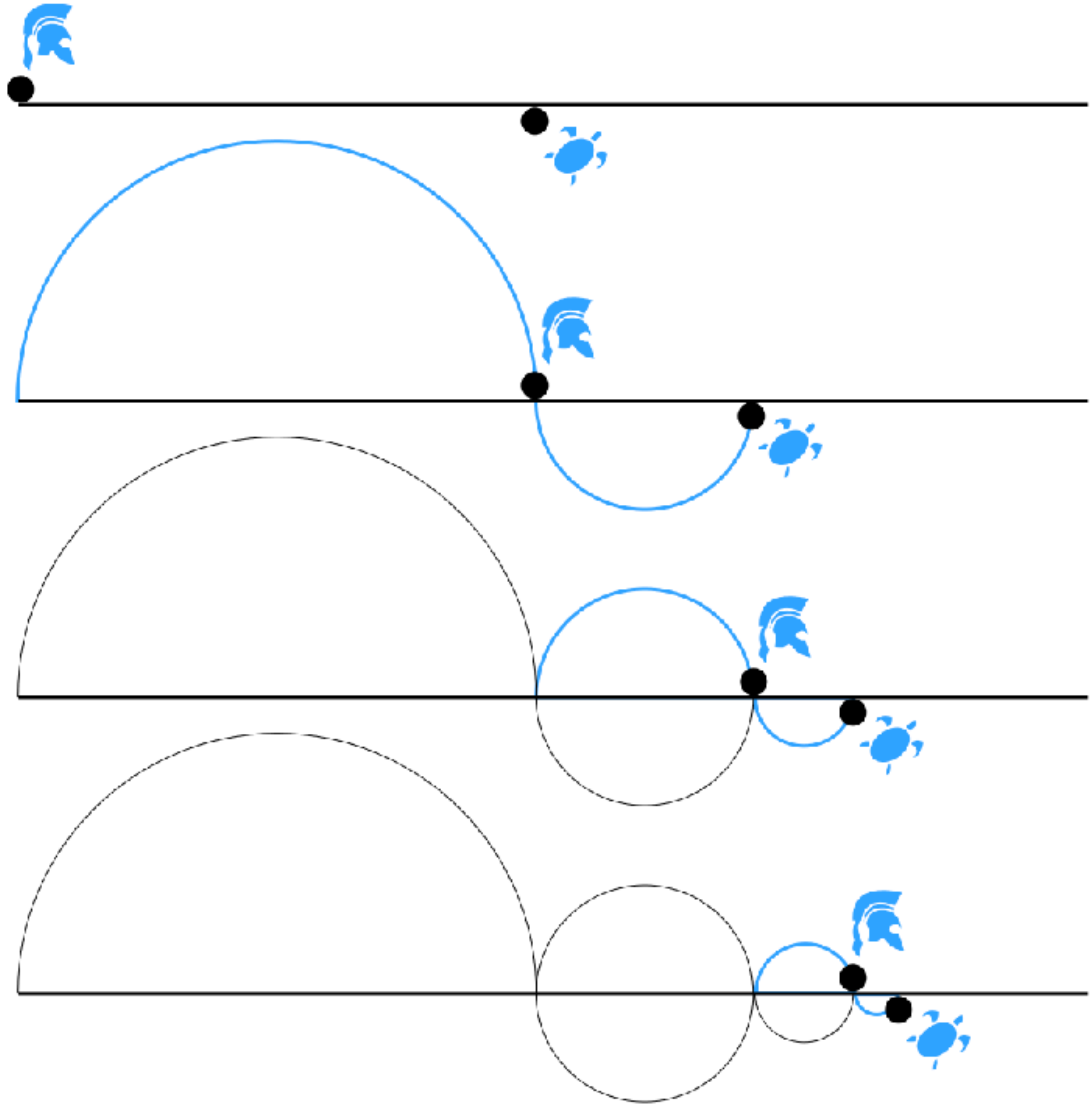
Afinal, concluíram, os números e as grandezas não se podem abordar da mesma forma...

A Matemática grega evoluiu, a partir deste momento, usando métodos diferentes na Geometria e na Aritmética

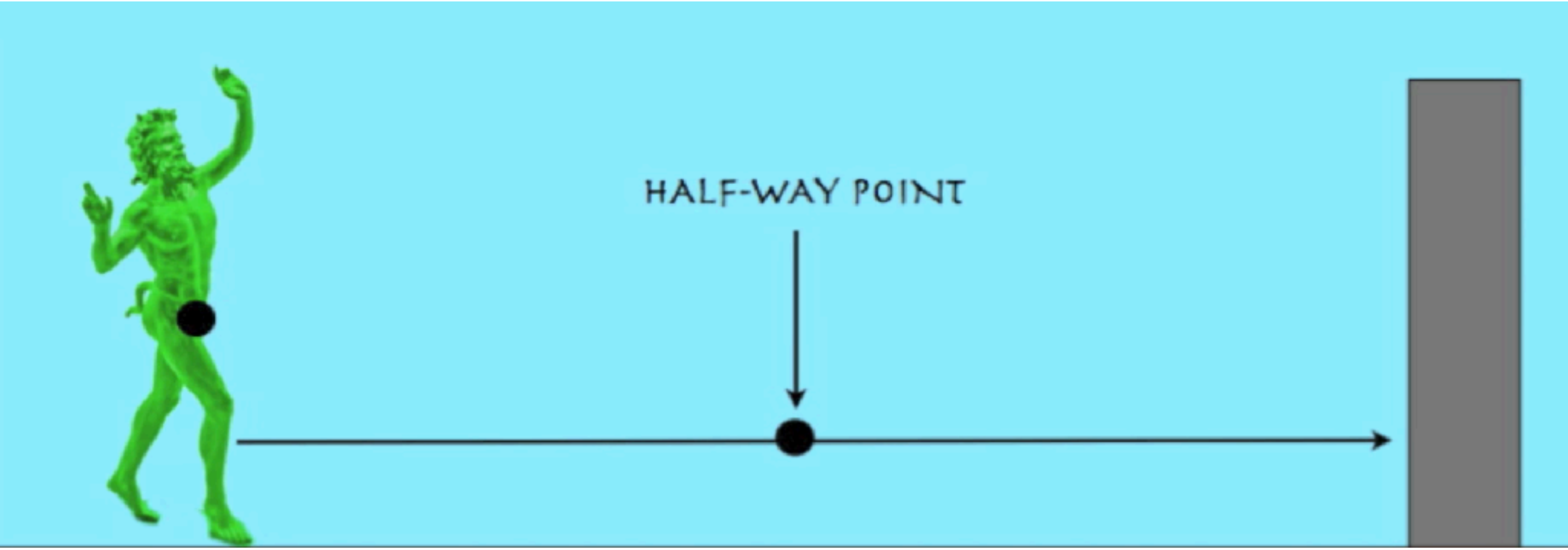
Zenão
(~490aC-430aC)

Aquiles e a tartaruga

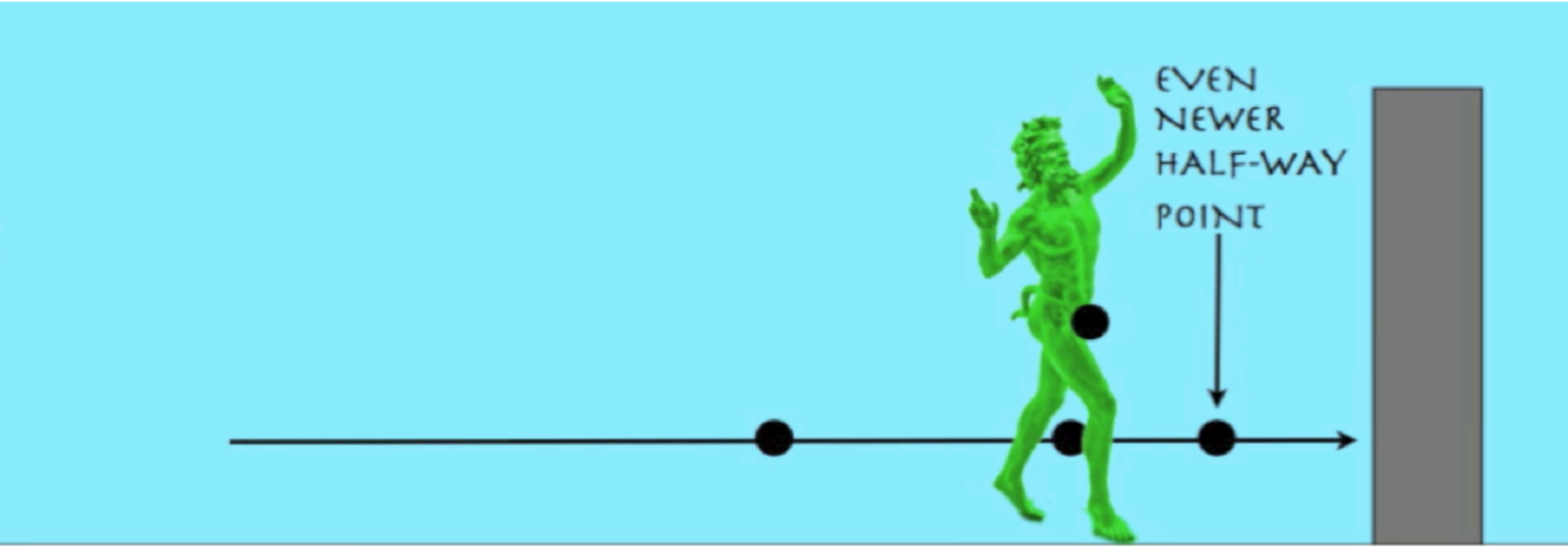

1, ACHILLES & THE TORTOISE

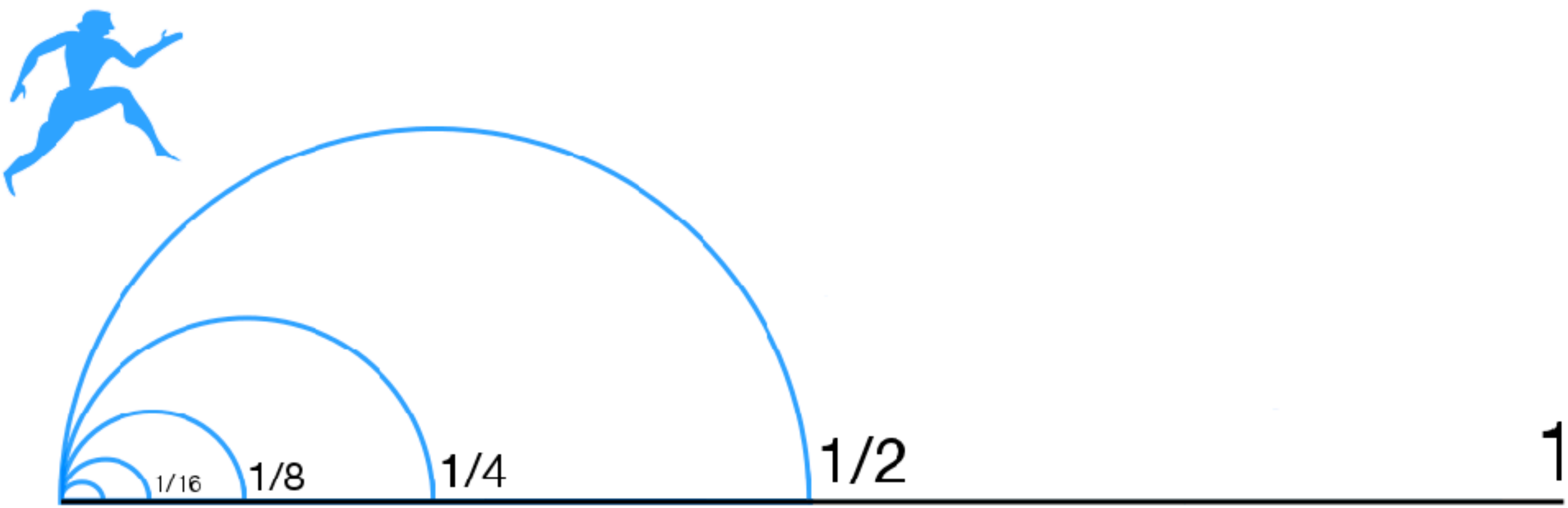


Dicotomia

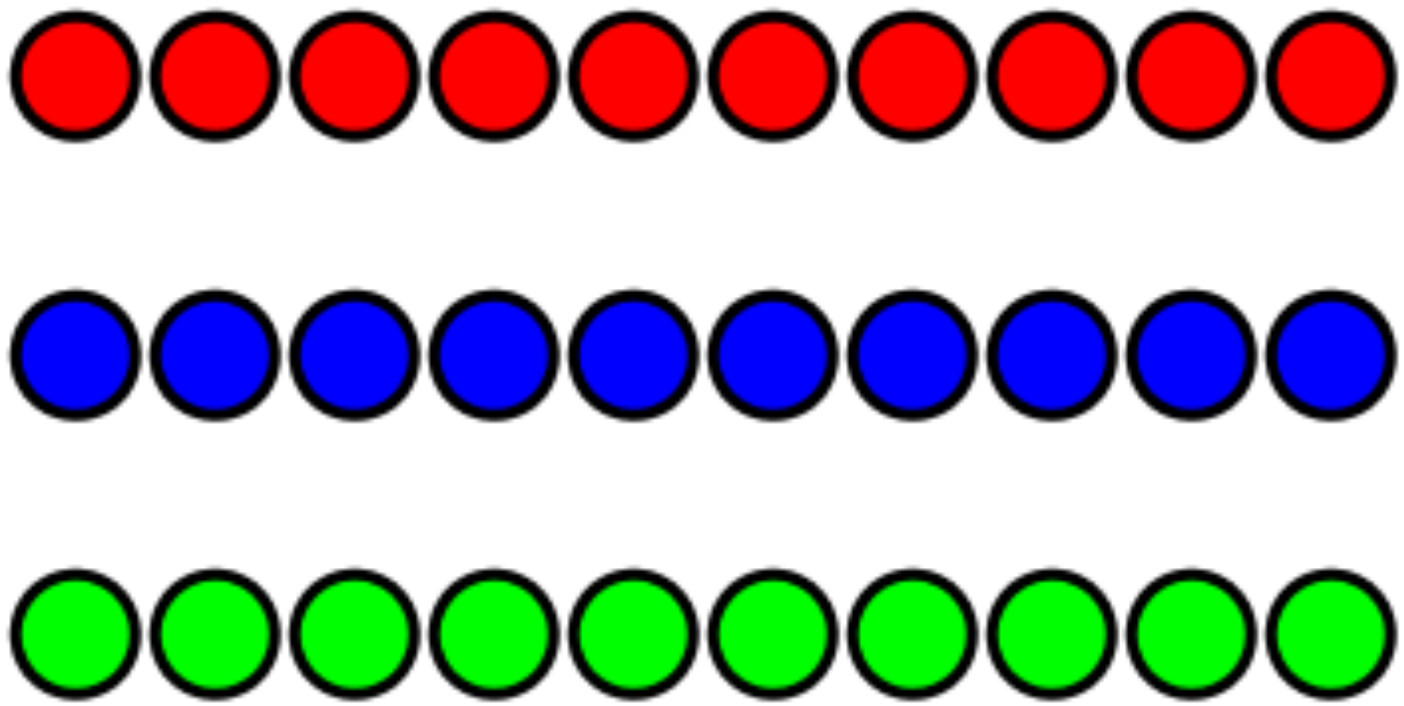

HALF-WAY POINT


NEW HALF-WAY POINT

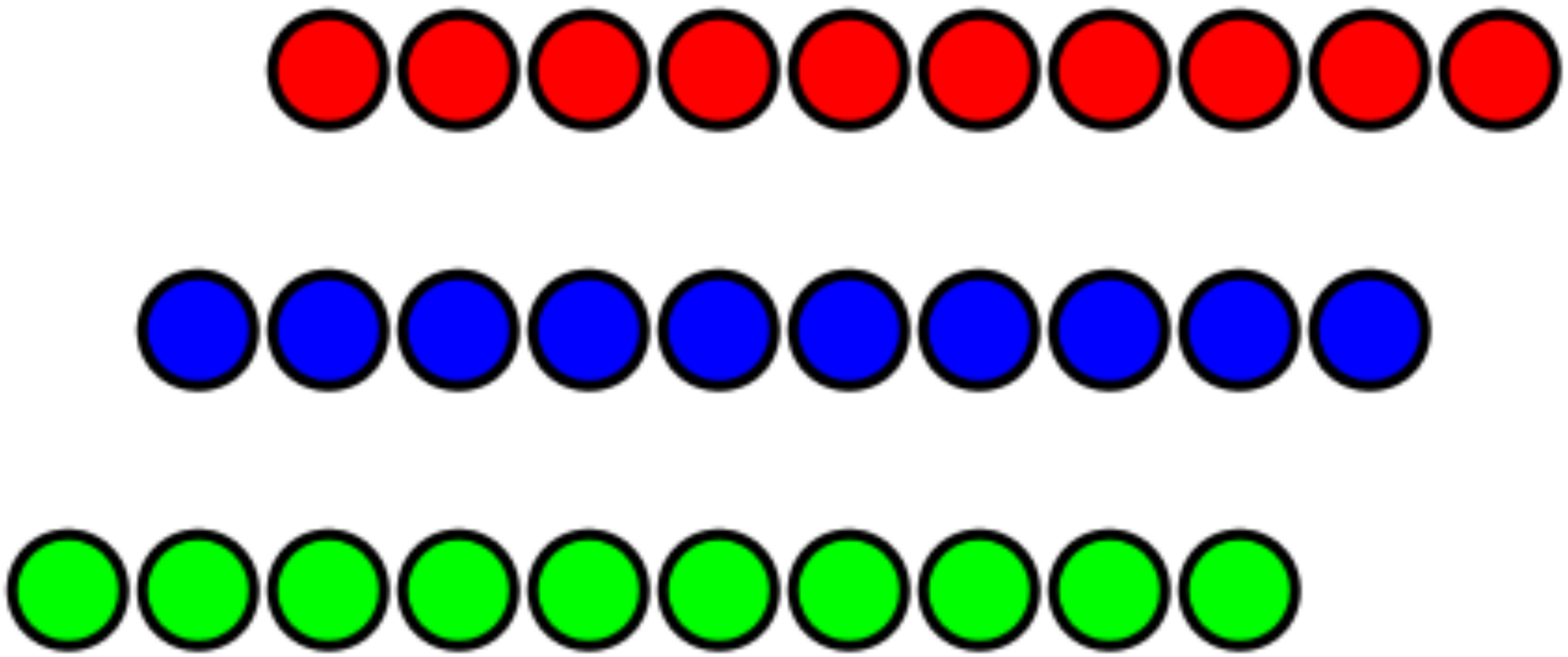

EVEN
NEWER
HALF-WAY
POINT

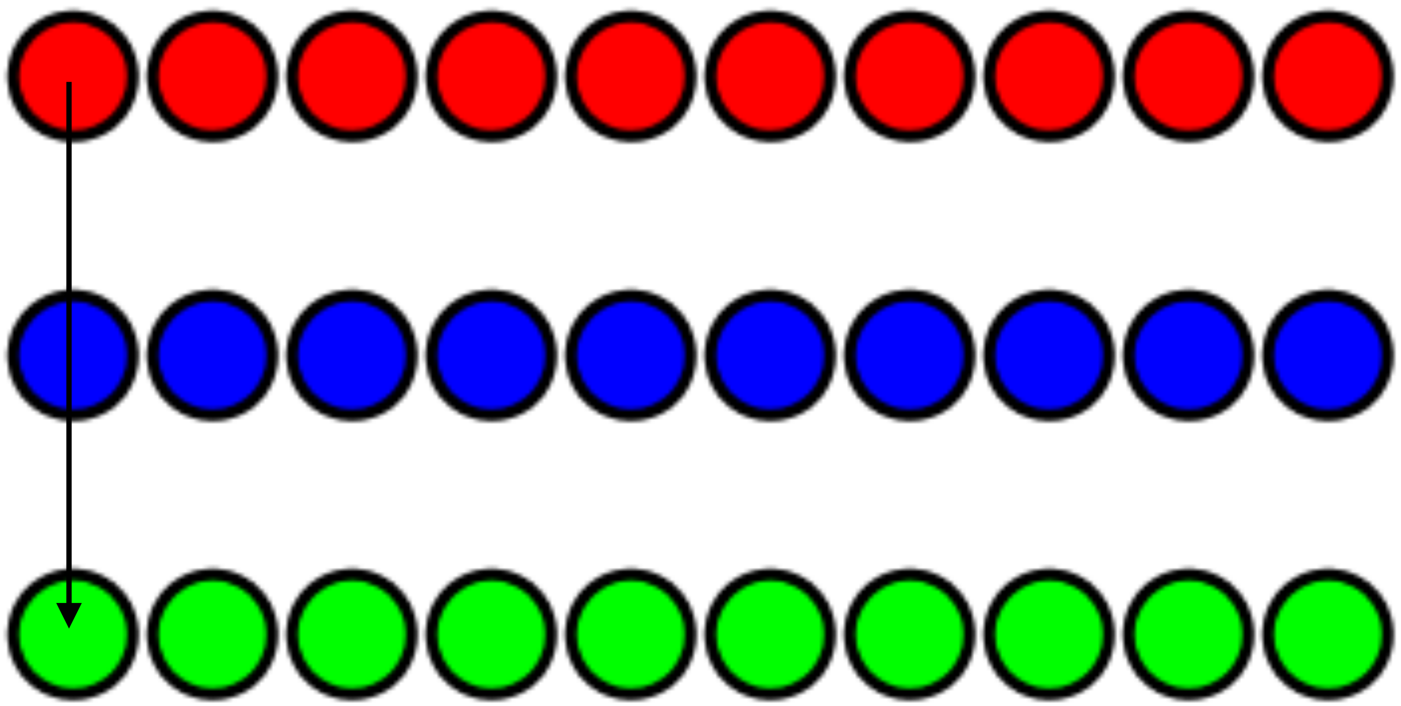

1/16
1/8
1/4
1/2
1

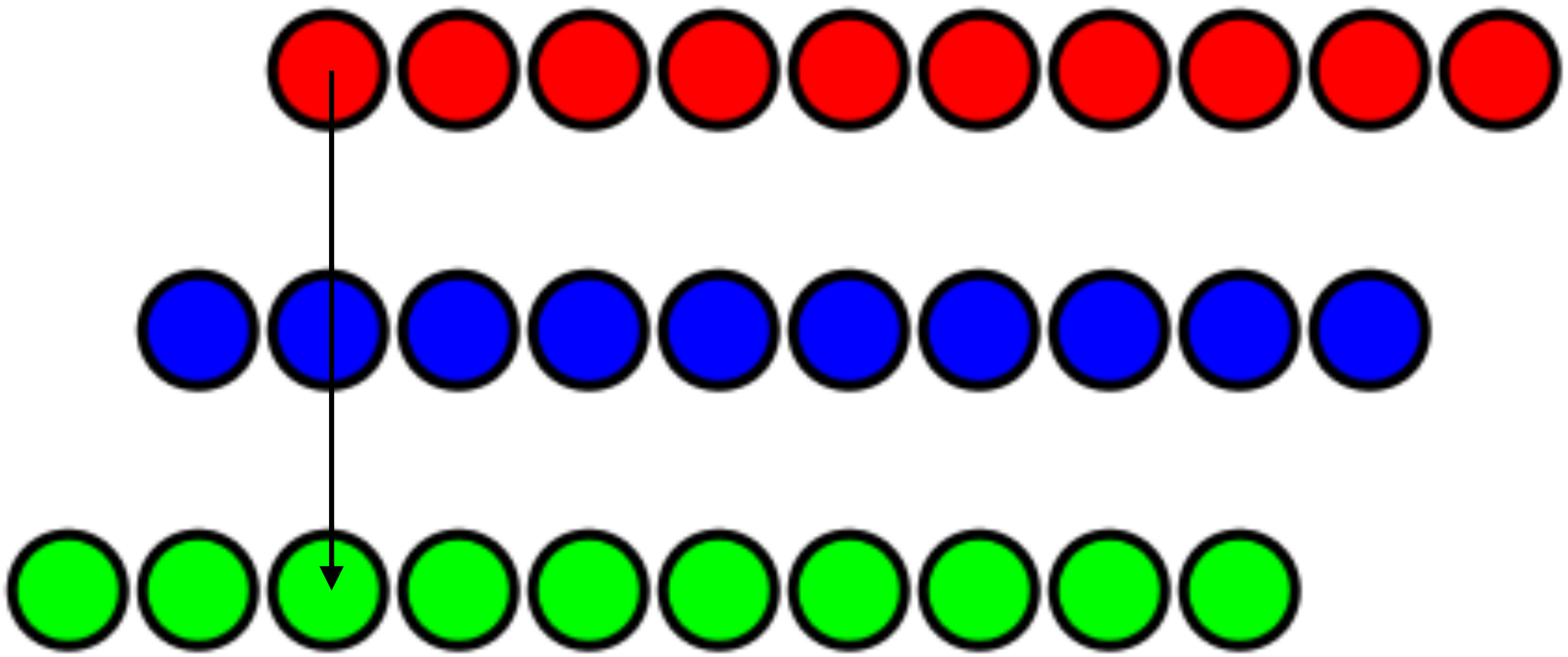
Estádio

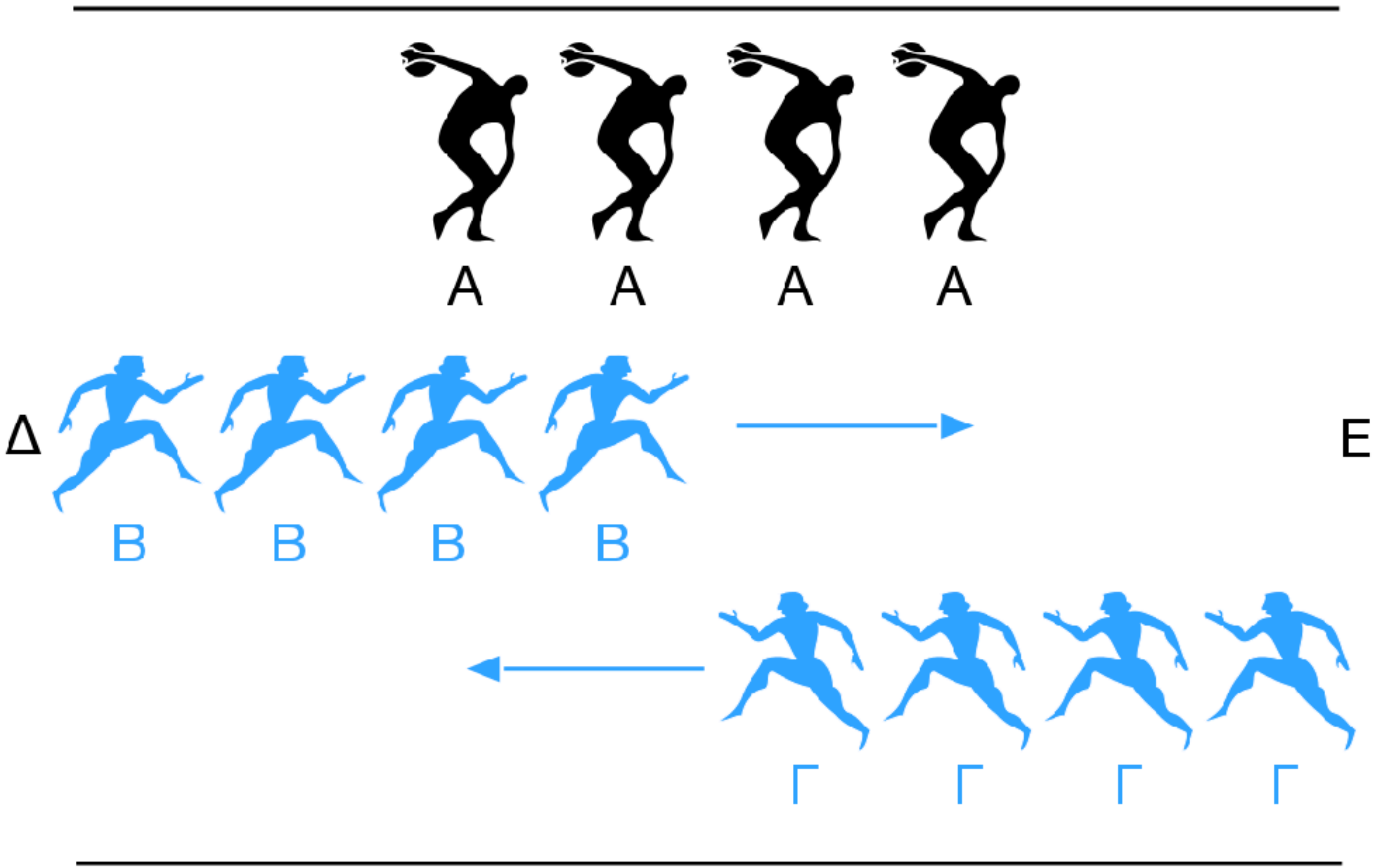


Ordem: no próximo instante os vermelhos dão um passo à (nossa) direita e os verdes dão um passo à esquerda.

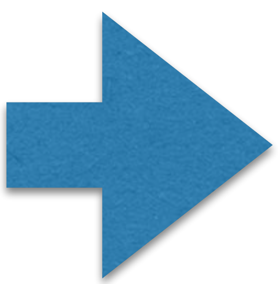


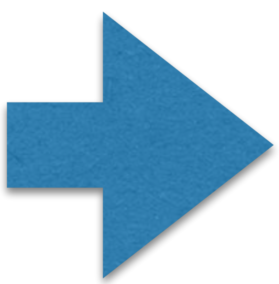


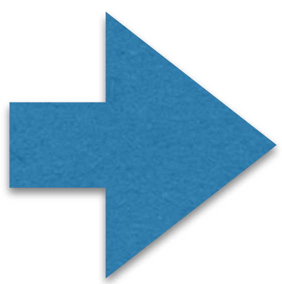


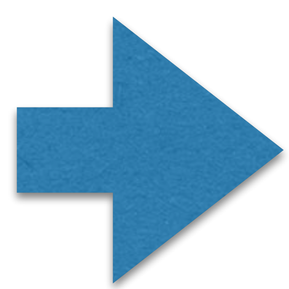

A A A A
Δ
B B B B
E
Γ Γ Γ Γ

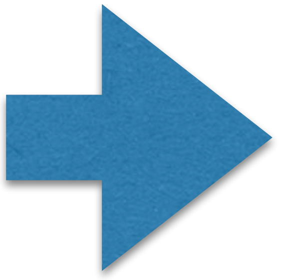
Flecha

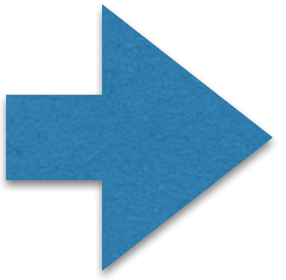


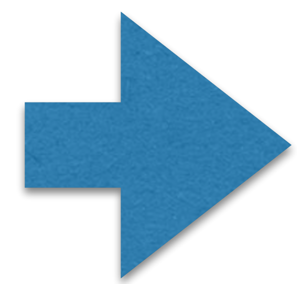


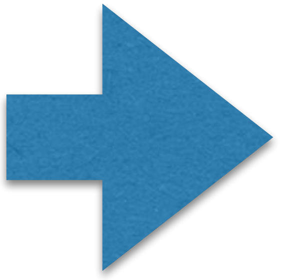


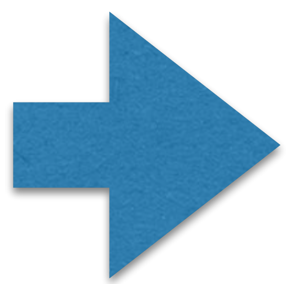


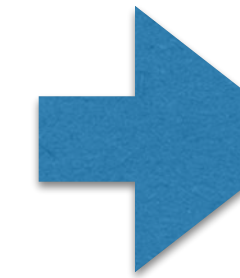


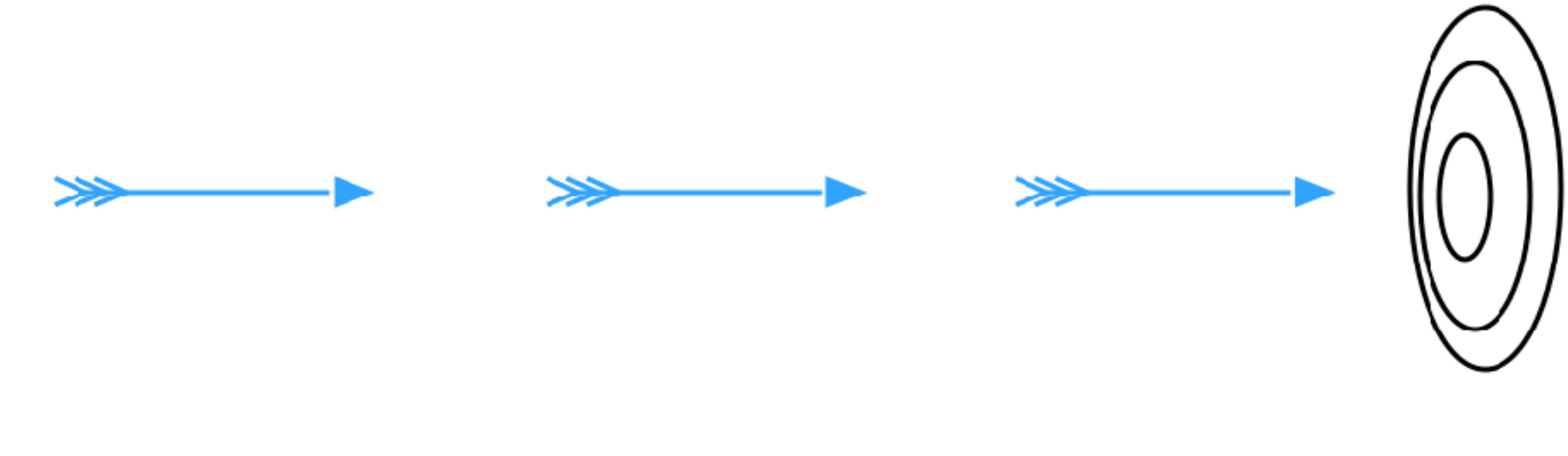












1. Calcule, usando o Algoritmo de Euclides, (55,34) e (1000, 48)

3. Mostre que se T_n é um número triangular, então $9T_n + 1$ também é um número triangular. 01.10.2020

4. Escreva cada um dos números seguintes como soma de três, ou menos, números triangulares:

   (a) 56
   (b) 69
   (c) 185
   (d) 287

5. Verifique que 1225 e 41 616 são simultaneamente quadrados perfeitos e números triangulares.

6. Mostre algebricamente que todo o quadrado perfeito é soma de dois triangulares consecutivos.

$$9\,\frac{m(m+1)}{2}+1$$

$$\frac{9m^2+9m+2}{2}=\frac{(3m+1)(3m+2)}{2}=T_{3m+1}$$

$56 = 1+55$

$69 = 66+3$

$185 = 120+55+10$

$287 = 276+10+1$

$$1225 = 35^2 = \frac{49 \times 50}{2} = T_{49}$$

$$41616 = 204^2 = \frac{288 \times 289}{2} = T_{288}$$

$$m^2 = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m-1)m}{2}$$

$$9_m = T_m + T_{m-1}$$

$$56 = 1 + 55$$

$$69 = 66 + 3$$

$$185 = 120 + 55 + 10$$

$$287 = 276 + 10 + 1$$

7. Um número oblongo é aquele que conta o número de pontos numa disposição rectangular em que os lados têm números consecutivos de pontos.

$$O_1 = 2,\ O_2 = 6,\ O_3 = 12,\ O_4 = 20,\ etc., O_n = n(n+1)$$

Mostre que

(a) $O_n = 2 + 4 + \cdots + 2n$.

(b) Todo o oblongo é soma de dois triangulares iguais.

(c) $O_n + n^2 = T_{2n}$.

(d) $O_n - n^2 = n$.

11. Exiba cinco triplos pitagóricos usando a fórmula

$$\left(n, \frac{n^2-1}{2}, \frac{n^2+1}{2}\right)$$

para valores ímpares de n e cinco triplos pitagóricos usando a fórmula

$$\left(m, \left(\frac{m}{2}\right)^2 - 1, \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1\right)$$

para valores pares de m.

12. Mostre que $\sqrt{3}$ é incomensurável com 1.

Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.

16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.
19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

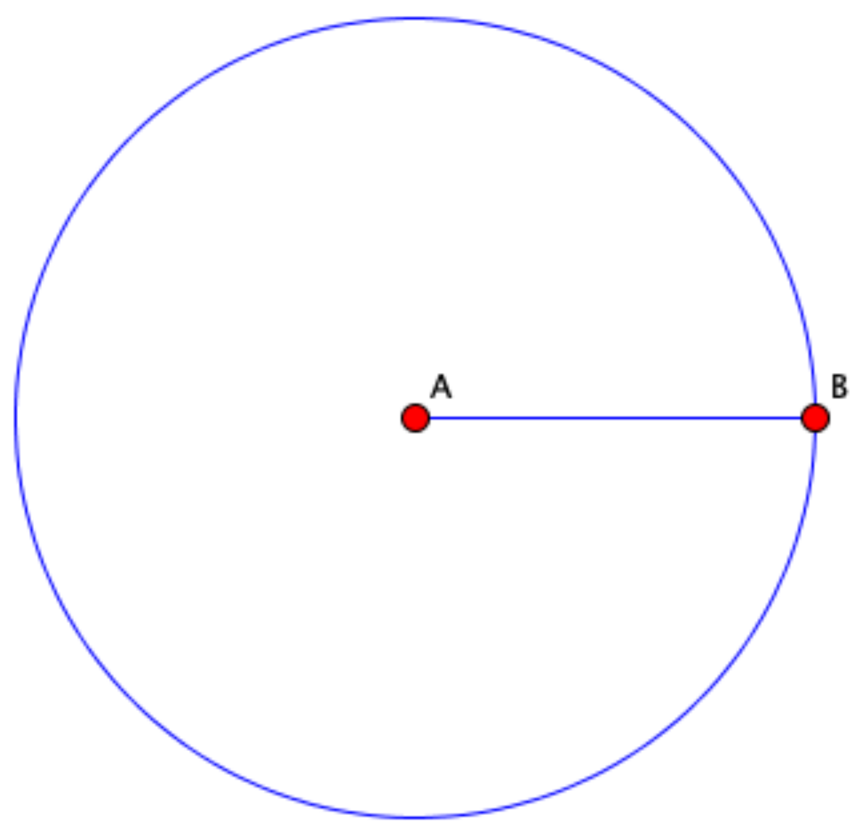
Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.

[4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.

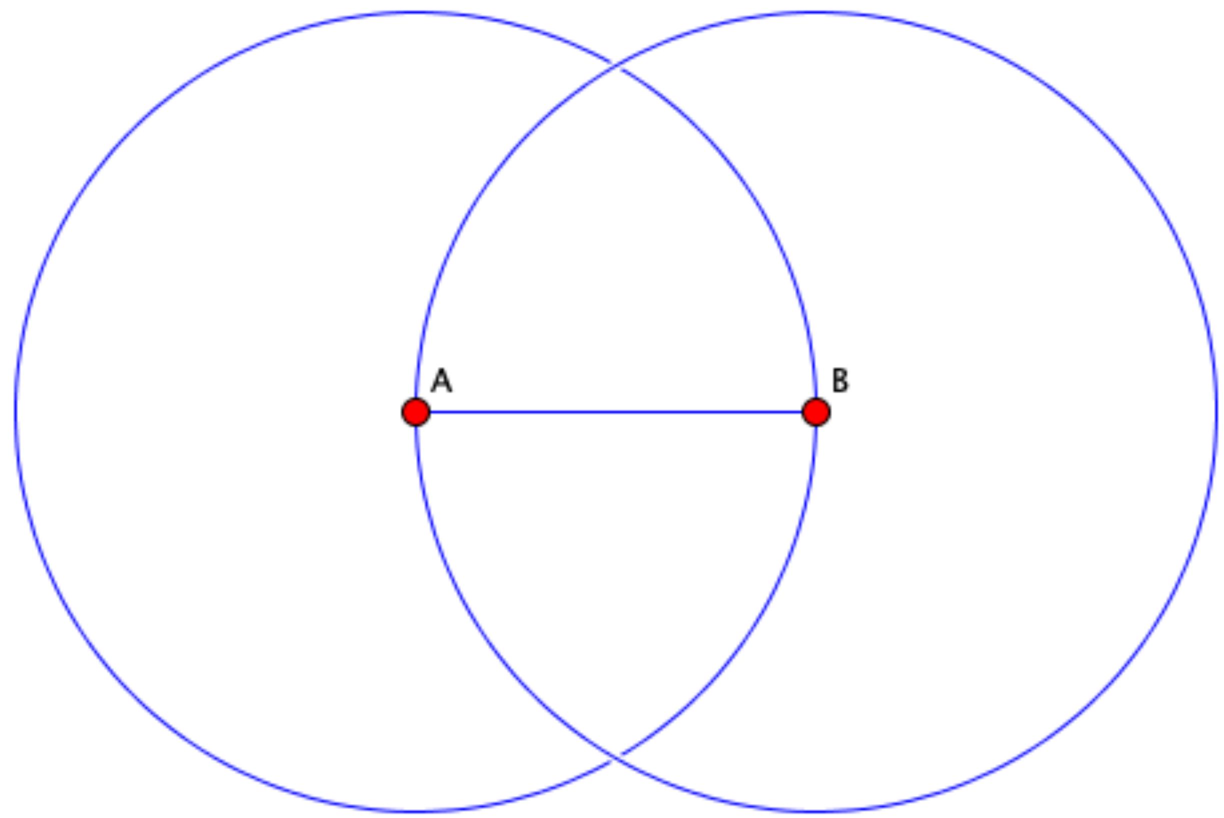
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.]
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo [é] maior do que a parte.
9. E duas retas não contêm uma área.

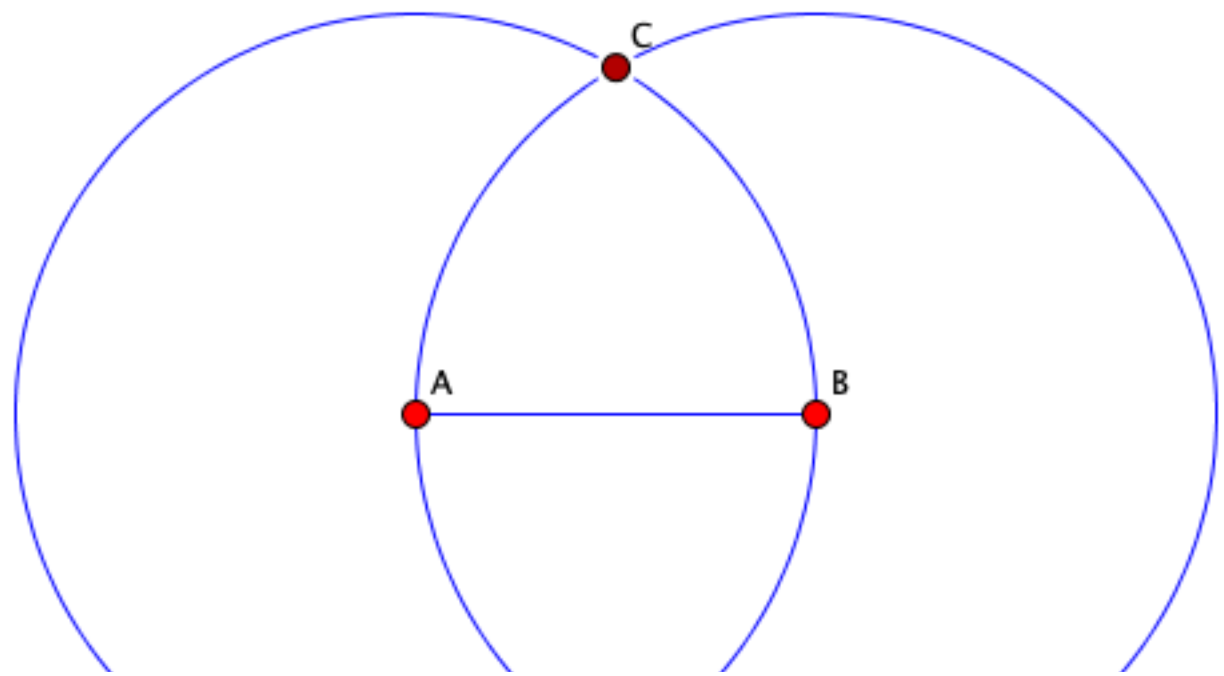
EI-1: Sobre um segmento dado criar um triângulo equilátero.

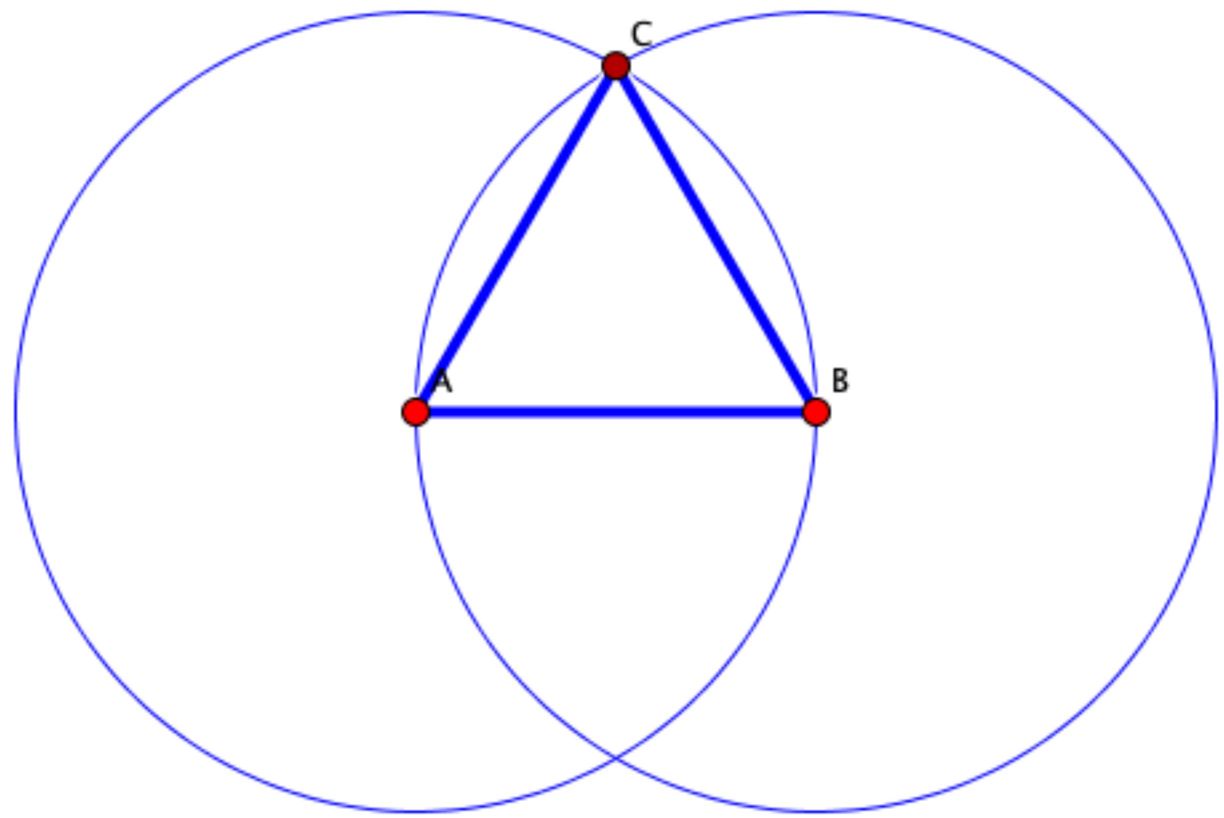


P3

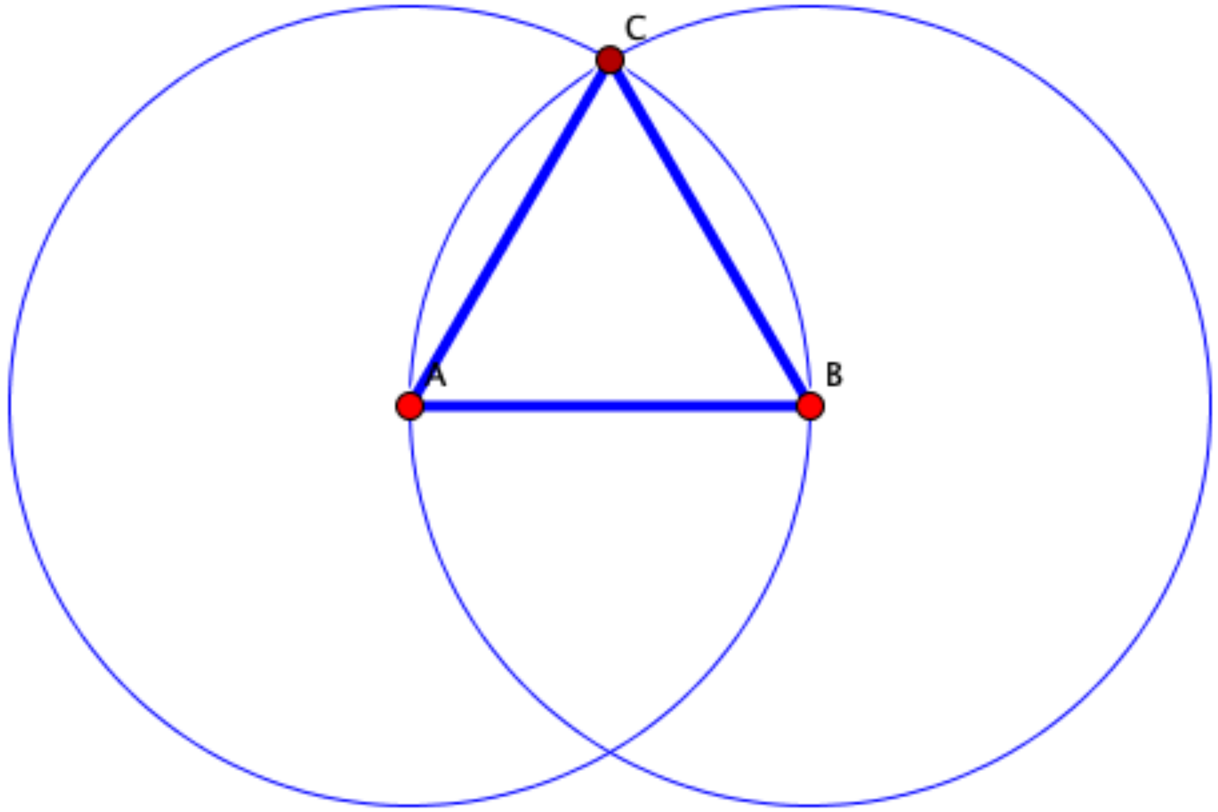
P3




C
A
B



P1



AB=AC por Def 15

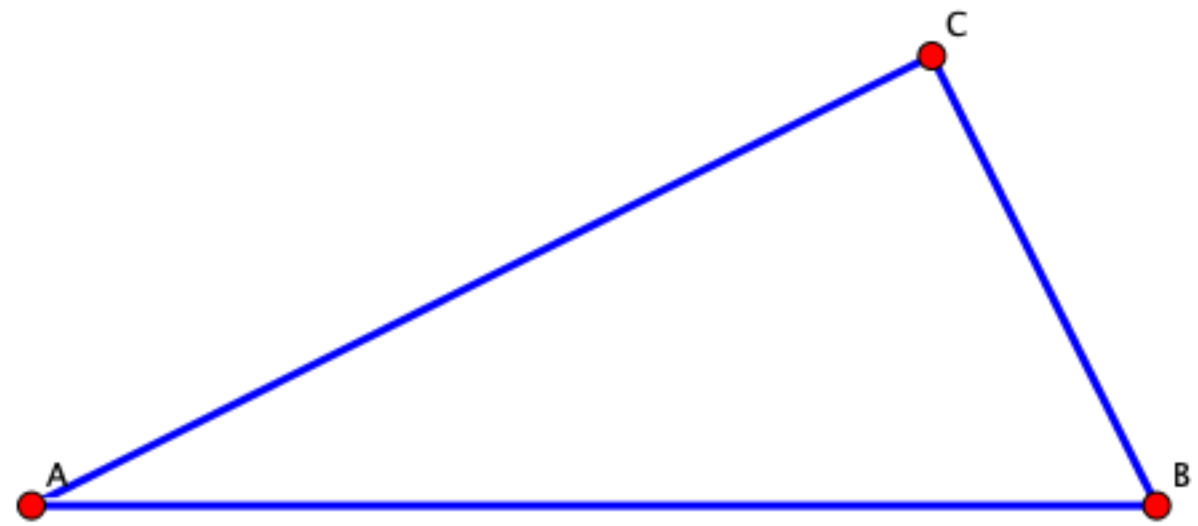
AB=BC por Def 15

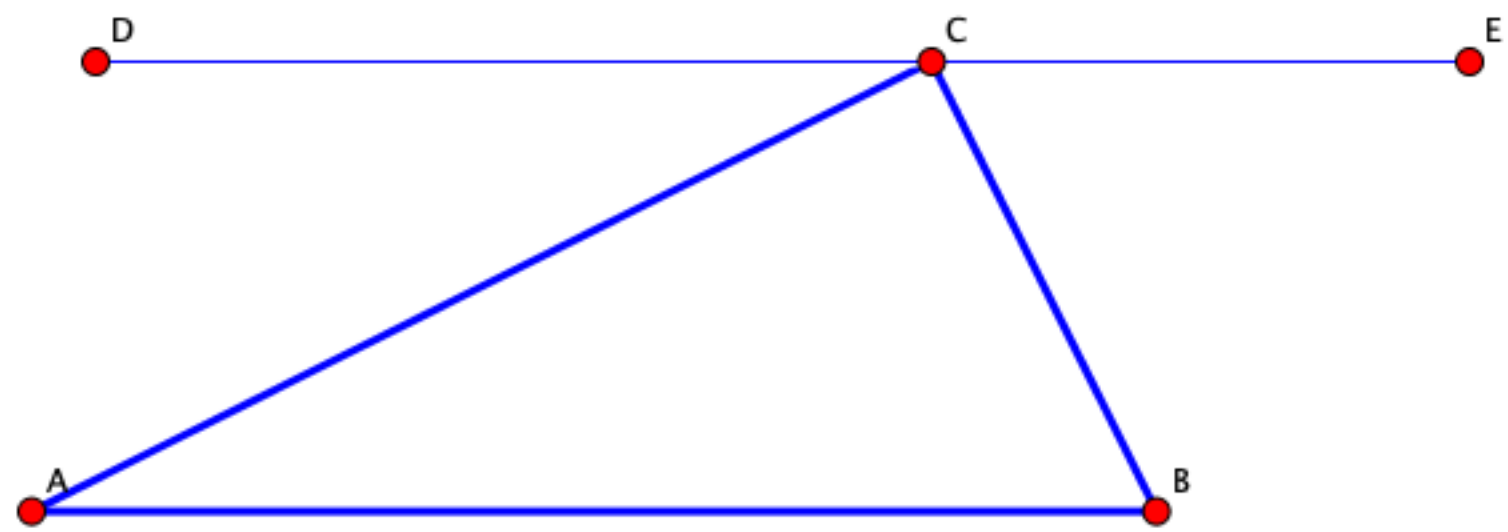
BC=AC por NC 1

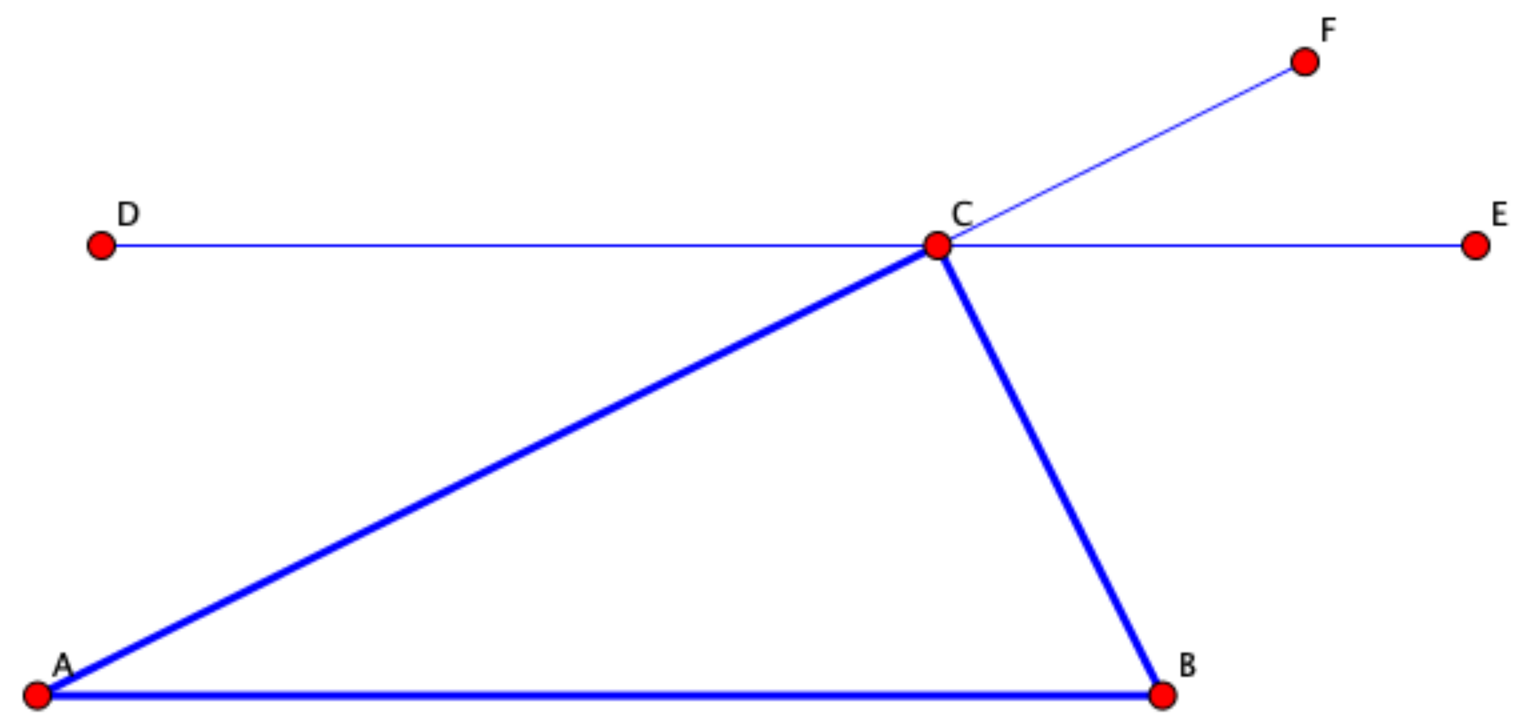
06.10.2020

EI-32: Em qualquer triângulo o ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos opostos.

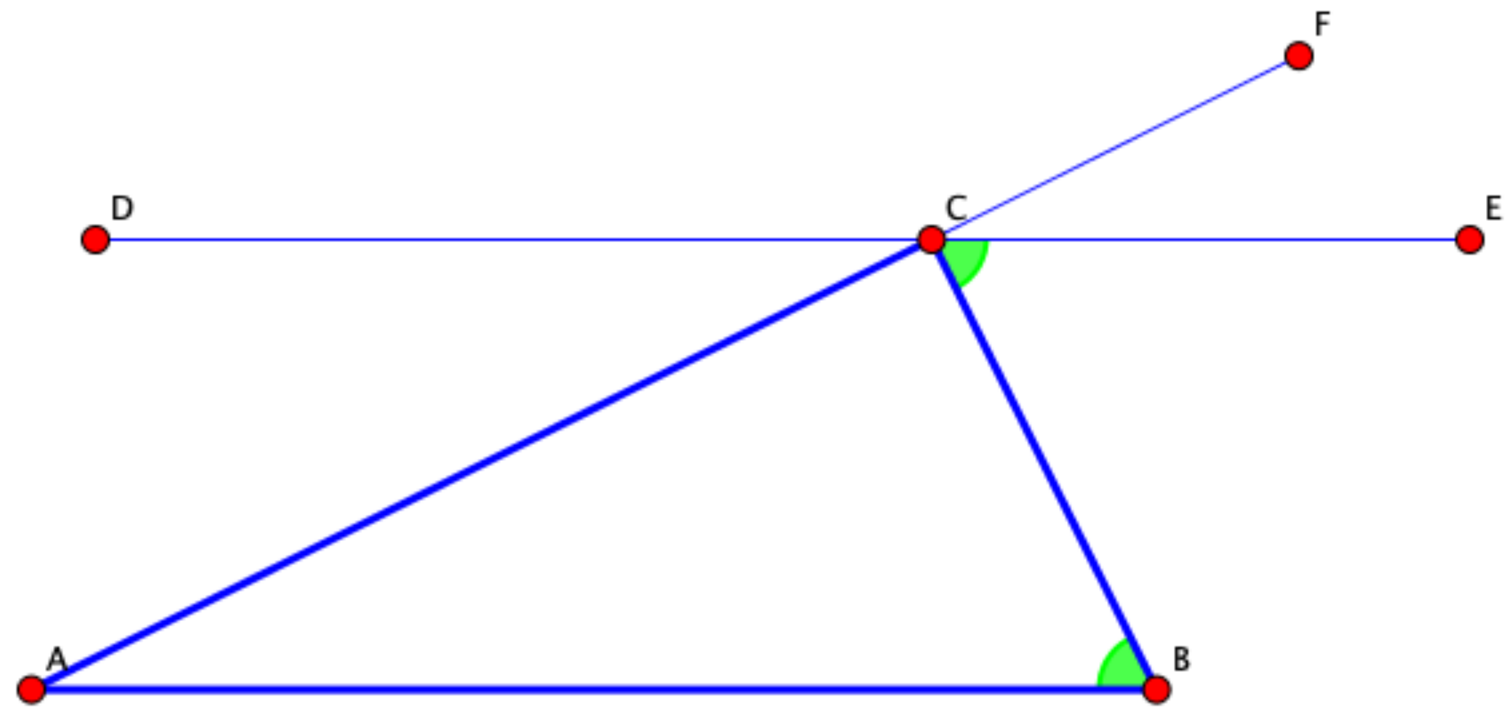
Os três ângulos internos são iguais a dois rectos.

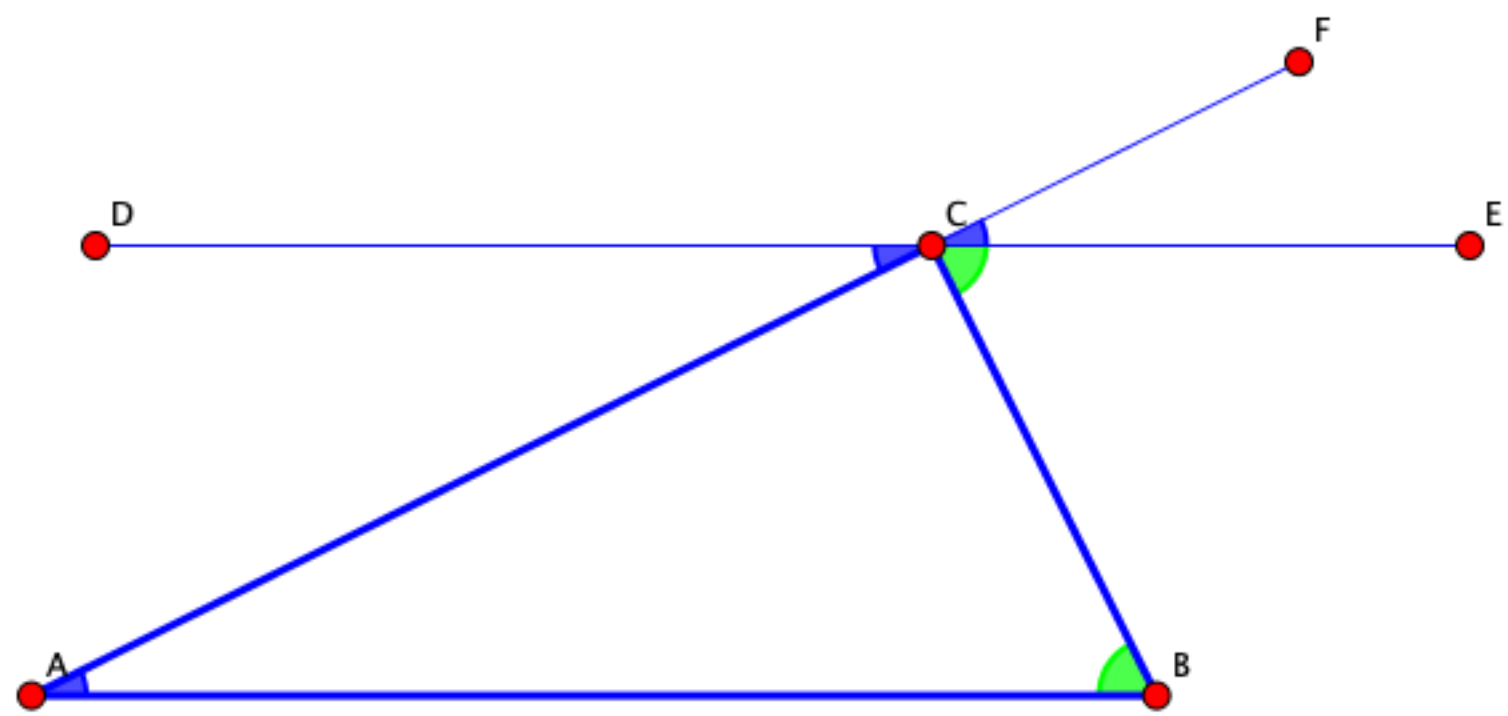


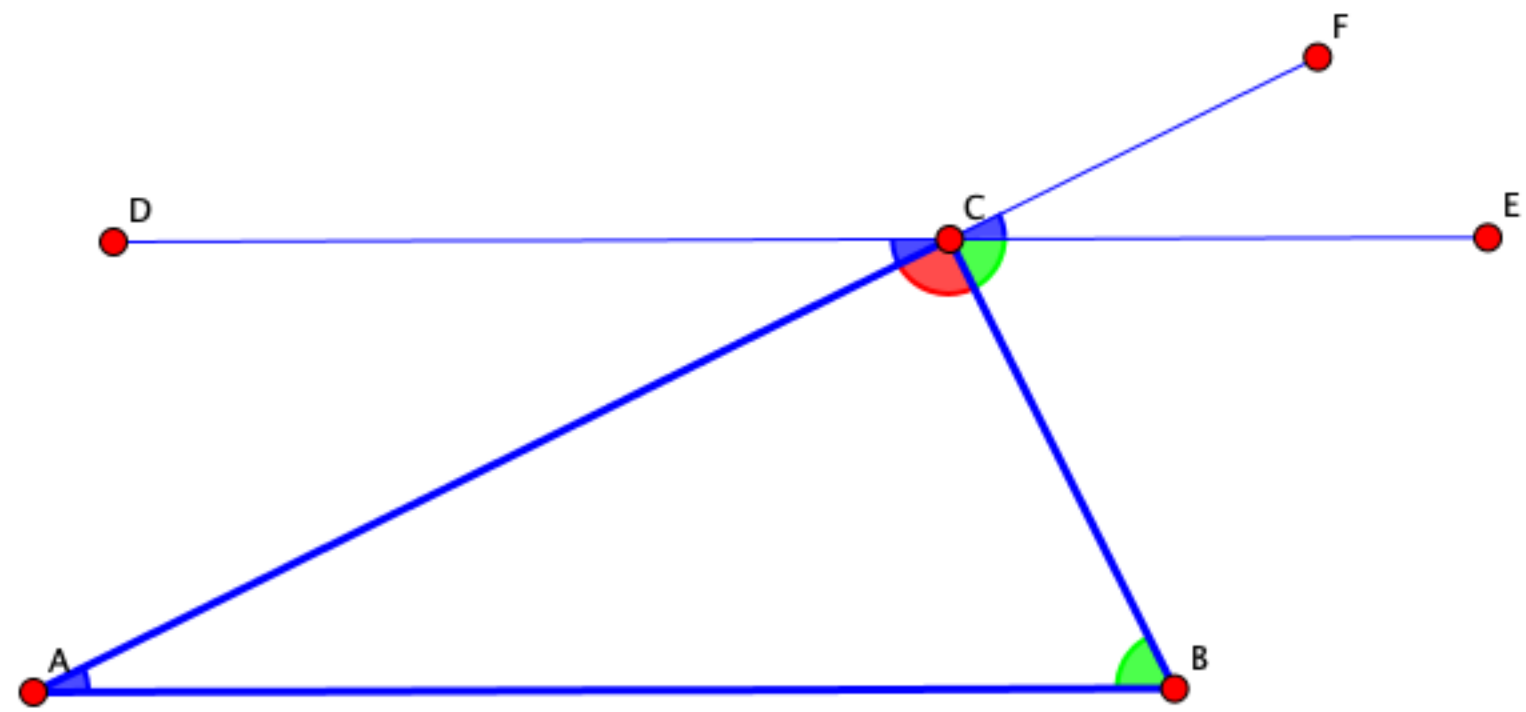

D
C
E
A
B



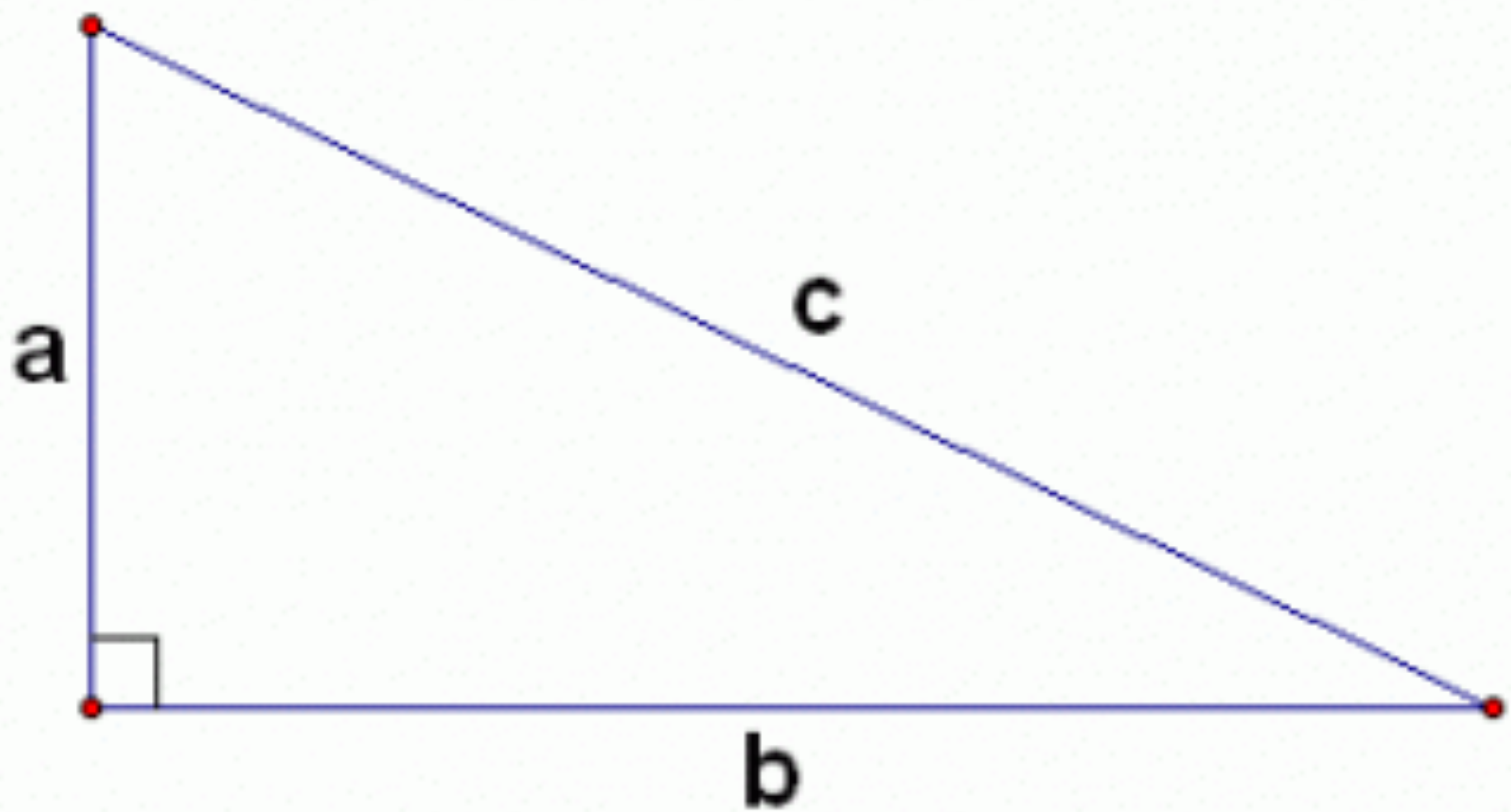
F
D
C
E
A
B


F
D
C
E
A
B


F
D
C
E
A
B

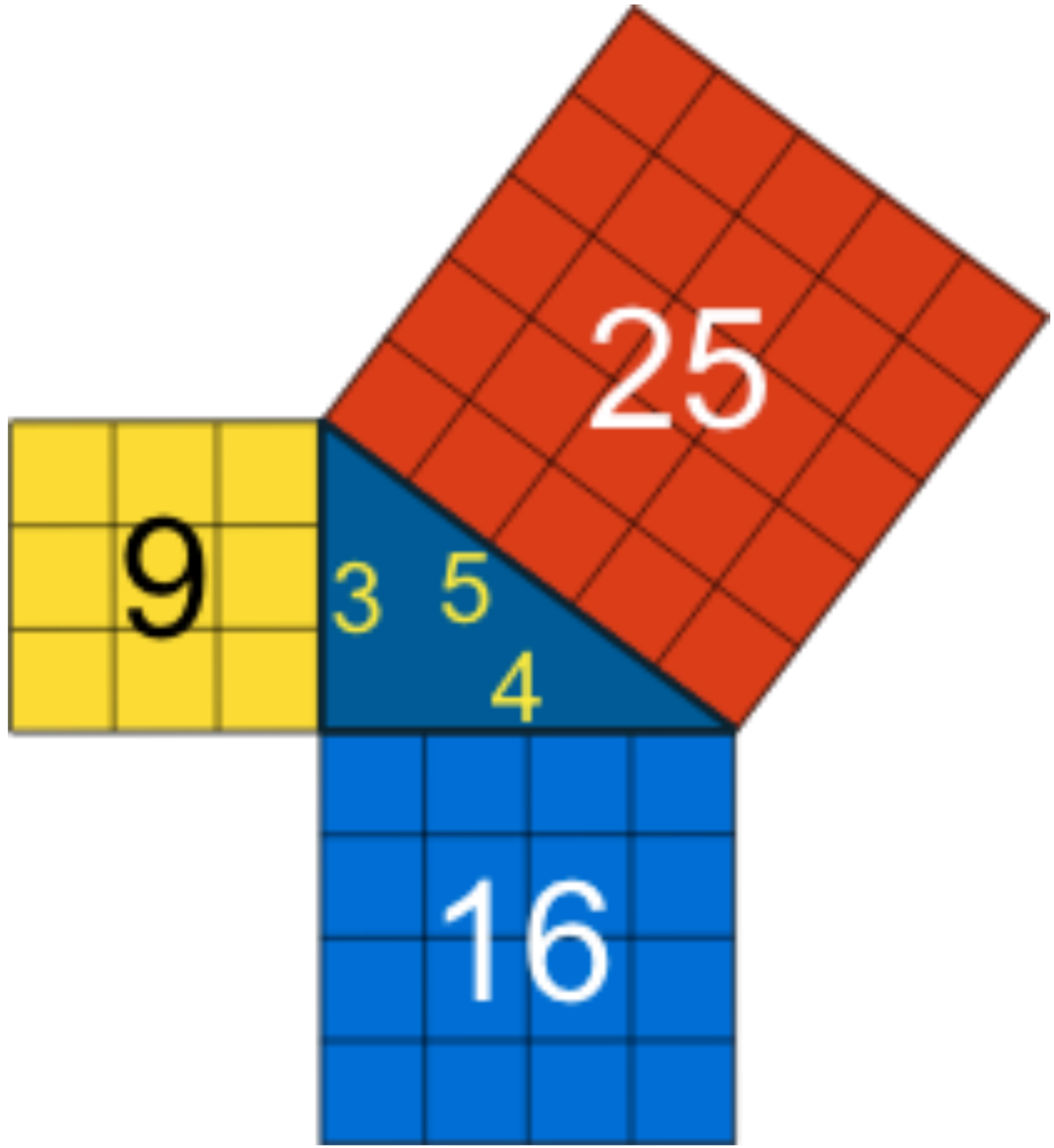

F
D
C
E
A
B

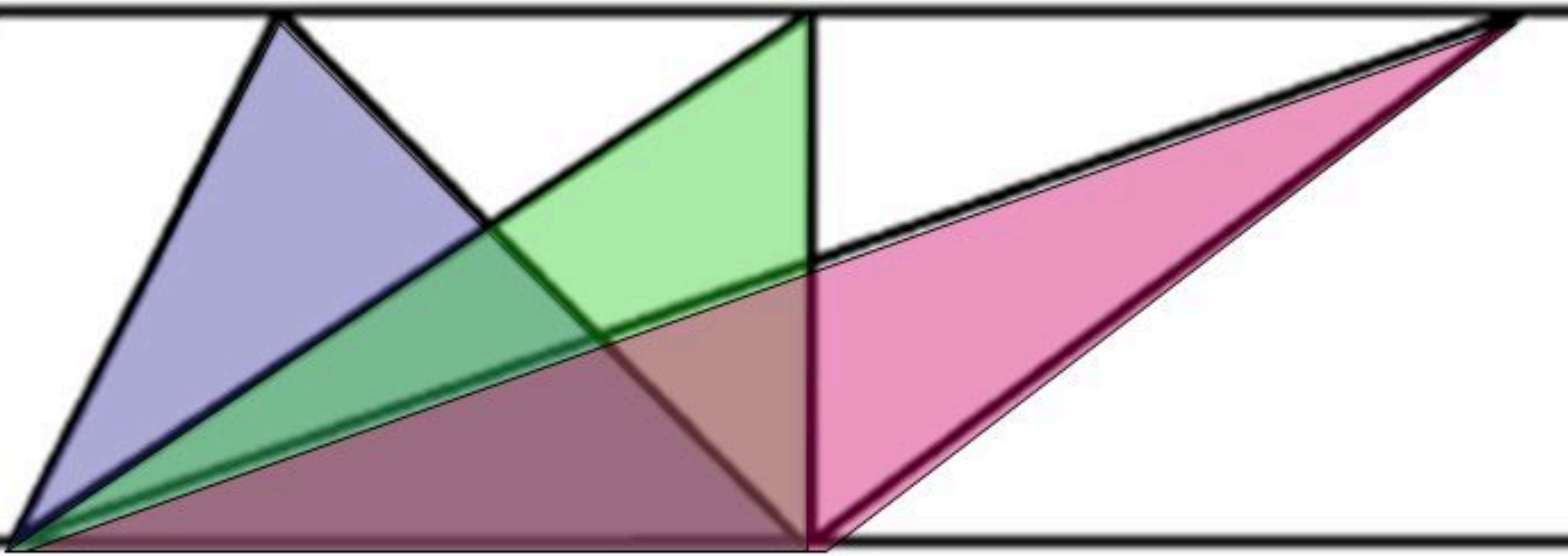
Teorema de Pitágoras



$$a^2 + b^2 = c^2$$

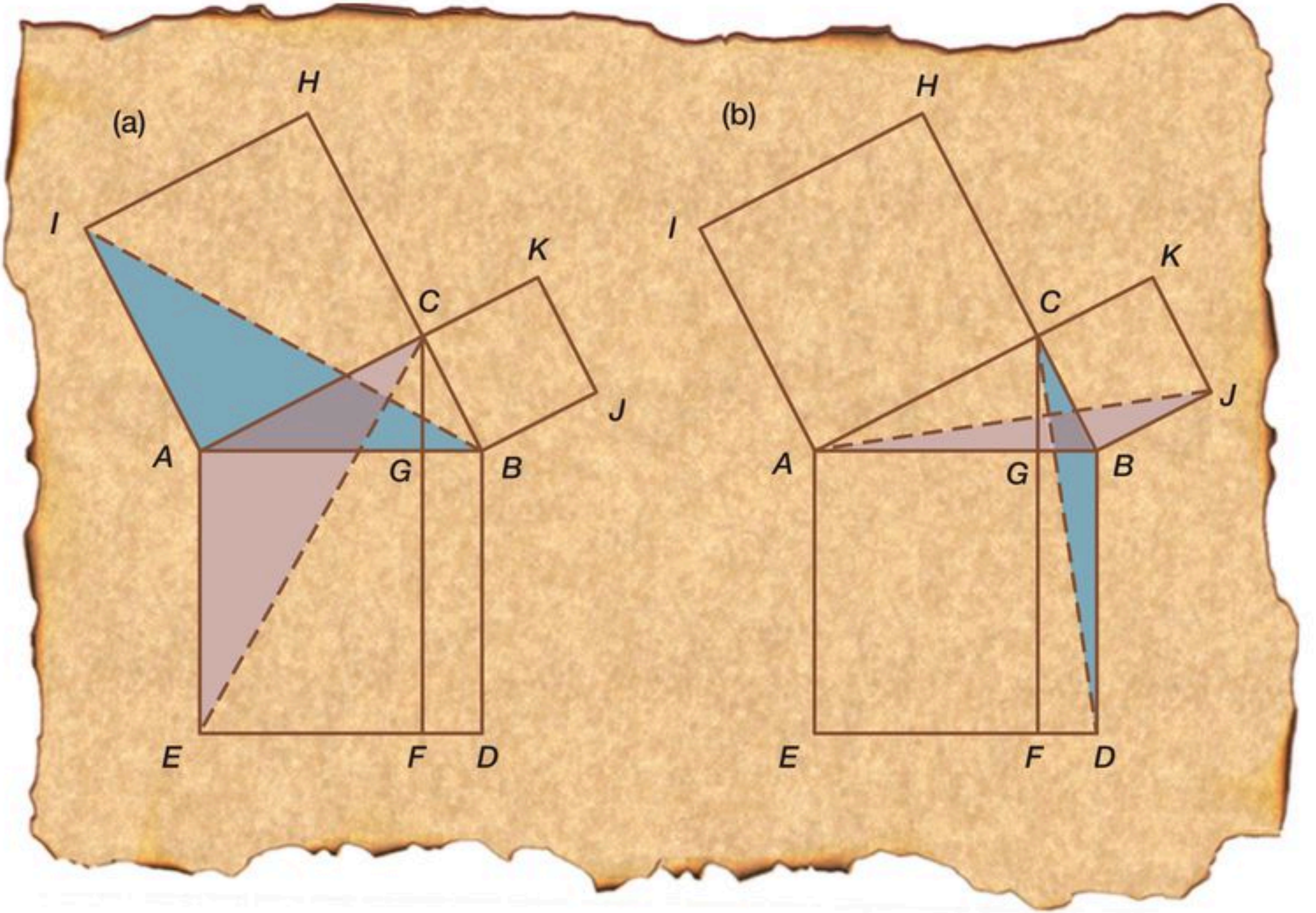
Teorema de Pitágoras (exemplo)





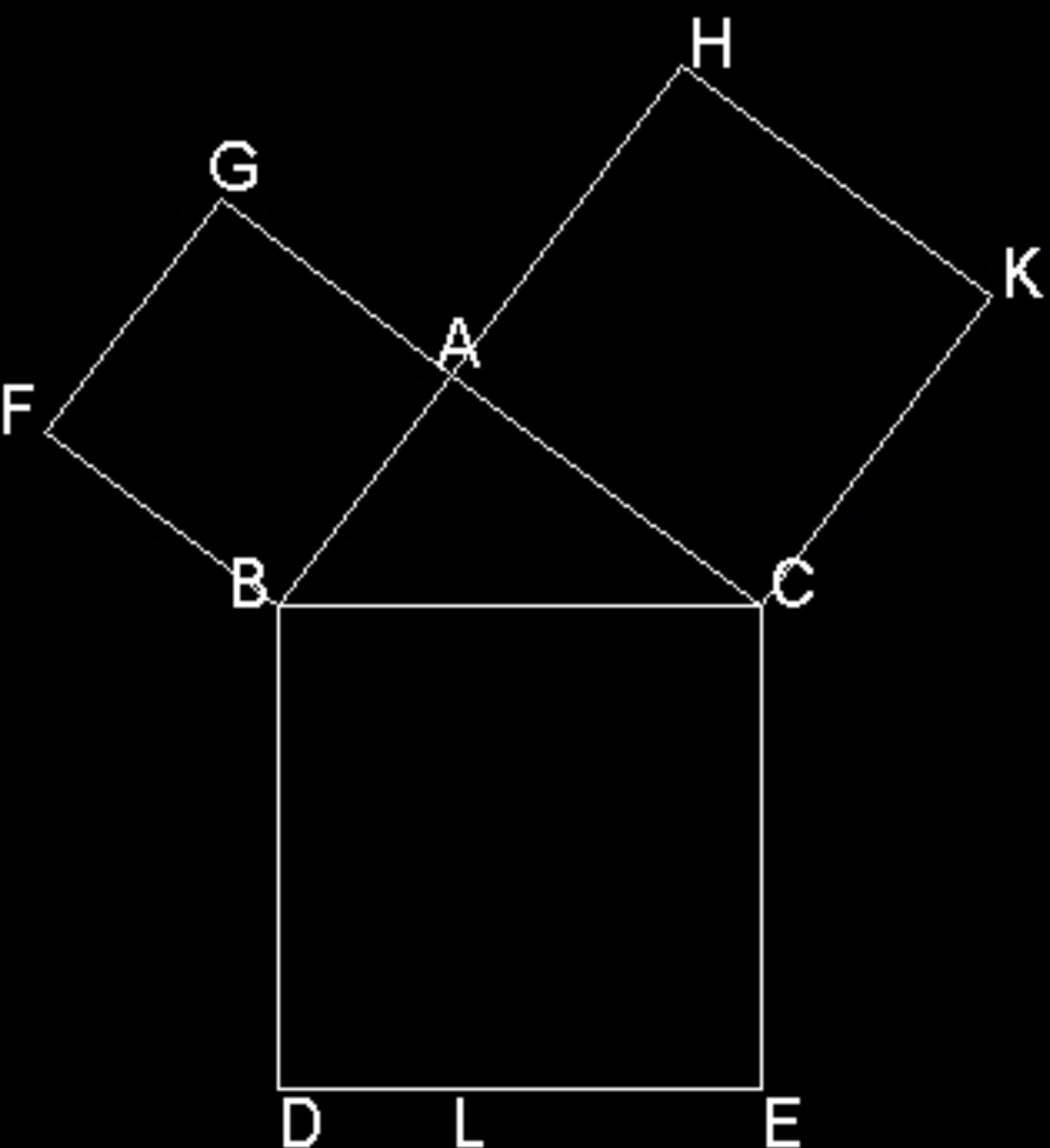
Relembrar: Triângulos com a mesma base e altura têm a mesma área.
O mesmo vale para paralelogramos.

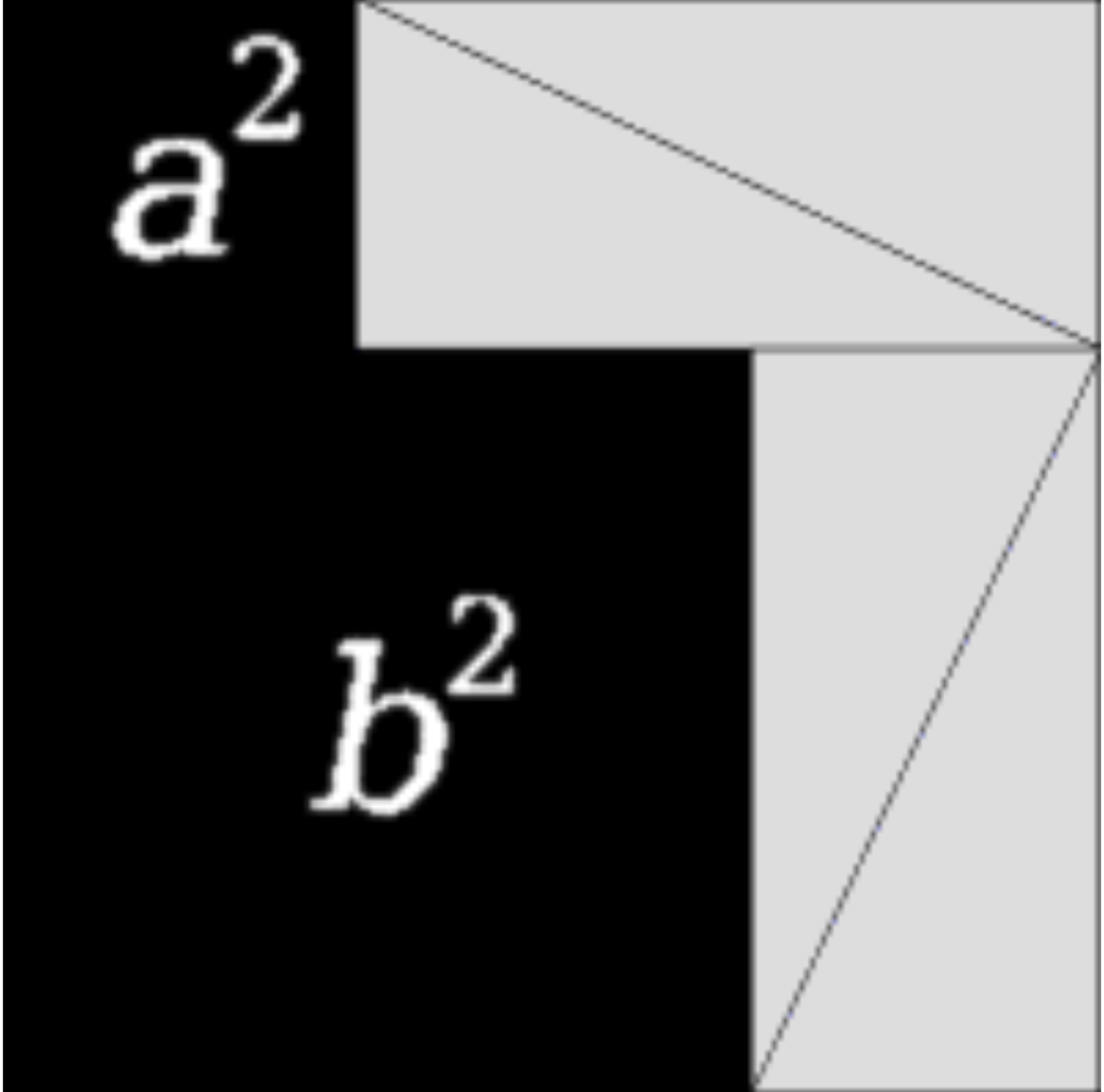
$$A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$$



(a)
H
I
K
C
J
A
G
B
E
F
D
(b)
H
I
K
C
J
A
G
B
E
F
D

Euclid's proof


H
G
K
A
F
B
C
D
L
E


a^2
b^2

Definições

1. Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma.
2. E número é a quantidade composta de unidades.
3. Um número é uma parte de um número, o menor, do maior, quando meça exatamente o maior.
4. E partes, quando não meça exatamente.
5. E o maior é um múltiplo do menor, quando seja medido exatamente pelo menor.
6. Um número par é o que é dividido em dois.
7. E um número ímpar é o que não é dividido em dois, ou [o] que difere de um número par por uma unidade.
8. Um número par, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número par.
9. E um número ímpar, um número par de vezes, é o medido por um número par, segundo um número ímpar.

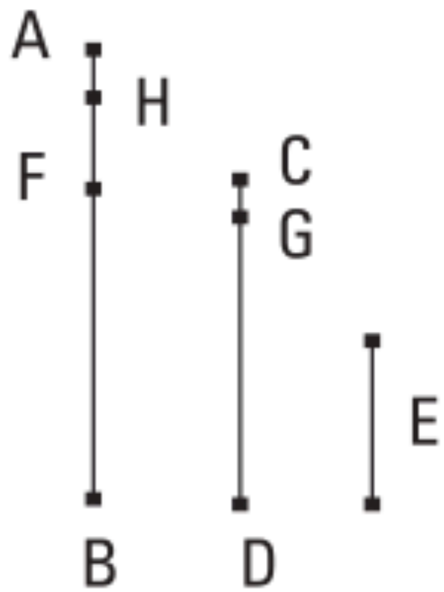
[10. Um par, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número par.]

11. E um número ímpar, um número ímpar de vezes, é o medido por um número ímpar, segundo um número ímpar.
12. Um número primo é o medido por uma unidade só.
13. Números primos entre si são os medidos por uma unidade só como medida comum.

14. Um número composto é o medido por algum número.
15. E números compostos entre si são os medidos por algum número como medida comum.
16. Um número é dito multiplicar um número, quando, quantas são as unidades nele tantas vezes o multiplicado seja adicionado, e algum seja produzido.
17. E quando dois números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é dito plano, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.
18. E quando três números, tendo sido multiplicados entre si, façam algum, o produzido é sólido, e lados dele, os números que foram multiplicados entre si.
19. Um número quadrado é o igual o mesmo número de vezes ou [o] contido por dois números iguais.
20. E um cubo é o igual um número igual de vezes, um número igual de vezes, ou [o] contido por três números iguais.
21. Números estão em proporção, quando sejam o primeiro do segundo e o terceiro do quarto o mesmo múltiplo ou a mesma parte ou as mesmas partes.
22. Números planos e sólidos semelhantes são os que têm os lados em proporção.
23. Um número perfeito é o que é igual às suas próprias partes.

Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.

Pois, dos dois números [desiguais] AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, o que restou jamais meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade; digo que os AB, CD são primos entre si, isto é, que uma unidade só mede os AB, CD.

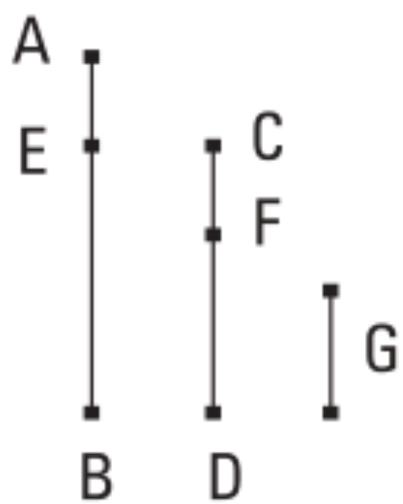


Pois, se os AB, CD não são primos entre si, algum número os medirá. Meça, e seja o E; e o CD medindo o BF, reste dele mesmo o menor FA, enquanto o AF, medindo o DG, reste dele mesmo o menor GC, e o GC, medindo o FH, reste a unidade HA.

Como, de fato, o E mede o CD, e o CD mede o BF, portanto também o E mede o BF; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o AF restante. E o AF mede o DG; portanto, o E também mede o DG; e também mede o DC todo; portanto, também medirá o CG restante. E o CG mede o FH; portanto, o E também mede o FH; e mede também o FA todo; portanto, medirá também a unidade AH restante, sendo um número; o que é impossível. Portanto, nenhum número medirá os números AB, CD; portanto, os AB, CD são primos entre si; o que era preciso provar.

2.

Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum deles.



Sejam AB, CD os dois números dados não primos entre si. É preciso, então, achar a maior medida comum dos AB, CD.

Se, por um lado, de fato, o CD mede o AB, mas mede também a si mesmo, portanto o CD é uma medida comum dos CD, AB. E é evidente que é também a maior; pois, nenhum maior do que o CD medirá o CD.

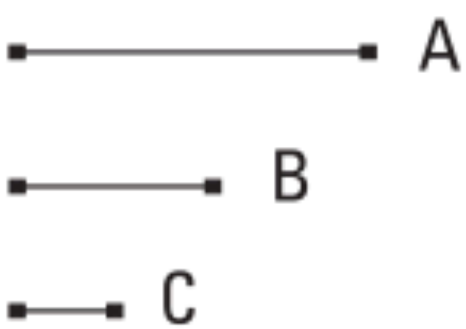
Se, por outro lado, o CD não mede o AB, dos AB, CD, sendo sempre subtraído de novo o menor do maior terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. Pois, uma unidade não terá restado; e, se não, os AB, CD serão primos entre si; o que não foi suposto. Portanto, terá restado algum número, o qual medirá o antes dele mesmo. E, por um lado, o CD, medindo o BE, reste um menor do que ele mesmo, o EA, e, por outro lado, o EA, medindo o DF, reste um menor do que ele mesmo, o FC, e o CF meça o AE. Como, de fato, o CF mede o AE, e o AE mede o DF, portanto o CF medirá o DF; e mede também a si mesmo; portanto, medirá também o CD todo. E o CD mede o BE; portanto, o CF mede também o BE; e mede também o EA; portanto, medirá também o BA todo; e mede também o CD; portanto, o CF mede os AB, CD. Portanto, o CF é uma medida comum dos AB, CD. Digo, então, que também é a maior. Pois, se o CF não é a maior medida comum dos AB, CD, algum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF. Meça, e seja o G. E como o G mede o CD, e o CD mede o BE, portanto também o G mede o BE; e mede também o BA todo; portanto, medirá também o AE restante. Mas o AE mede o DF; portanto, o G medirá também o DF; e mede também o DC todo; portanto, também medirá o CF restante, o maior, o menor; o que é impossível; portanto, nenhum número medirá os números AB, CD, sendo maior do que CF; portanto, o CF é a maior medida comum dos AB, CD; [o que era preciso provar].

Corolário

Disso, então, é evidente que, caso um número meça dois números, também medirá a maior medida comum deles; o que era preciso provar.

31.

Todo número composto é medido por algum número primo.



Seja o número composto A; digo que o A é medido por algum número primo.

Pois, como o A é composto, algum número o medirá. Meça, e seja o B. E se, por um lado, o B é primo, o prescrito aconteceria. Se, por outro lado, é composto, algum número o medirá. Meça, e seja o C. E como o C mede o B, e o B mede o A, portanto também o C mede o A. E se, por um lado, o C é primo, o prescrito aconteceria. Se, por outro lado é composto, algum número o medirá. Sendo, então, produzida uma investigação como essa, algum número primo será tomado, que medirá. Pois, se não for tomado, ilimitados números medirão o A, cada um dos quais é menor do que um outro; o que é impossível nos números. Portanto, algum número primo será tomado, que medirá o antes dele mesmo, que também medirá o A.

Portanto, todo número composto é medido por algum número primo; o que era preciso provar.

32.

Todo número ou é primo ou é medido por algum número primo.

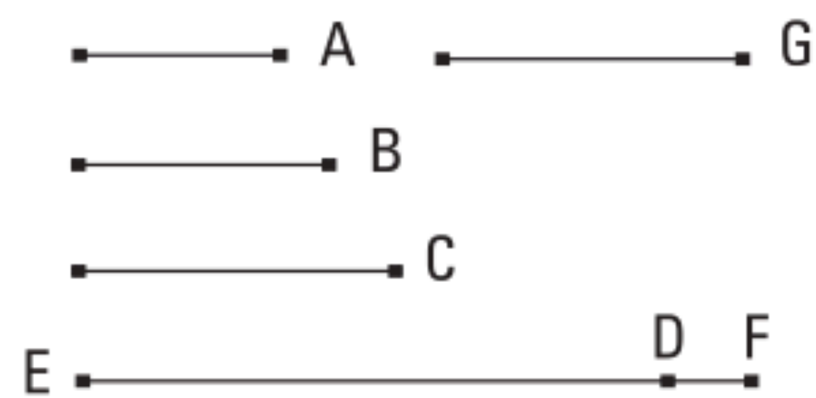
Seja o número A; digo que o A ou é primo ou é medido por algum número primo.

Se, por um lado, de fato, o A é primo, o prescrito aconteceria. Se, por outro lado, é composto, algum número primo o medirá.

Portanto, todo número ou é primo ou é medido por algum número primo; o que era preciso provar.

20.

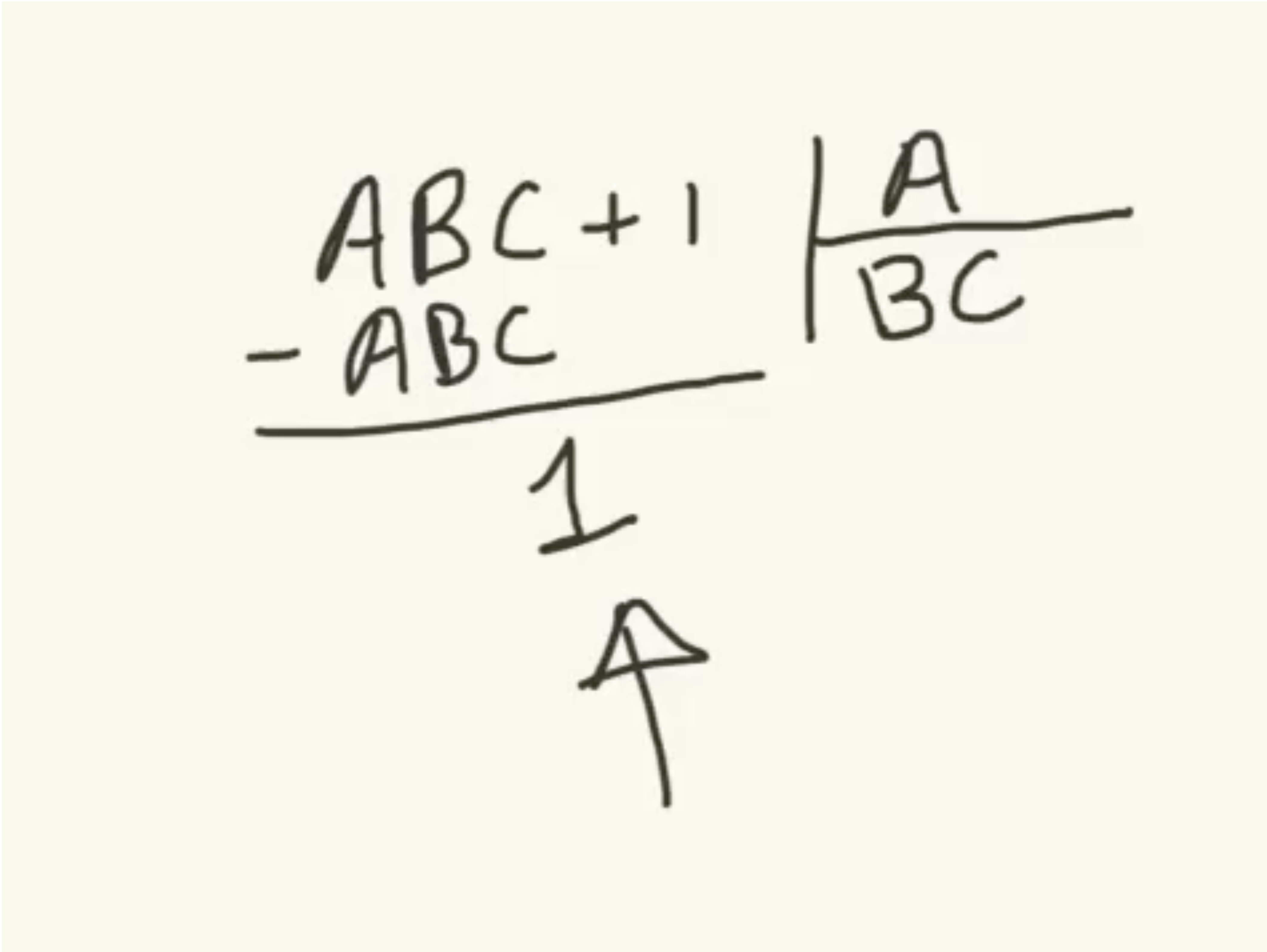
Os números primos são mais numerosos do que toda quantidade que tenha sido proposta de números primos.



Sejam os números primos que tenham sido propostos A, B, C; digo que os números primos são mais numerosos do que os A, B, C.

Fique, pois, tomado o menor medido pelos A, B, C e seja o DE, e fique acrescida a unidade DF ao DE. Então, o EF ou é primo ou não. Primeiramente, seja primo; portanto, os números primos A, B, C, EF achados são mais numerosos do que os A, B, C.

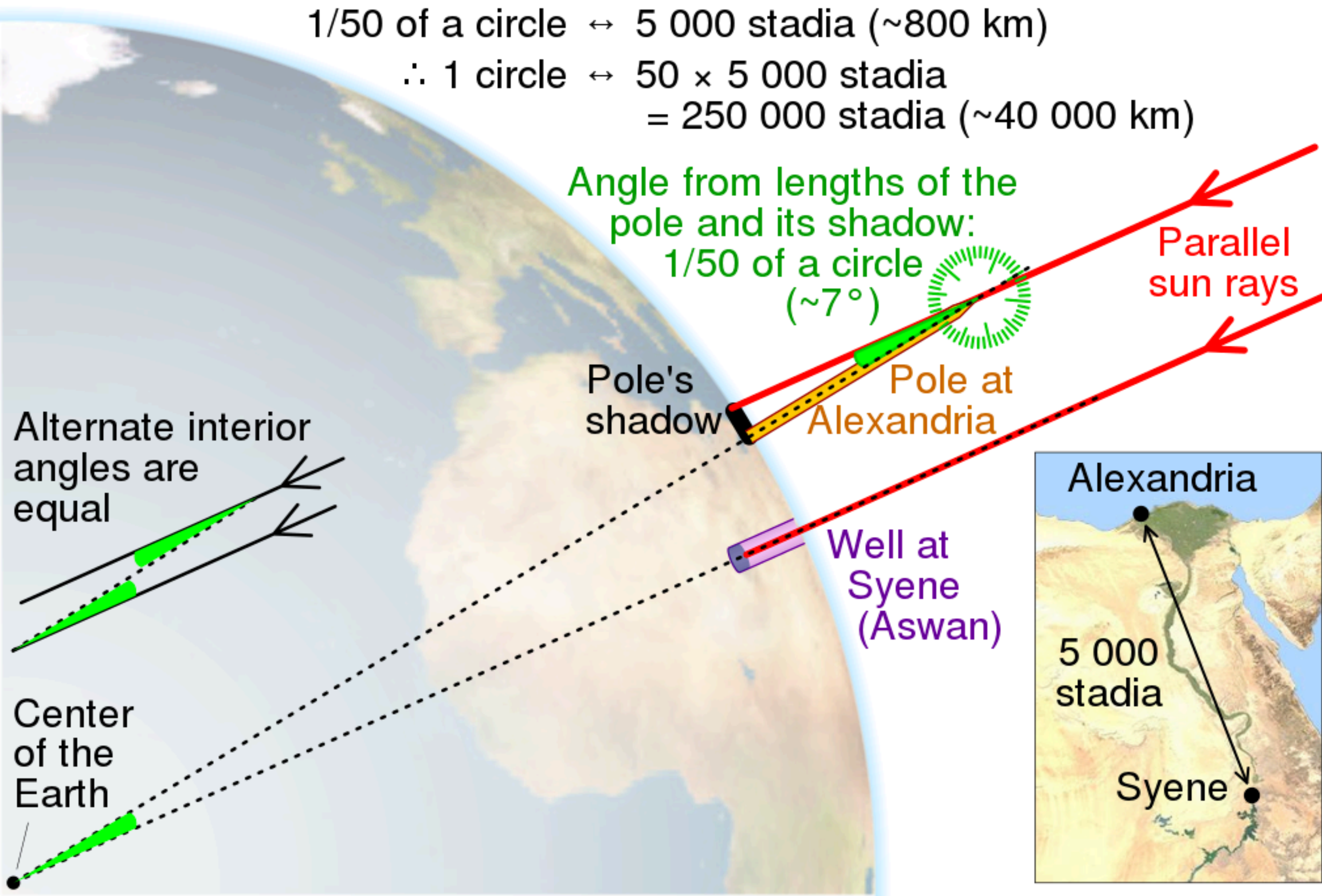
Mas, então, não seja primo o EF; portanto, é medido por algum número primo. Seja medido pelo primo G; digo que o G não é o mesmo que algum dos A, B, C. Pois, se possível, seja. Mas os A, B, C medem o DE; portanto, o G também medirá o DE. E também mede o EF; e o G, sendo um número, medirá a unidade DF restante; o que é absurdo. Portanto, o G não é o mesmo que algum dos A, B, C. E foi suposto primo. Portanto, os números primos achados, A, B, C, G são mais numerosos do que a quantidade que tenha sido proposta dos A, B, C; o que era preciso provar.

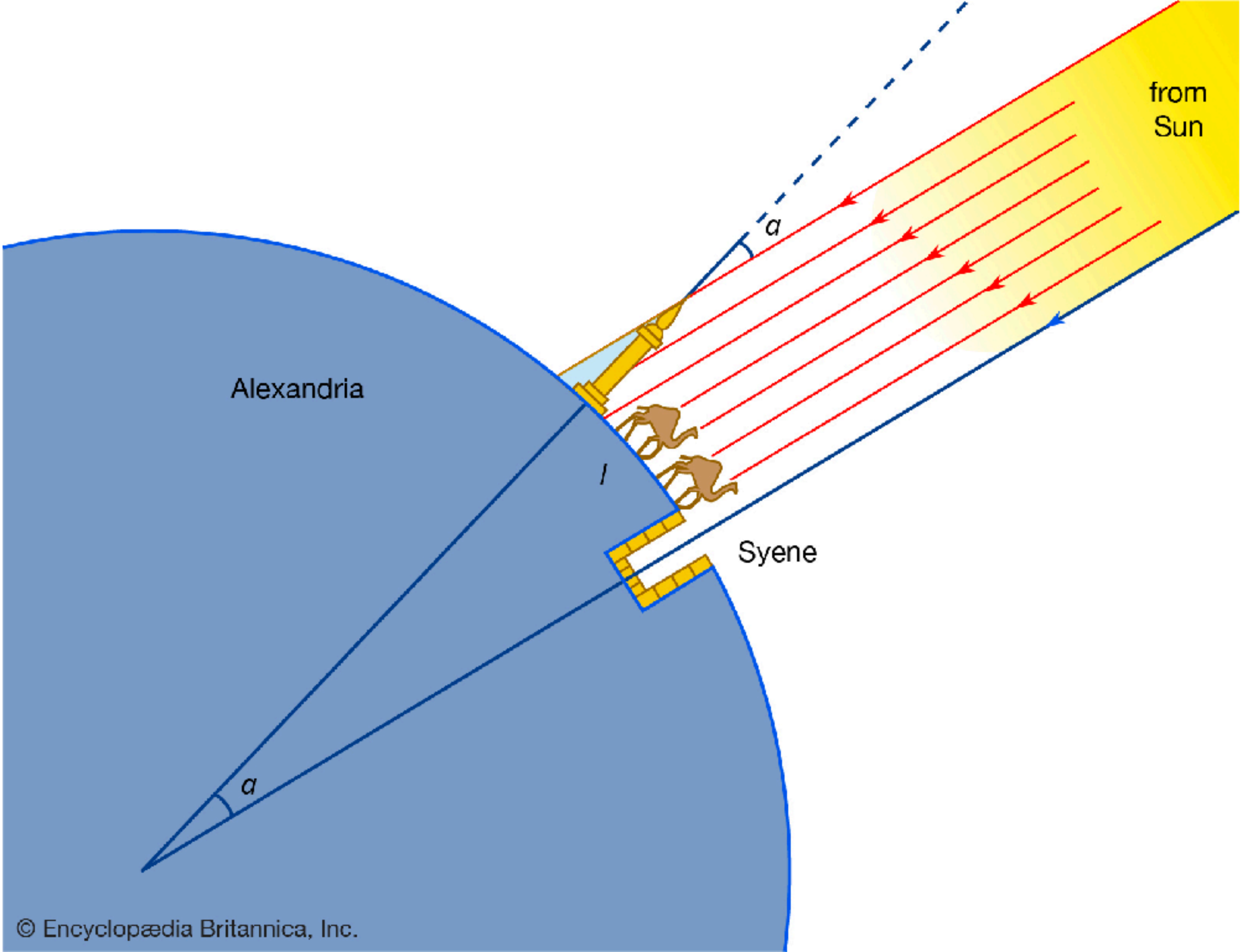


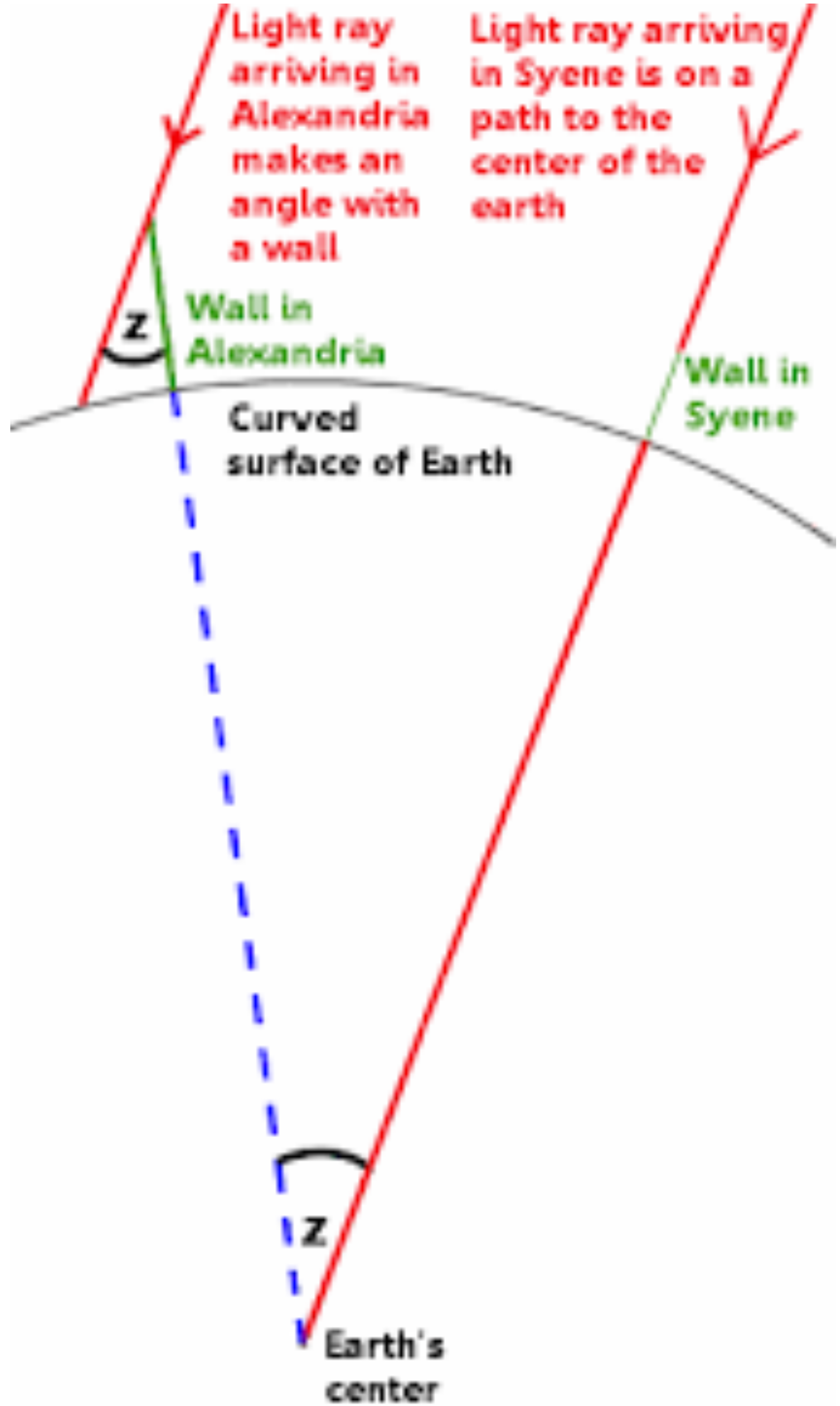
Logo, ou ABC + 1 é primo, ou é divisível por um primo que não está na lista original, que era {A, B, C}.

Eratóstenes
(276-194 aC)

Eratóstenes a ensinar em Alexandria
Bernardo Strozzi (1635)


1/50 of a circle ↔ 5 000 stadia (~800 km)
∴ 1 circle ↔ 50 × 5 000 stadia
= 250 000 stadia (~40 000 km)
Angle from lengths of the pole and its shadow: 1/50 of a circle (~7°)
Parallel sun rays
Pole's shadow
Pole at Alexandria
Alternate interior angles are equal
Well at Syene (Aswan)
Center of the Earth
Alexandria
5 000 stadia
Syene


from Sun
a
Alexandria
l
Syene
a
© Encyclopædia Britannica, Inc.



Light ray arriving in Alexandria makes an angle with a wall
Light ray arriving in Syene is on a path to the center of the earth
z
Wall in Alexandria
Wall in Syene
Curved surface of Earth
z
Earth's center

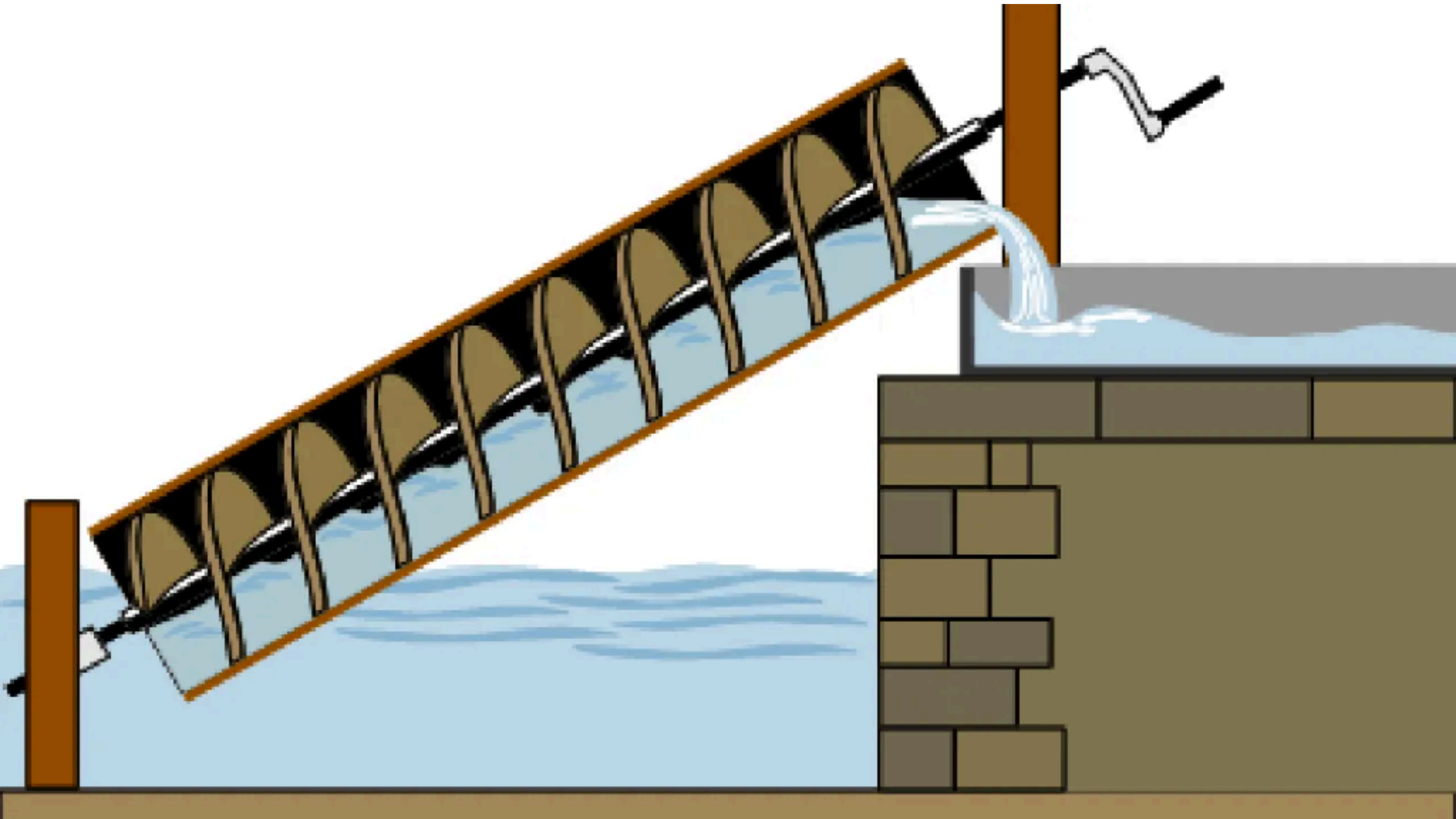
Prime numbers

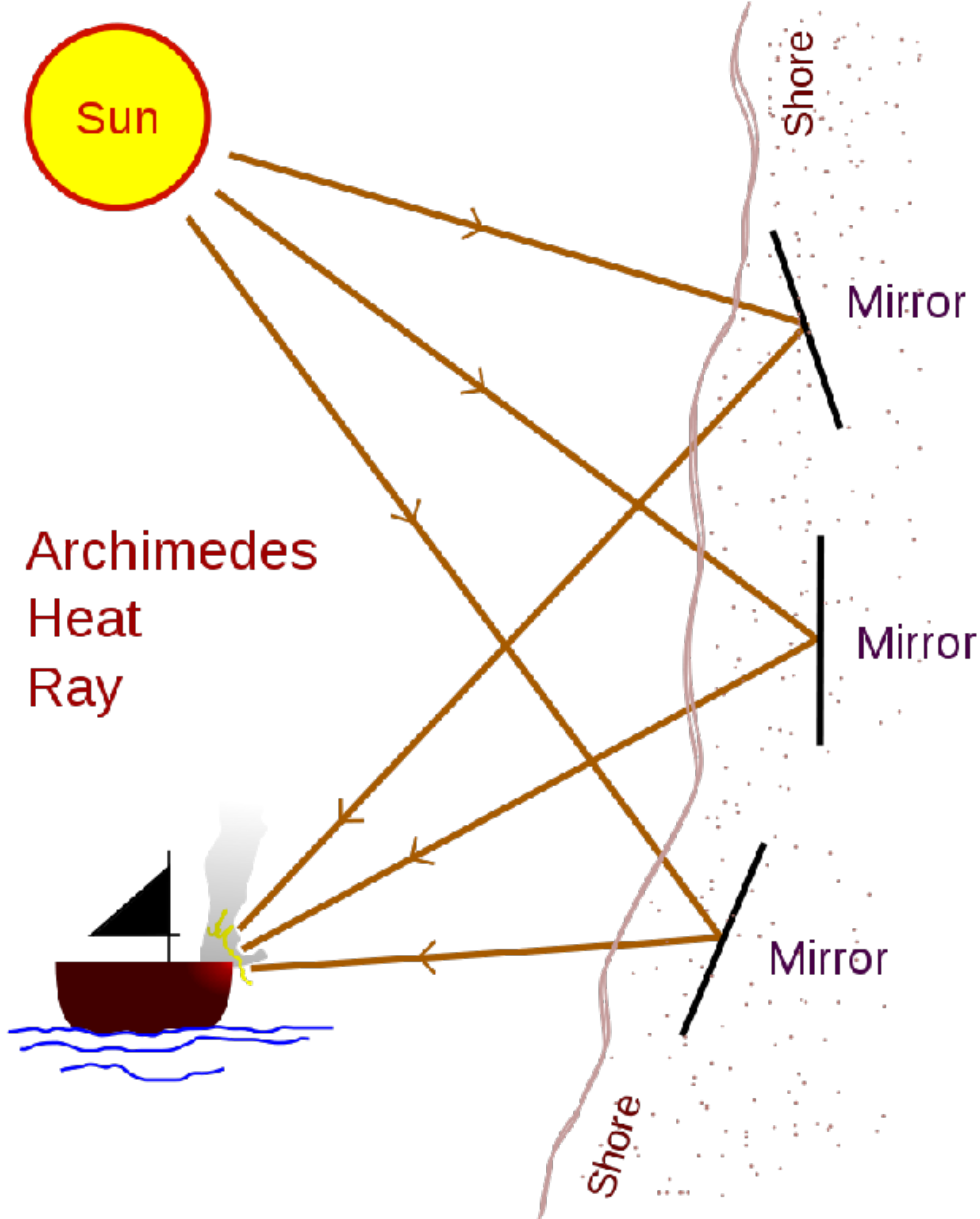
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

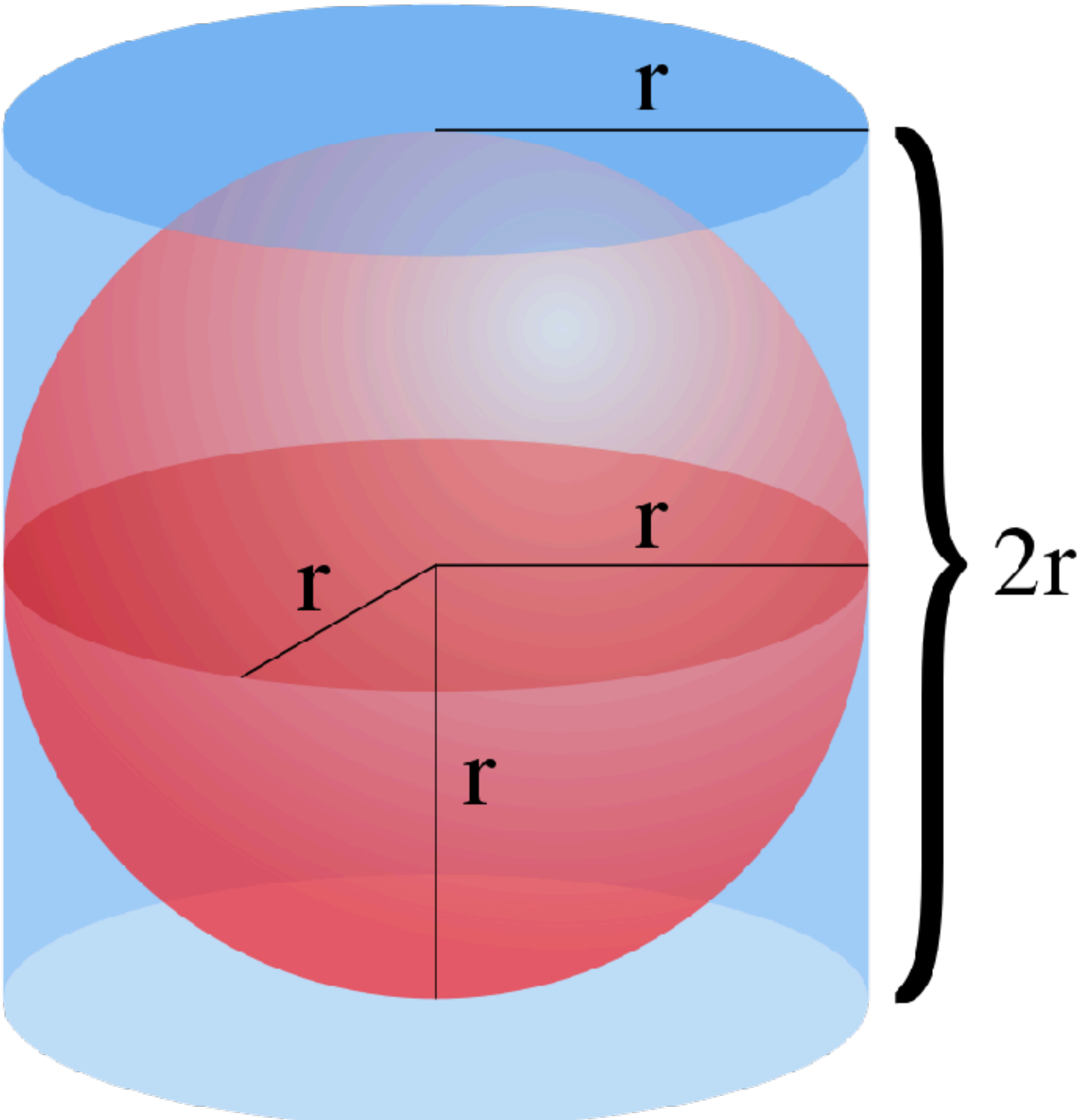
Arquimedes
(287–212 aC)

A morte de Arquimedes
Thomas Degeorge (1815)

O parafuso de Arquimedes



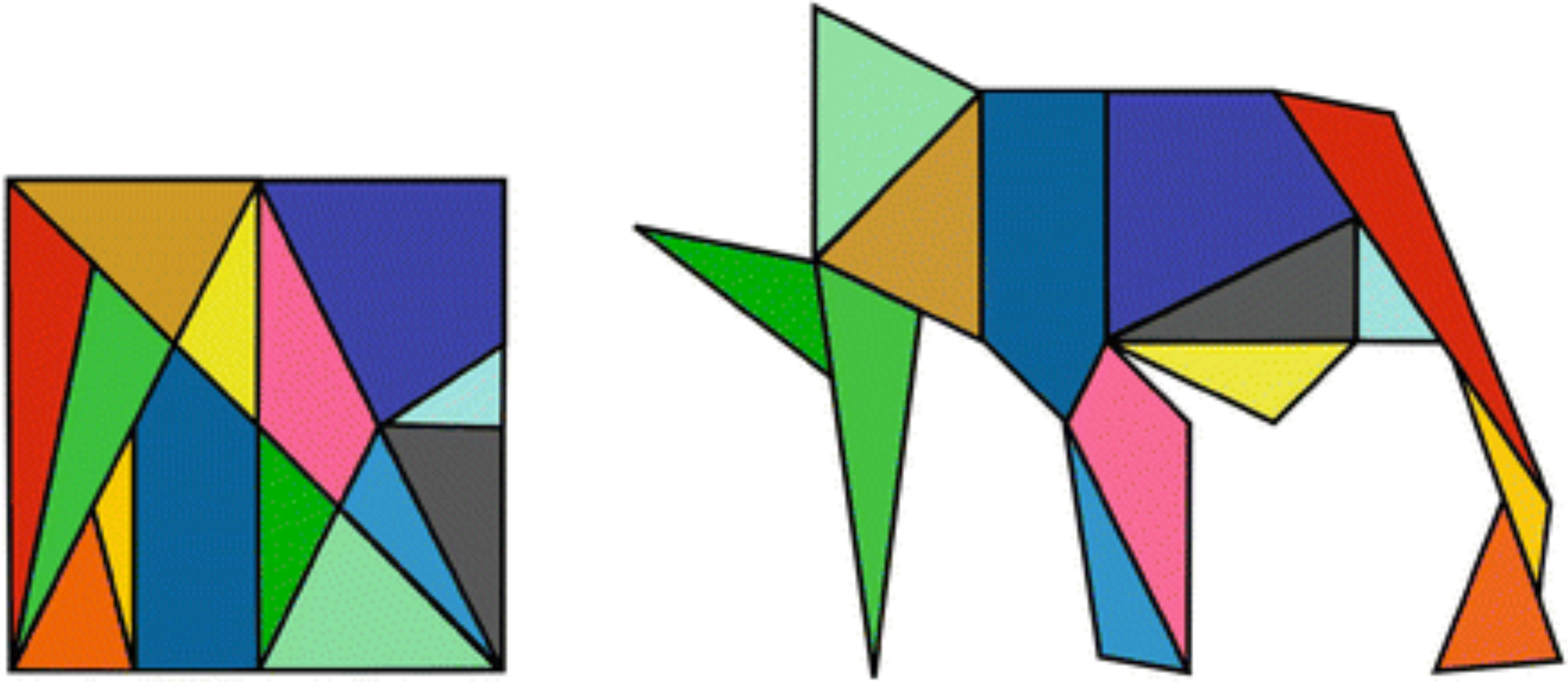

Sun
Shore
Mirror
Mirror
Mirror
Archimedes
Heat
Ray
Shore

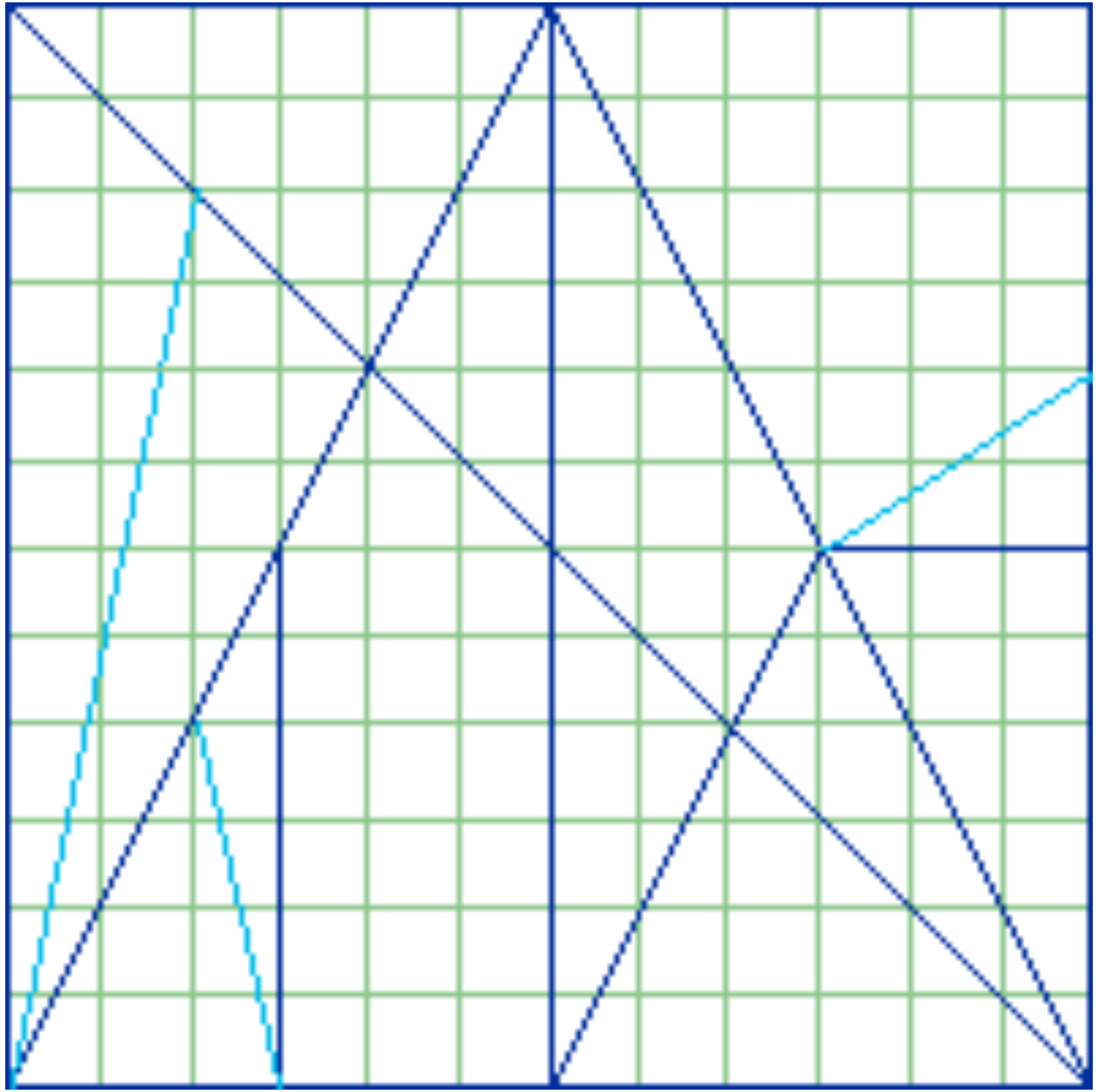

r
r
r
r
2r

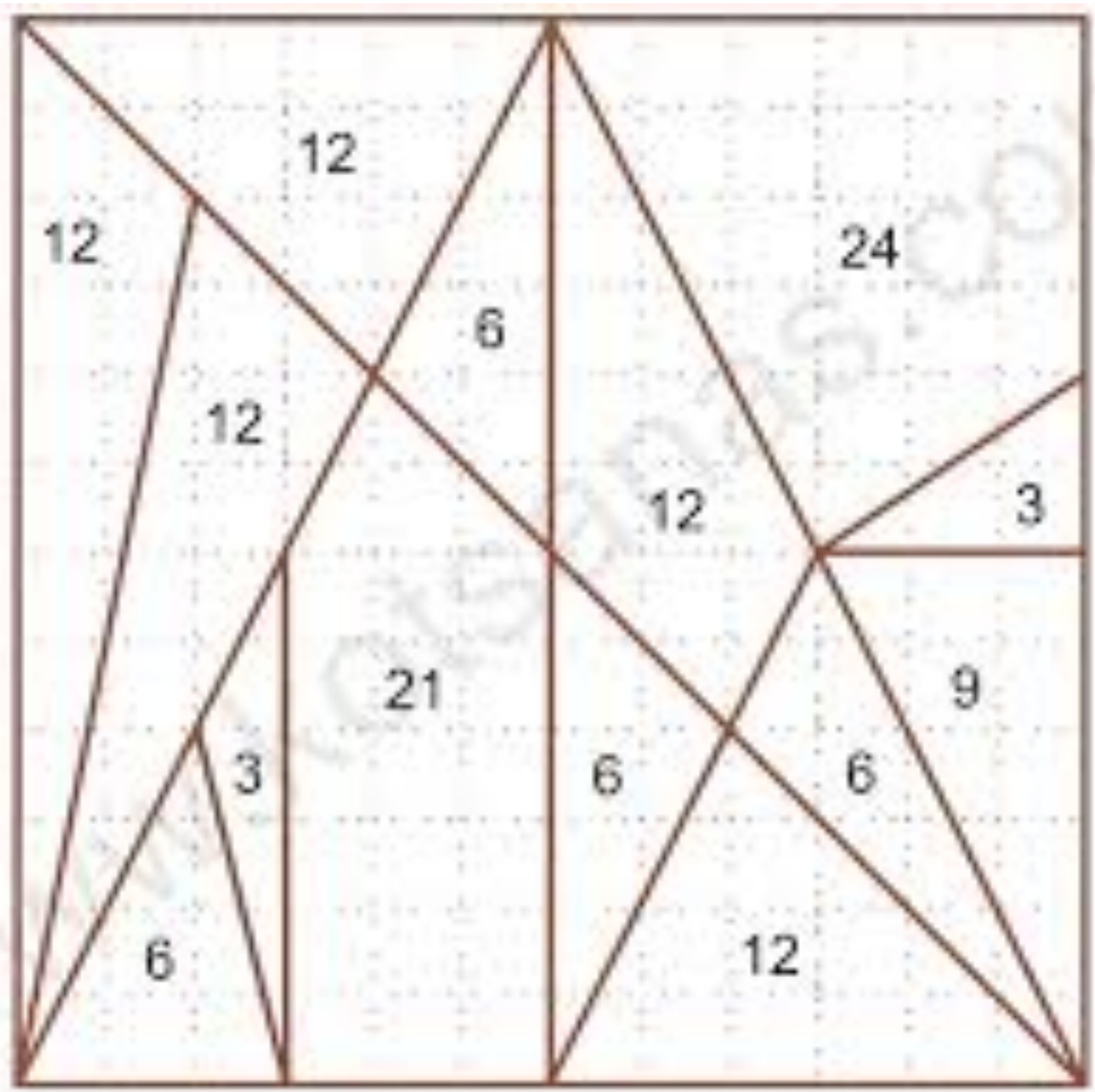
Volume da esfera = 2/3 do volume do cilindro circunscrito.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi r^3$$

O Palimpsesto






12
12
24
6
12
12
3
21
9
3
6
6
6
12

Centros de gravidade

Sete princípios, dos quais mostramos quatro.

I

Pesos iguais a distâncias iguais equilibram-se. Pesos iguais a distâncias diferentes não se equilibram, inclinando-se para a maior distância

II

Se dois pesos estão em equilíbrio e se acrescentarmos um peso, deixa de haver equilíbrio, inclinando-se para o peso que teve o acréscimo.

III

O mesmo para o caso de se retirar um peso.

VI

Se grandezas a certas distâncias se equilibram, então grandezas iguais equilibram-se à mesma distância.

Senso comum.

VI parece referir-se a centros de gravidade.

Arquimedes não definiu centro de gravidade, mas mais tardios, sim.

"O centro de gravidade de um corpo é um ponto do corpo tal que, se o corpo fosse pendurado por esse ponto, manteria a sua posição."

Prop. 1

Pesos que se equilibram a distâncias iguais são iguais.

Dem: Absurdo. Tirar do maior a diferença. Postulados I e III dão contradição.

Prop. II

Pesos diferentes a distâncias iguais não se equilibram, inclinando-se para o maior.

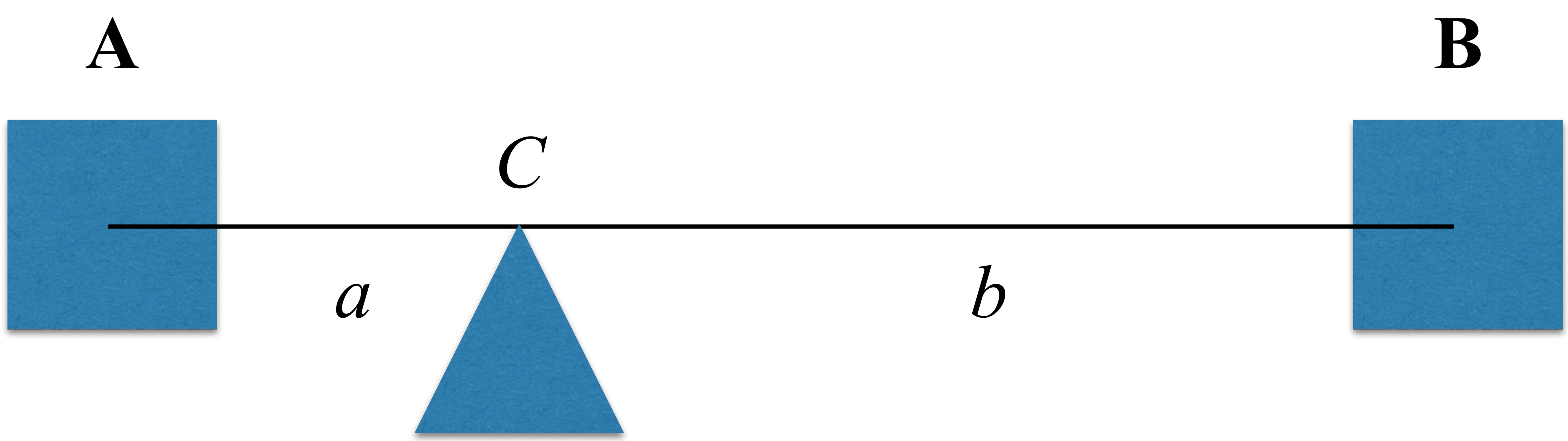
Dem: Tirar do maior a diferença, I dá equilíbrio. Juntar de novo, II dá a conclusão.

Prop III

Supor pesos diferentes **A**>**B** em equilíbrio relativamente a *C*.

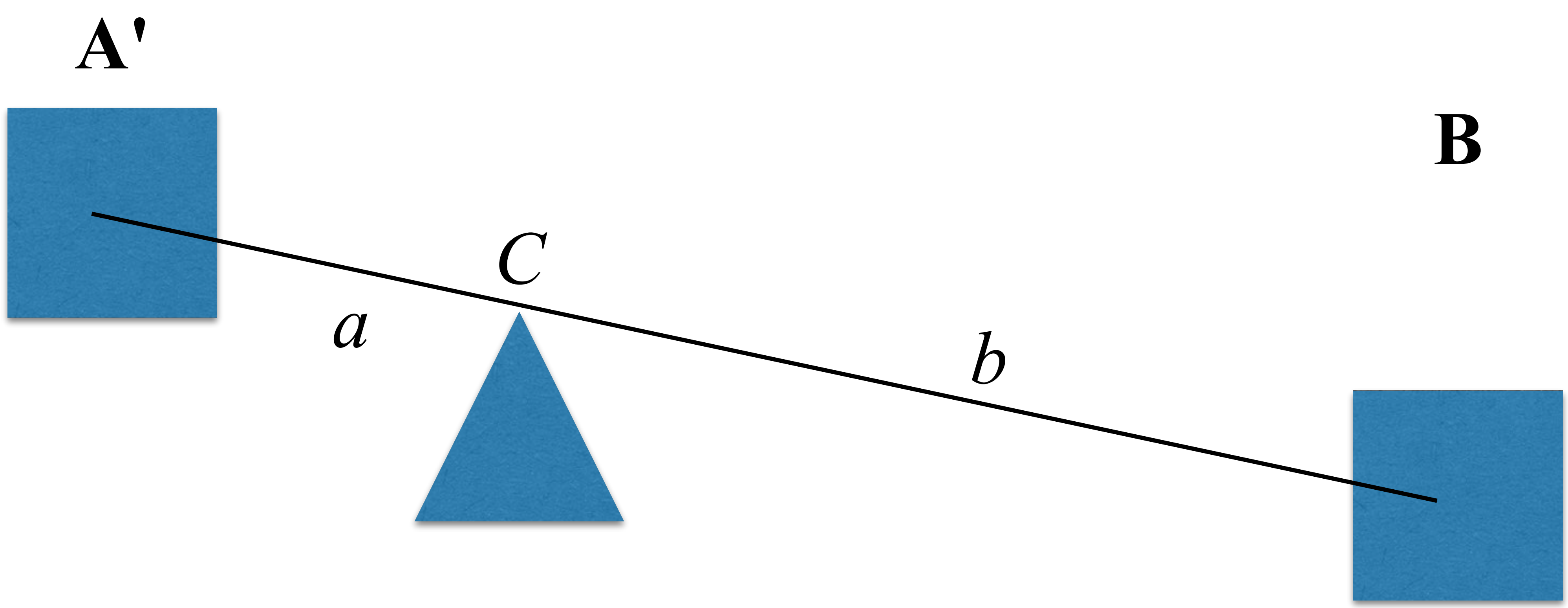
Seja **A***C*=*a* e **B***C*=*b*. Então *a*<*b*.

(Reciprocamente, se os pesos equilibram e *a*<*b* então **A**>**B**.)

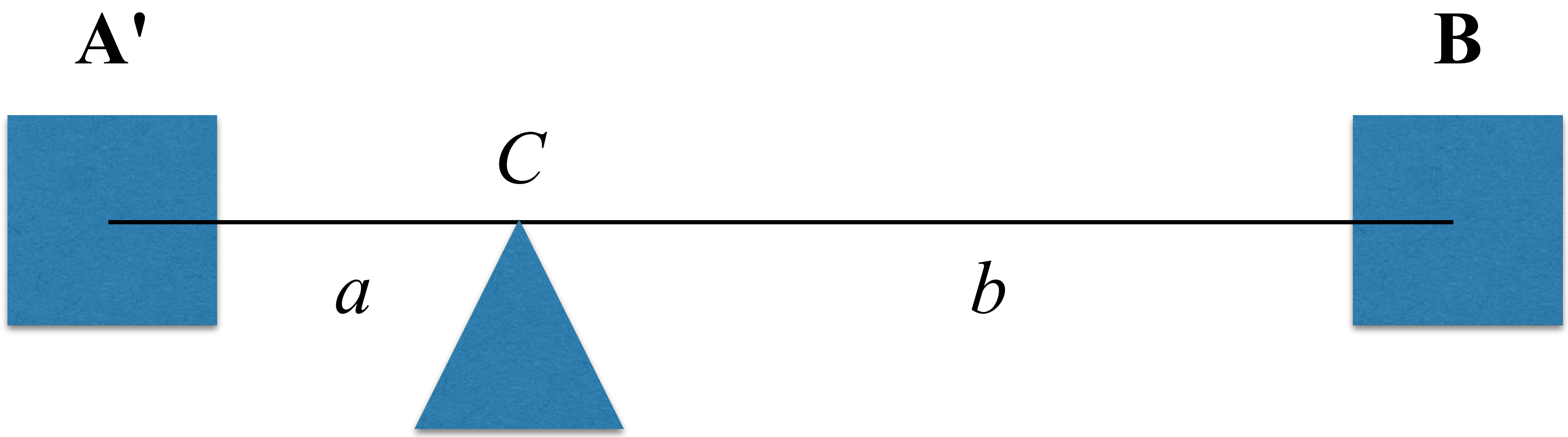


Dem: Por absurdo. Supor que *a* não é menor do que *b*.

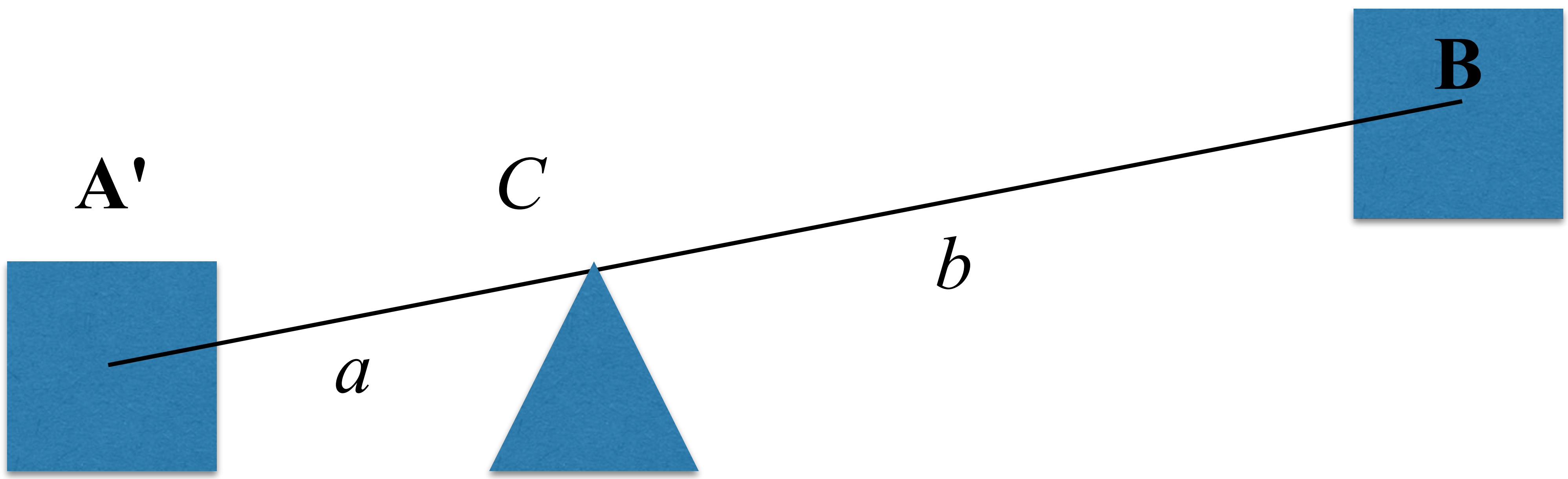
Seja **A'**=**A**-(**A**-**B**)   Pelo III, temos



Mas, se a=b, temos equilíbrio (lembrar que A' e B são iguais).



e se $a>b$, há desequilíbrio, por I.



Em ambos os casos há contradição, portanto a<b.

(A prova de **A>B** é semelhante).

Duas grandezas comensuráveis [Prop. 6] ou incomensuráveis [Prop. 7] equilibram-se a distâncias inversamente proporcionais às grandezas.

Centros de gravidade

I

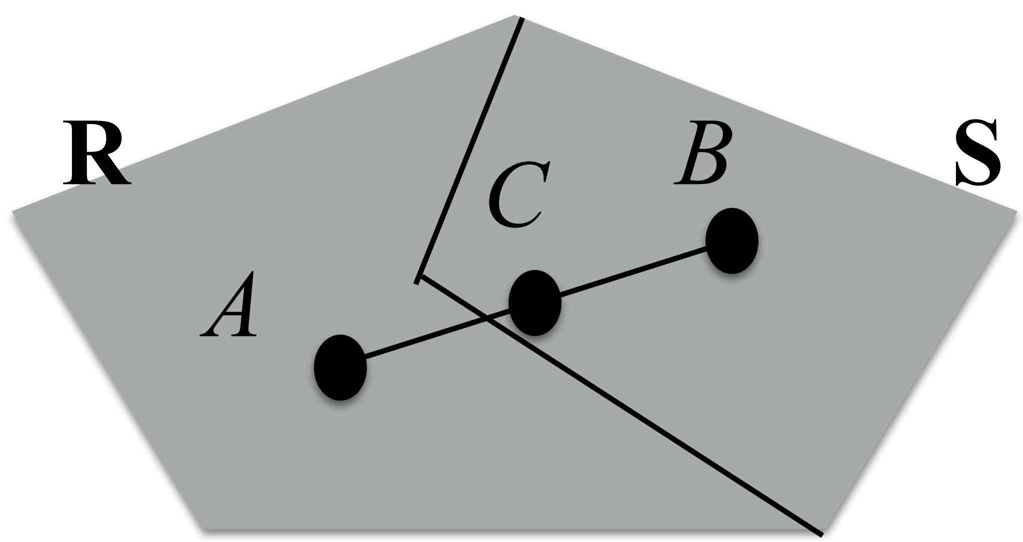
Os centros de gravidade de figuras semelhantes situam-se de forma semelhante.

II

O centro de gravidade de uma figura convexa pertence à figura.

III

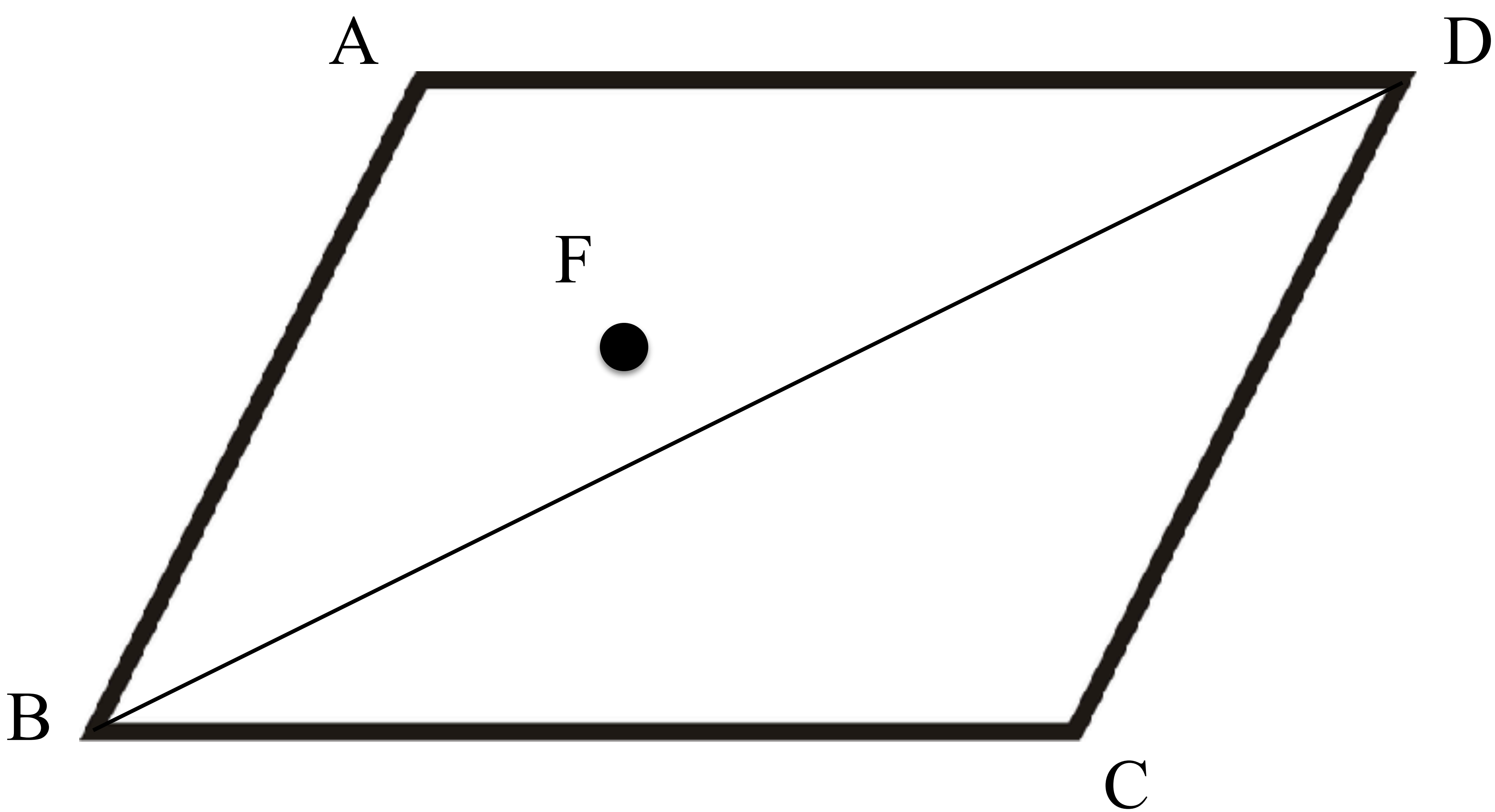
Se uma figura é partida em dois pedaços, o seu centro de gravidade está no segmento que une os centros de gravidade dos pedaços.



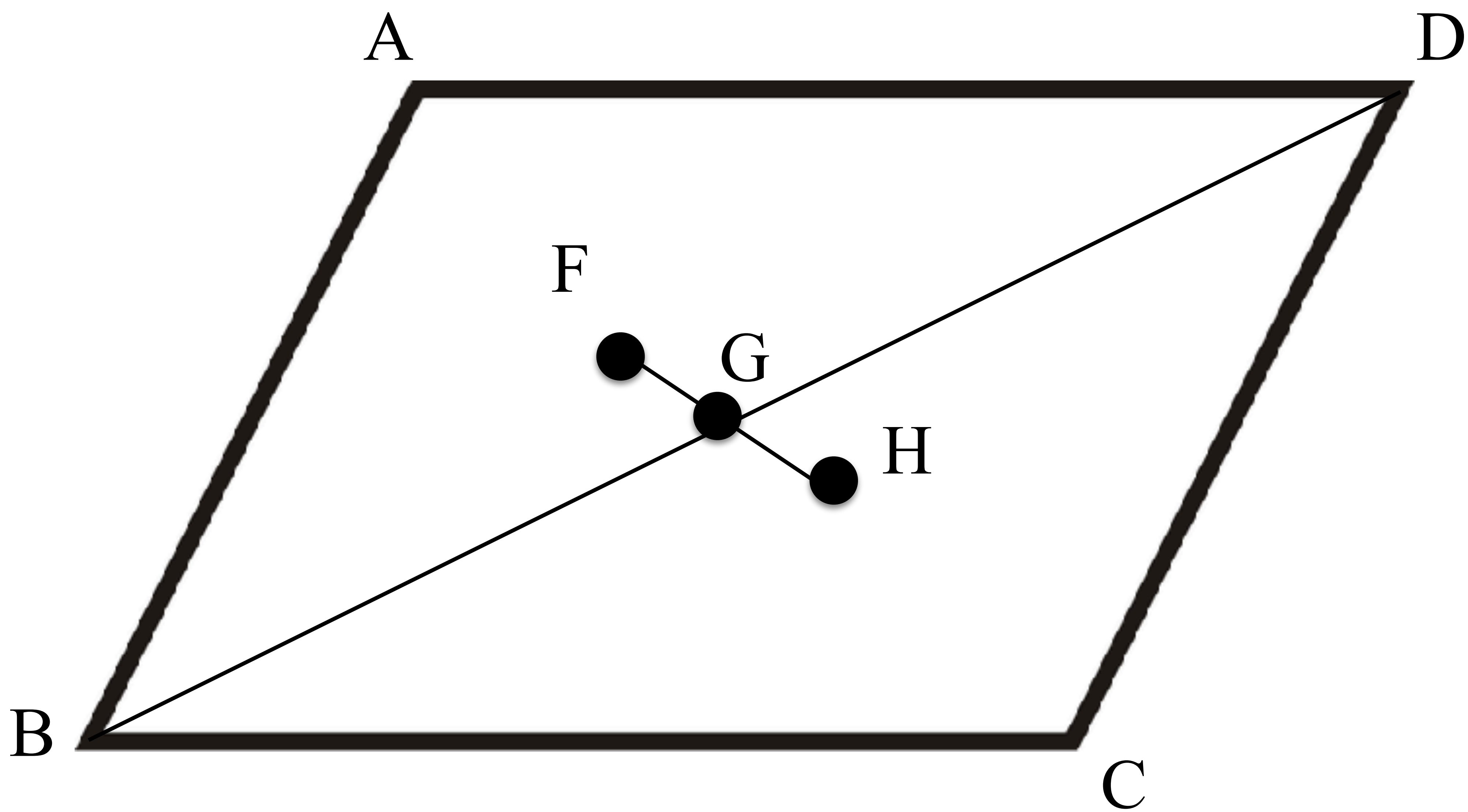
CA x área de $\mathbf{R}$ = CB x área de $\mathbf{S}$

Teorema: o centro de gravidade de um paralelogramo está no cruzamento das diagonais.

Dem: Suponhamos que o centro de gravidade do triângulo ABD é F.

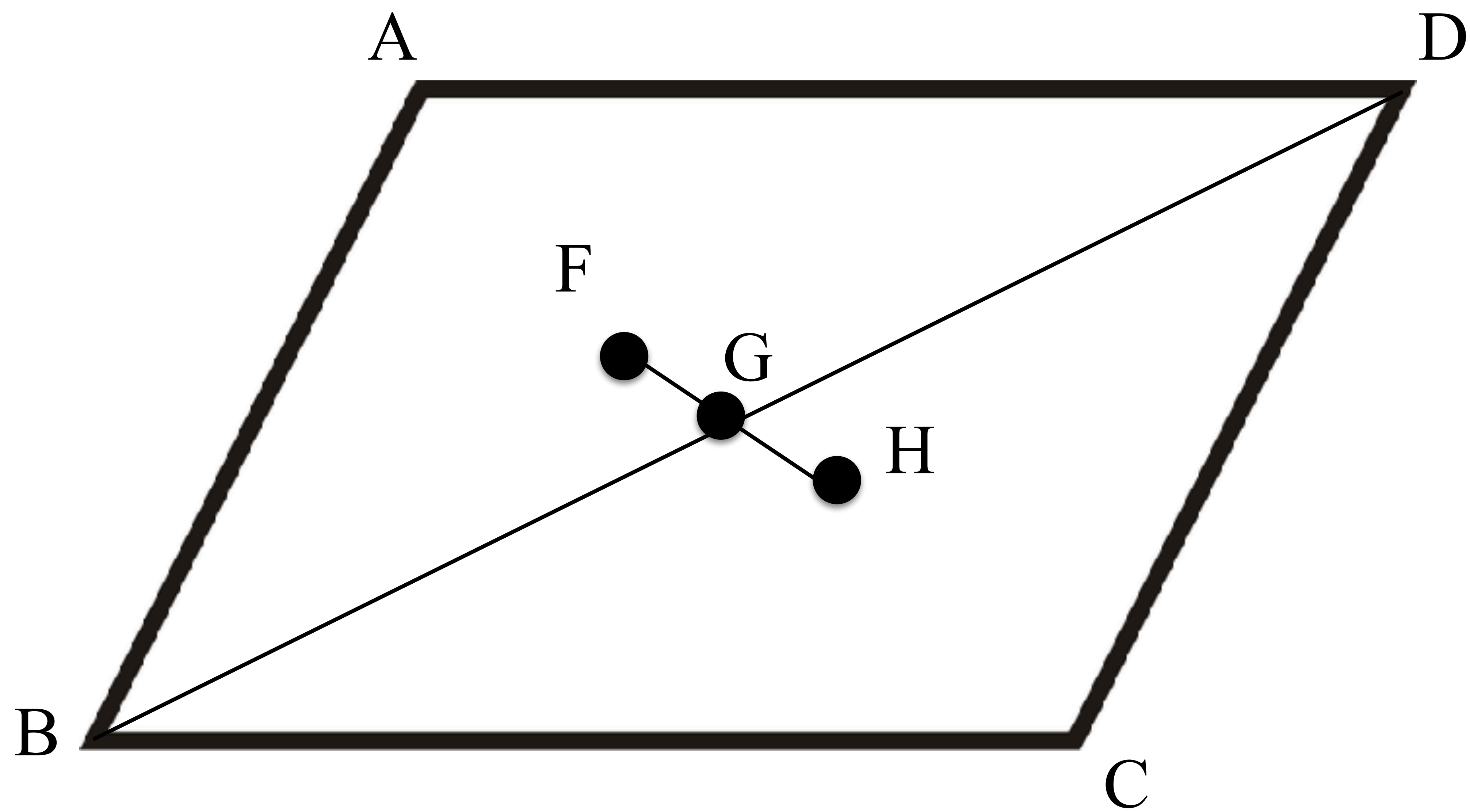


Seja G o ponto médio da diagonal e tome-se a reflexão de F em G, H.

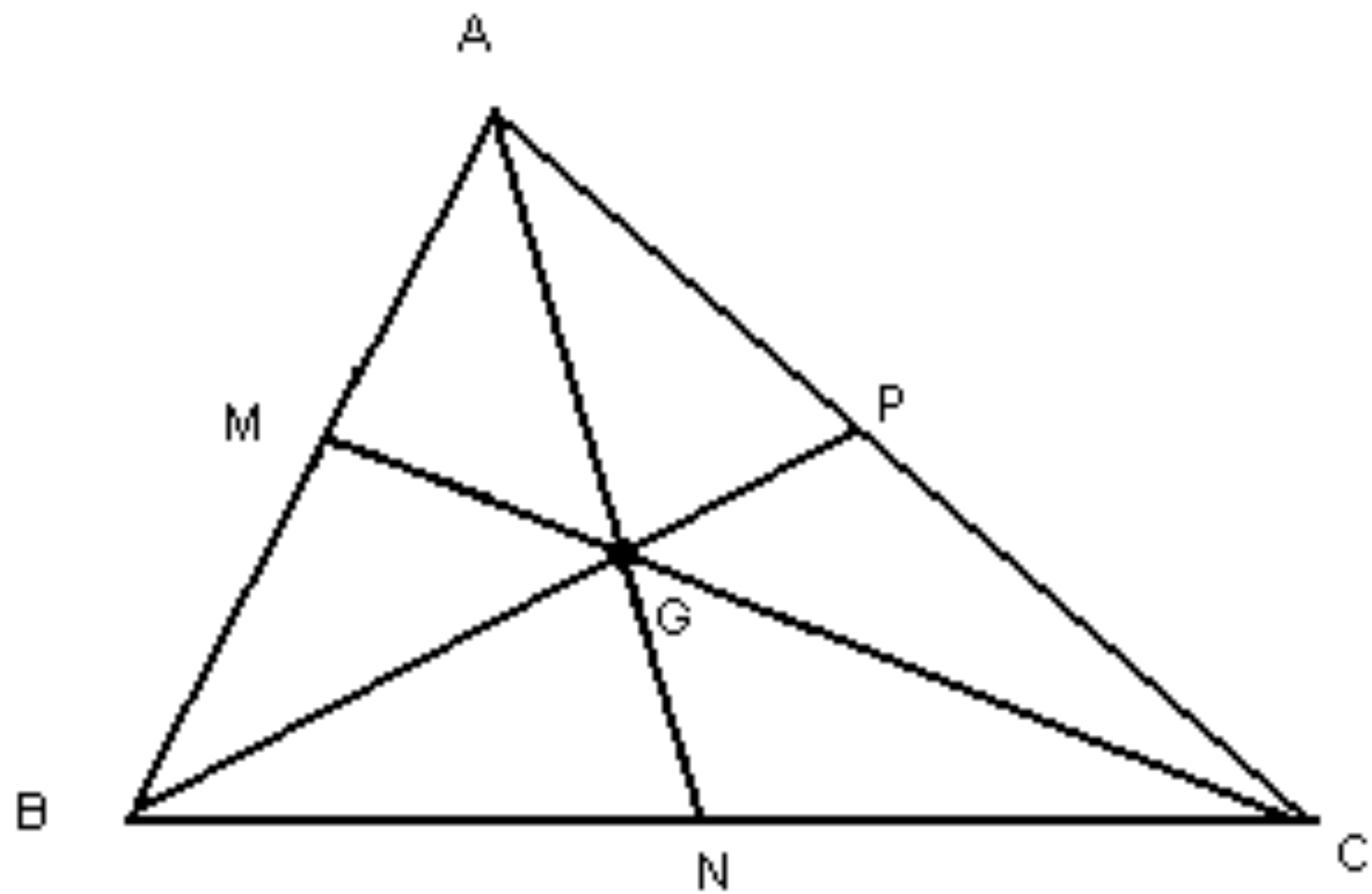


Por I, H é centro de gravidade do triângulo BCD.

Então, por III, o centro de gravidade do paralelogramo está sobre FH. Mas como as áreas dos triângulos são iguais, terá de estar no ponto médio, G.



O centro de gravidade de um triângulo está na intersecção dos segmentos que ligam os vértices aos pontos médios dos lados opostos (*medianas*). Isto é, é o **baricentro**.

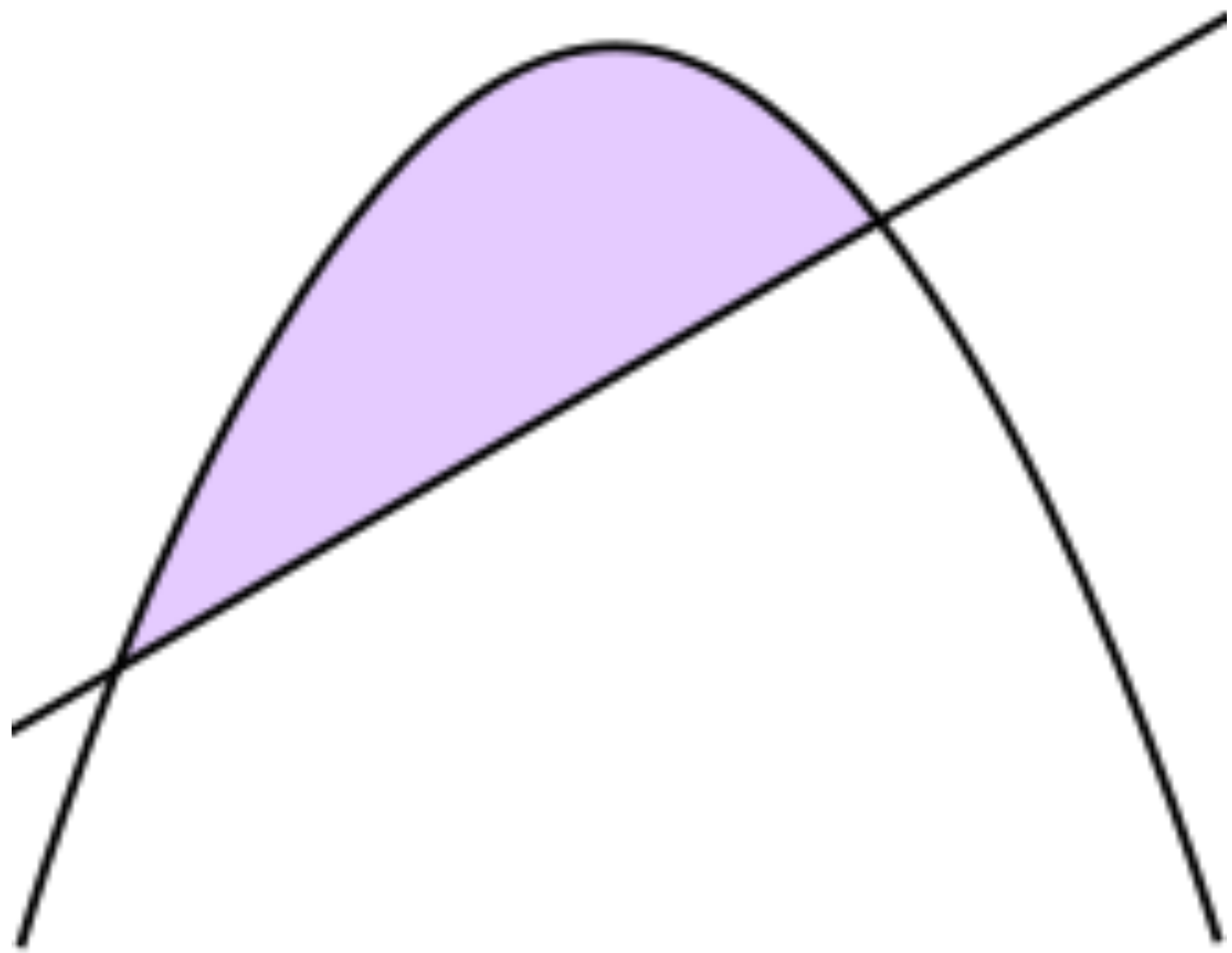


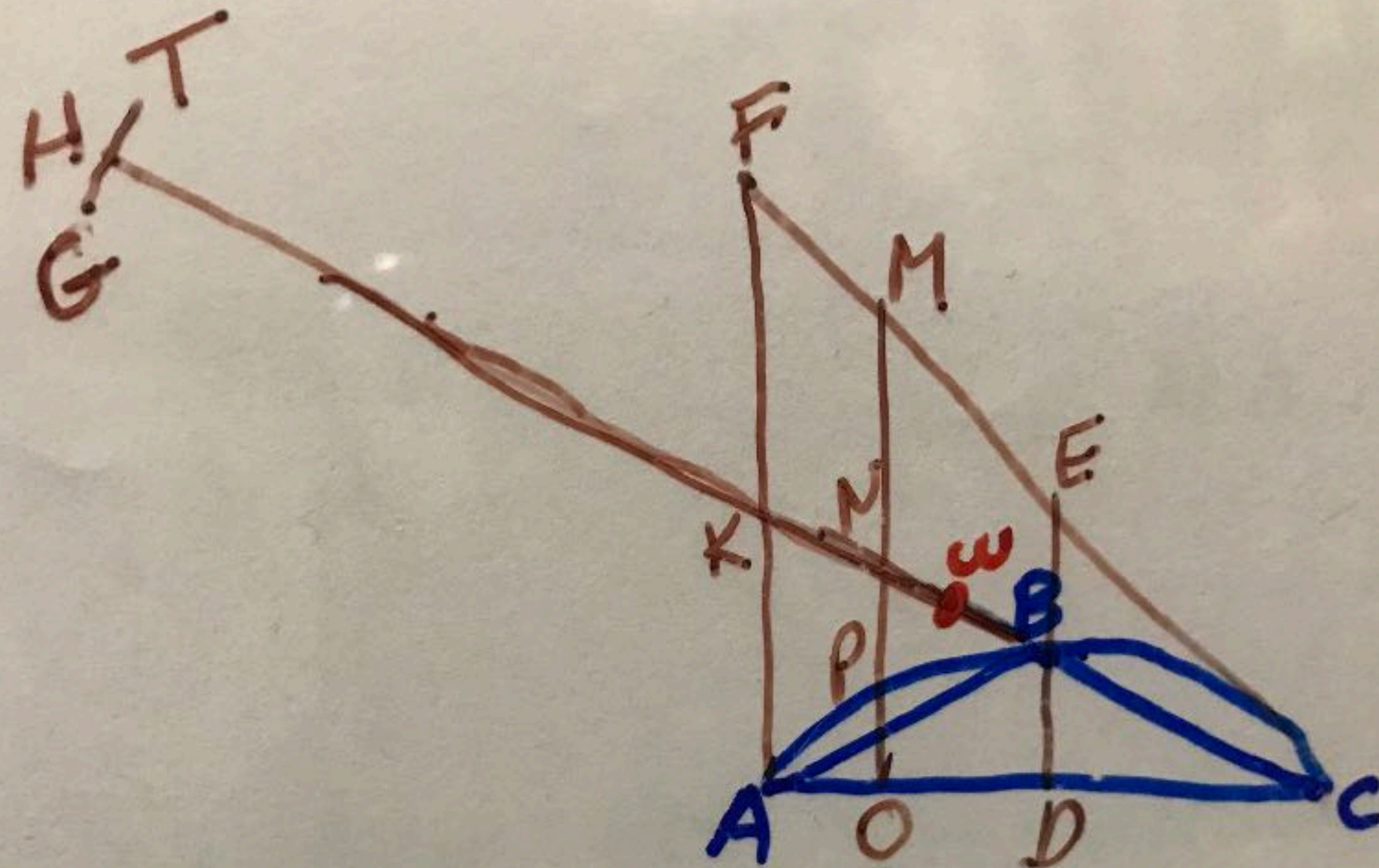
"a intuição física e mecânica descobre, a argumentação rigorosa prova".

"É mais fácil provar um resultado quando já se sabe a resposta certa".

08.10.2020

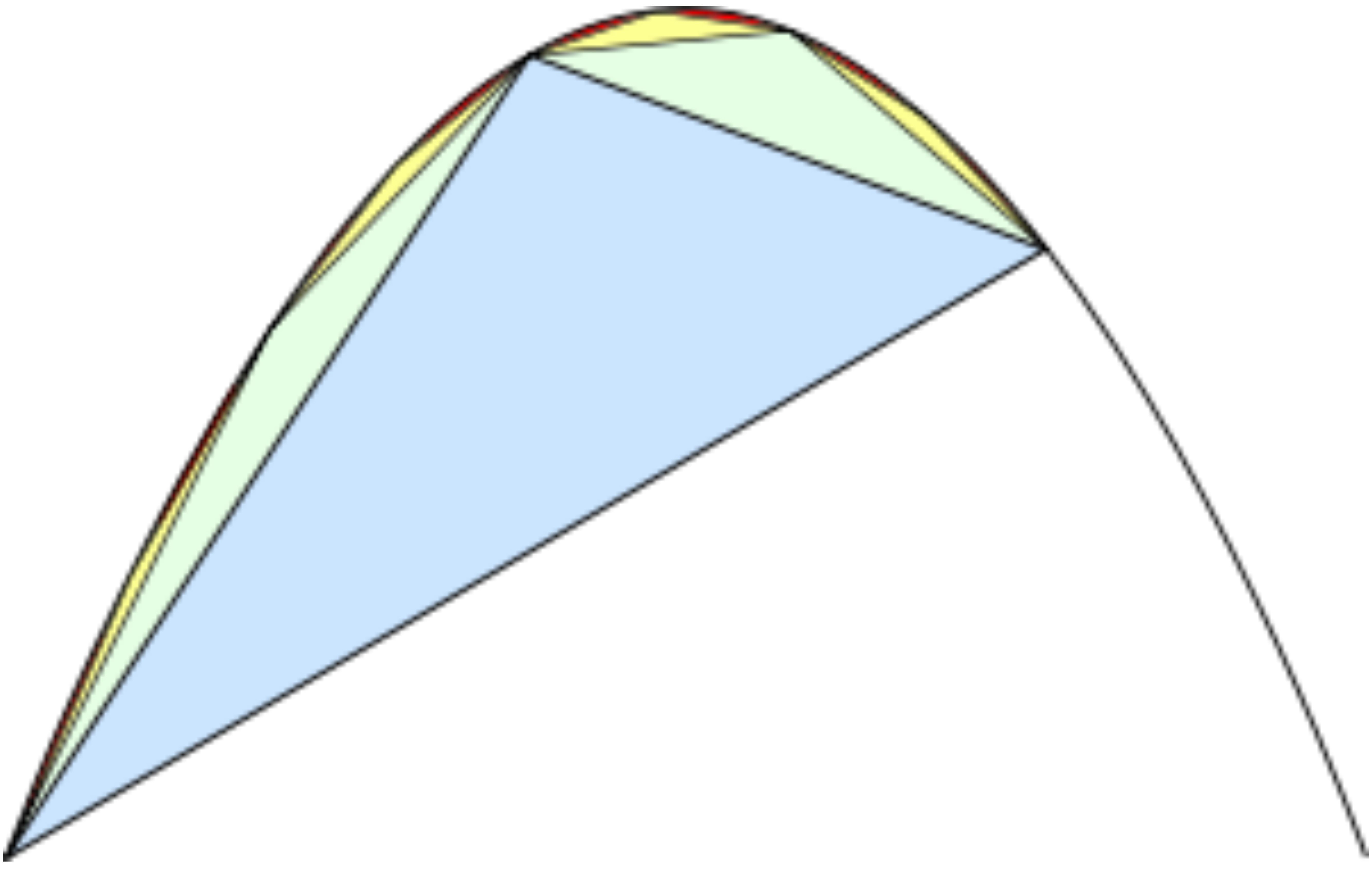
Área do segmento de parábola

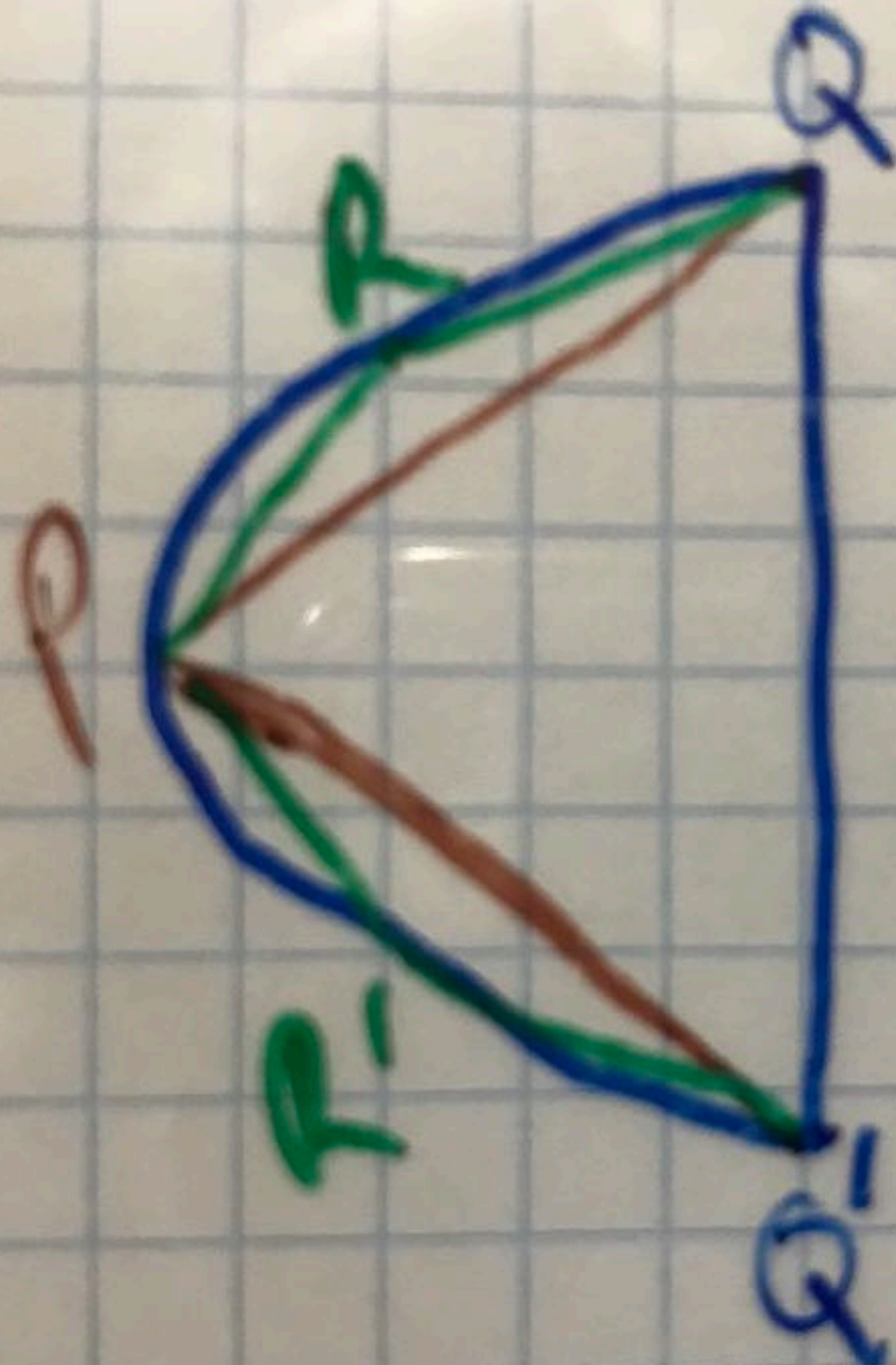




Jere: $\frown ABC = \frac{4}{3} \triangle ABC$

Tese: $\triangle CFA$ onde está equilátero $\frown ABC$ em H.
Linha a linha.




Q
R
P
R'
Q'

Em cada passo Arquimedes calcula que a área dos novos triângulos é $\frac{1}{4}$ a área dos anteriores (imediatamente). Assim, há de calcular

$$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \cdots$$

onde a é a área do $\Delta PQQ'$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{3}$$

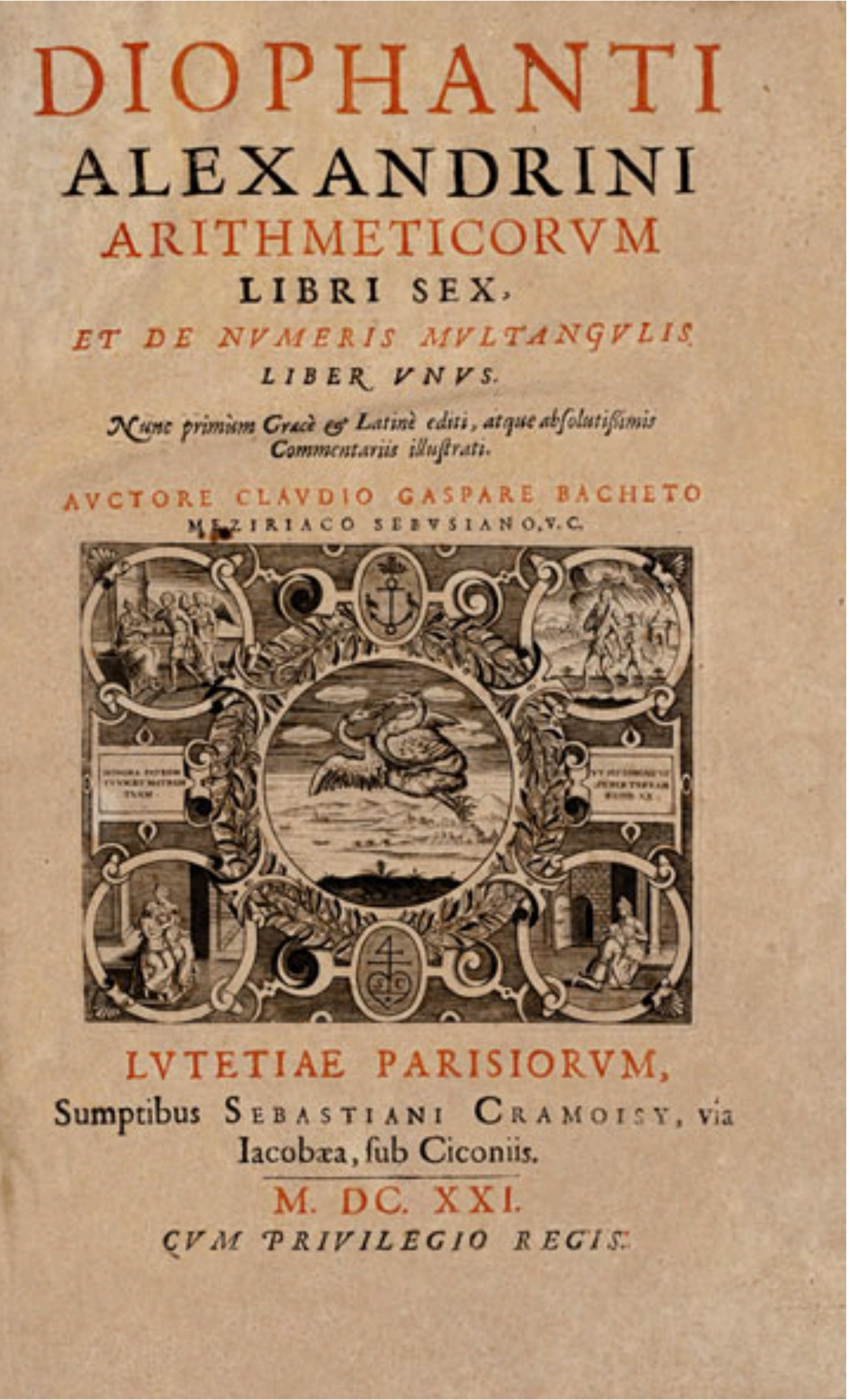
mas isto é uma série (infinidade de parcelas...)

Arquimedes mostrou que, tome quantas parcelas tomar, nunca excede nenhum número maior do que 4/3:

$$A > \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} < A \quad \forall k$$

e que excede qualquer número menor, se tomar um número apropriado de parcelas:

$$B < \frac{4}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n} > B \quad para\ algum\ k$$



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Arithmetica
tradução de 1621 de Bachet

"um menos multiplicado por um menos dá um mais."

"Um menos multiplicado por um mais dá um menos"

I-1 Dividir um número dado em dois com uma diferença fixada.

Seja o número dado 100 e a diferença 40...

Em geral, dado ***a*** e a diferença ***b***, com ***b<a***, a solução é

$$\frac{a-b}{2} \quad \text{e} \quad \frac{a+b}{2}$$

I- 28 Determinar dois números cuja soma e soma dos seus quadrados são dados.

$$x + y = 20 \qquad , \qquad x^2 + y^2 = 208$$

Esperteza de Diofanto:

$$x = 10 - z \qquad , \qquad y = 10 + z$$

Em geral, para

$$\begin{cases} x + y & = & a \\ x^2 + y^2 & = & b \end{cases}$$

ter soluções racionais é necessário

$$2b - a^2 = \square$$

neste caso, o método de Diofanto dá as soluções

$$\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$$

II-8 Dividir um quadrado em dois quadrados.

Seja o quadrado dado 16 e um dos quadrados a determinar x^2

Só falta $16 - x^2$ ser um quadrado

Ideia de Diofanto: fazer

$$16 - x^2 = (ax - 4)^2$$

e escolher o inteiro ***a*** depois (o 4 vem de ser a raiz de 16...)

Para ***a=2***, vem

$$16 - x^2 = (2x - 4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$$

donde ***x***=16/5

$$x^2 = \frac{256}{25} \quad , \quad 16 - x^2 = \frac{144}{25} = \left(\frac{12}{5}\right)^2$$

II-11 Somar o mesmo número (a incógnita) a dois números dados produzindo quadrados

Diofanto: Sejam os números dados 2 e 3.

$$\begin{cases} 2 + x & = & u^2 \\ 3 + x & = & v^2 \end{cases}$$

(indeterminado, claro...)

Subtraindo uma equação da outra:

$$1 = v^2 - u^2 = (v - u)(v + u)$$

Como Diofanto avança:

$$\begin{cases} v - u & = & \frac{1}{4} \\ v + u & = & 4 \end{cases}$$

... $\boldsymbol{x}$=97/64.

B-7: Encontrar dois números cuja soma e a soma dos seus cubos são números dados.

$$\begin{cases} x + y & = & a \\ x^3 + y^3 & = & b \end{cases}$$

Diofanto: sejam os números dados 20 e 2240

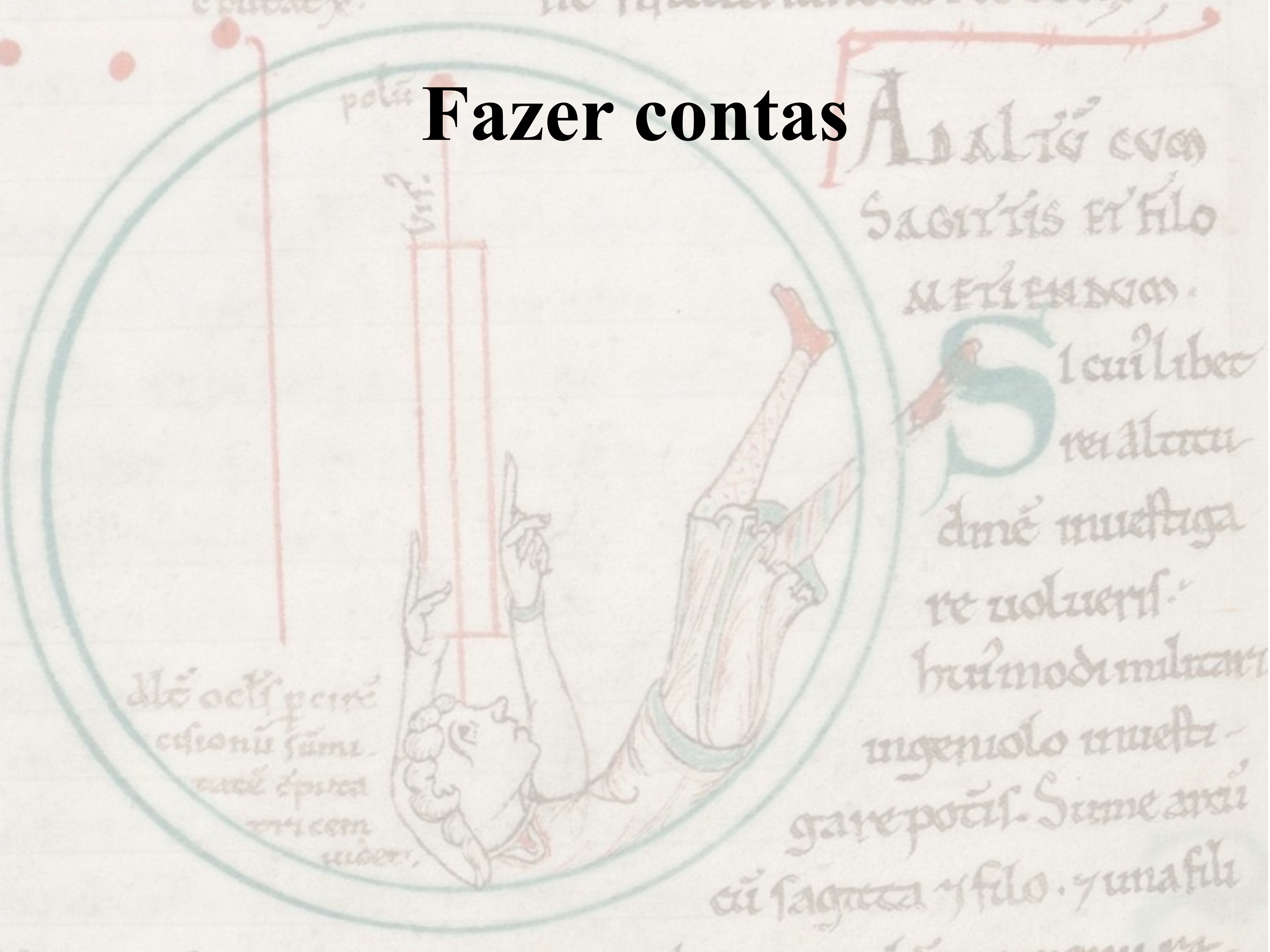
$$\begin{cases} x + y & = & 20 \\ x^3 + y^3 & = & 2240 \end{cases}$$

e ainda: $x=10-z$, $y=10+z$

$$(10-z)^3+(10+z)^3=2240$$

que dá $z=2$. Donde $x=8$, $y=12$.

Fazer contas

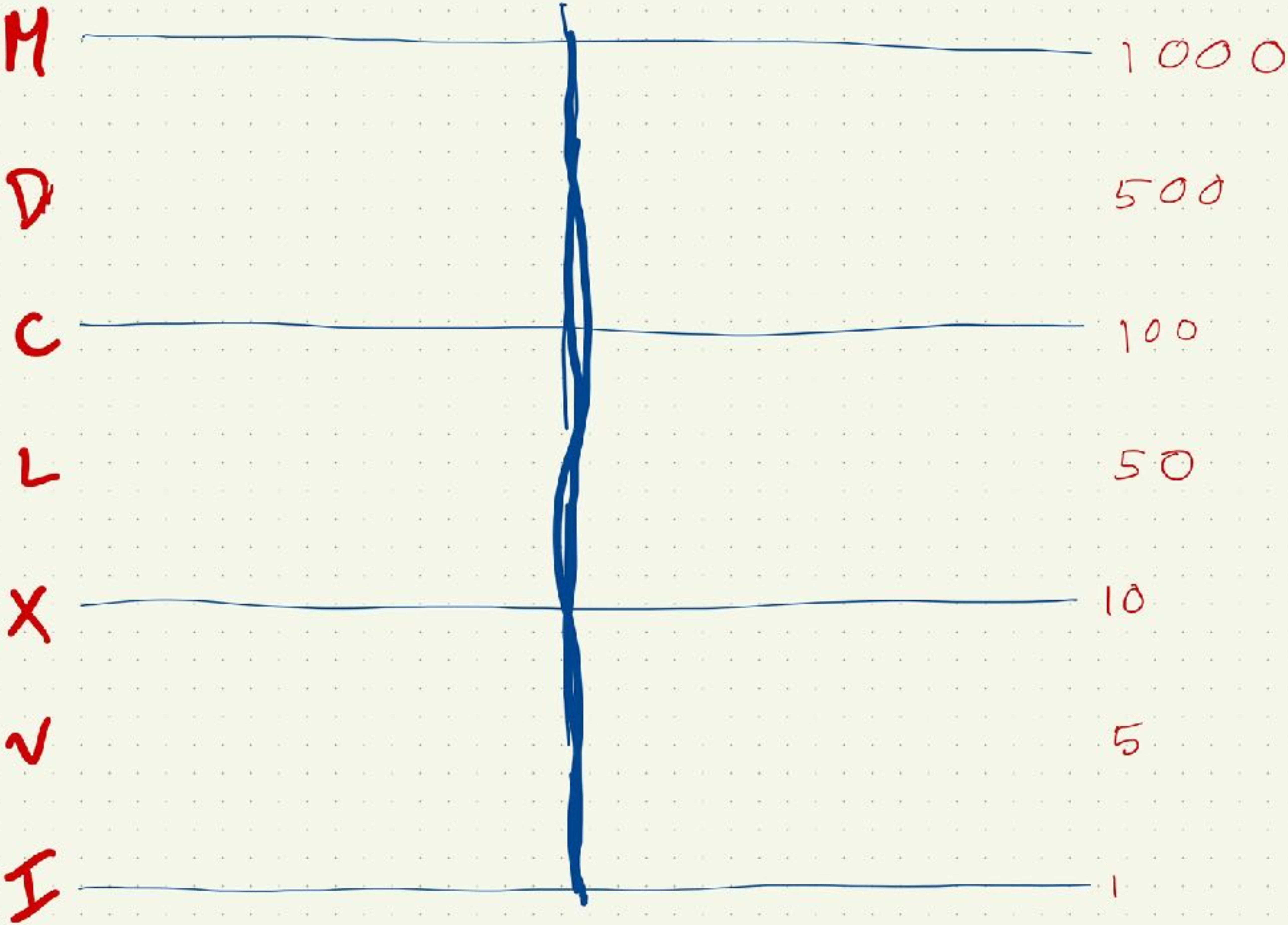


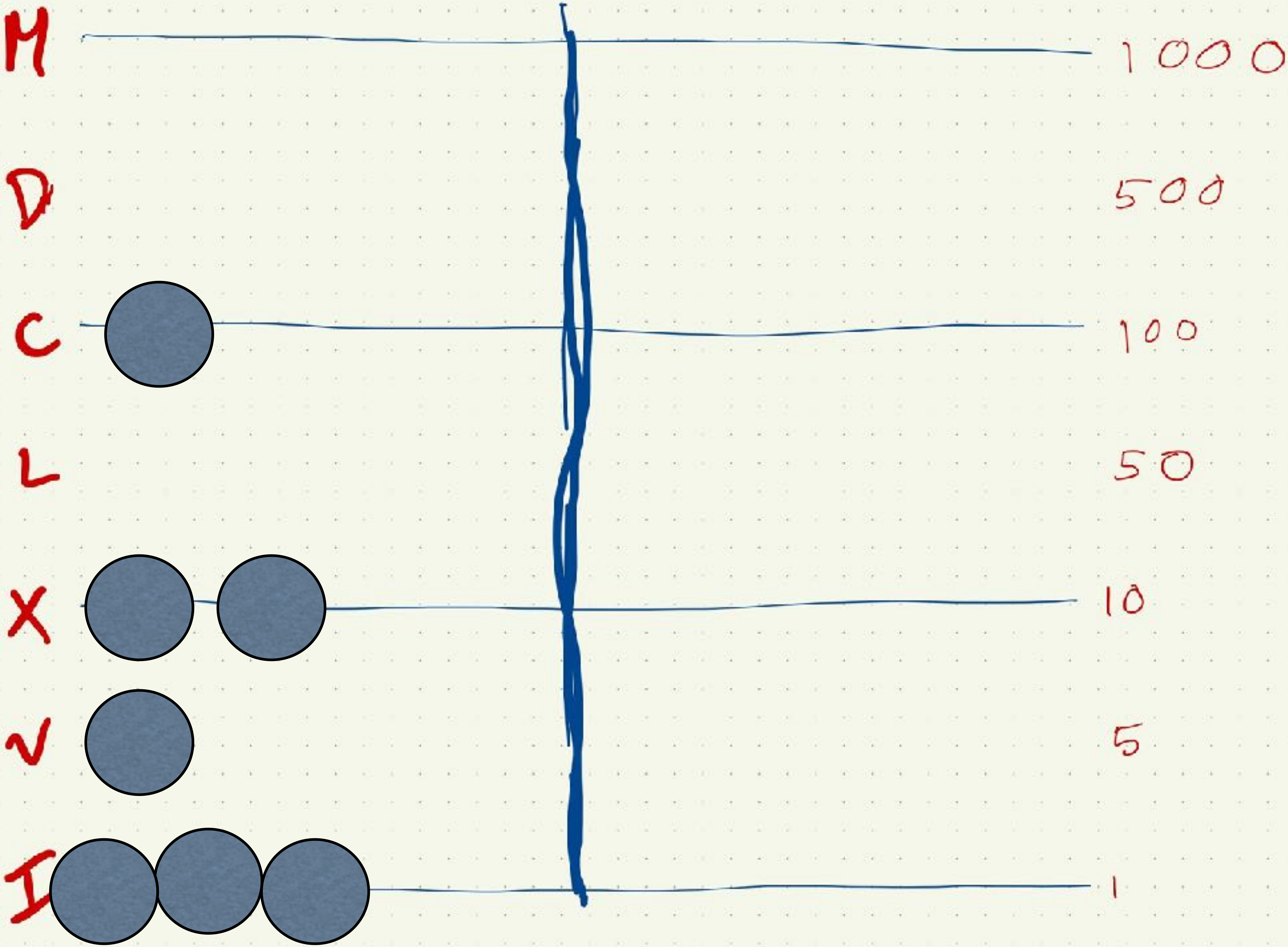
CF Ludus

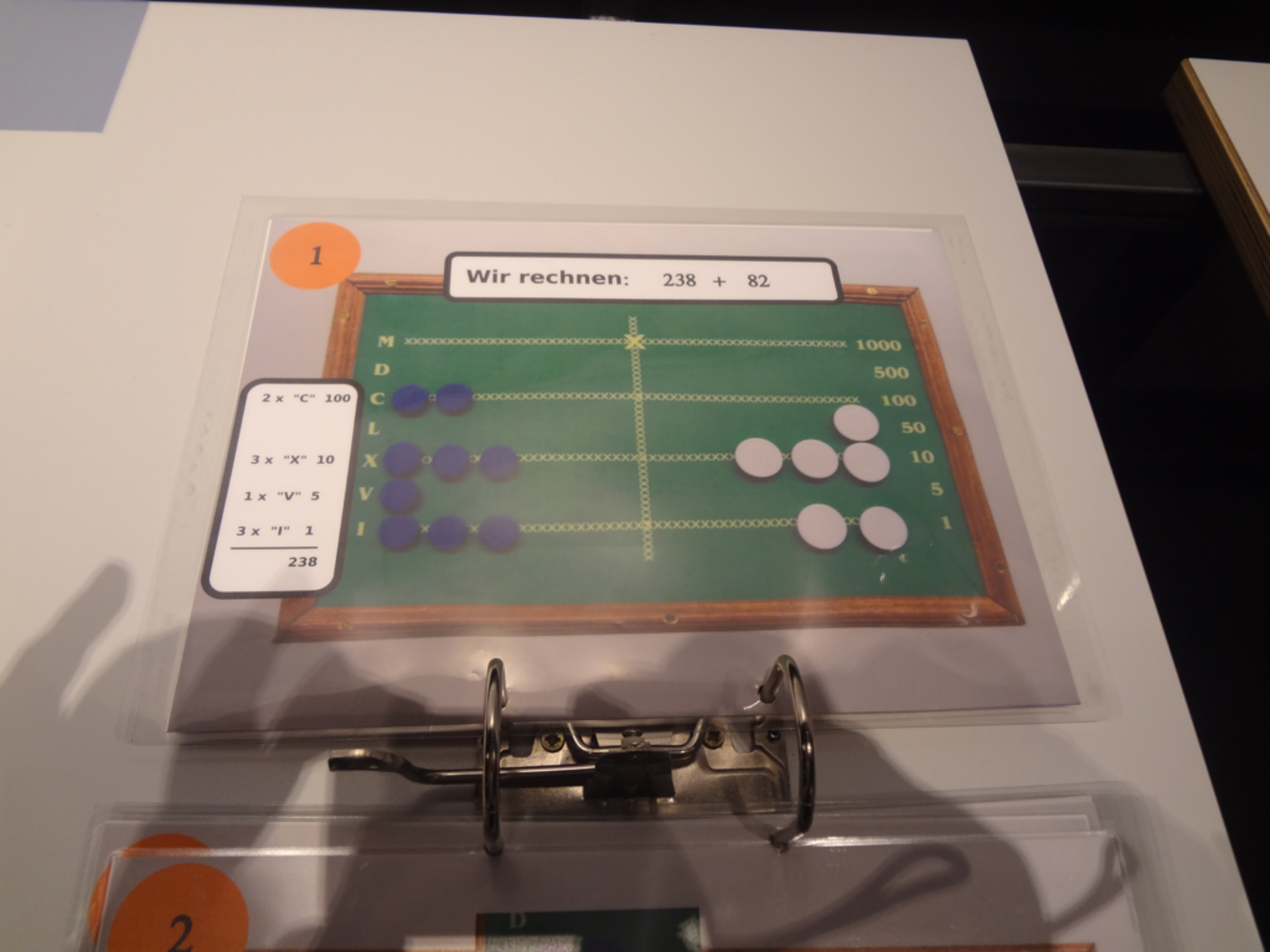
CCPFC/ENT-NI-0148/19

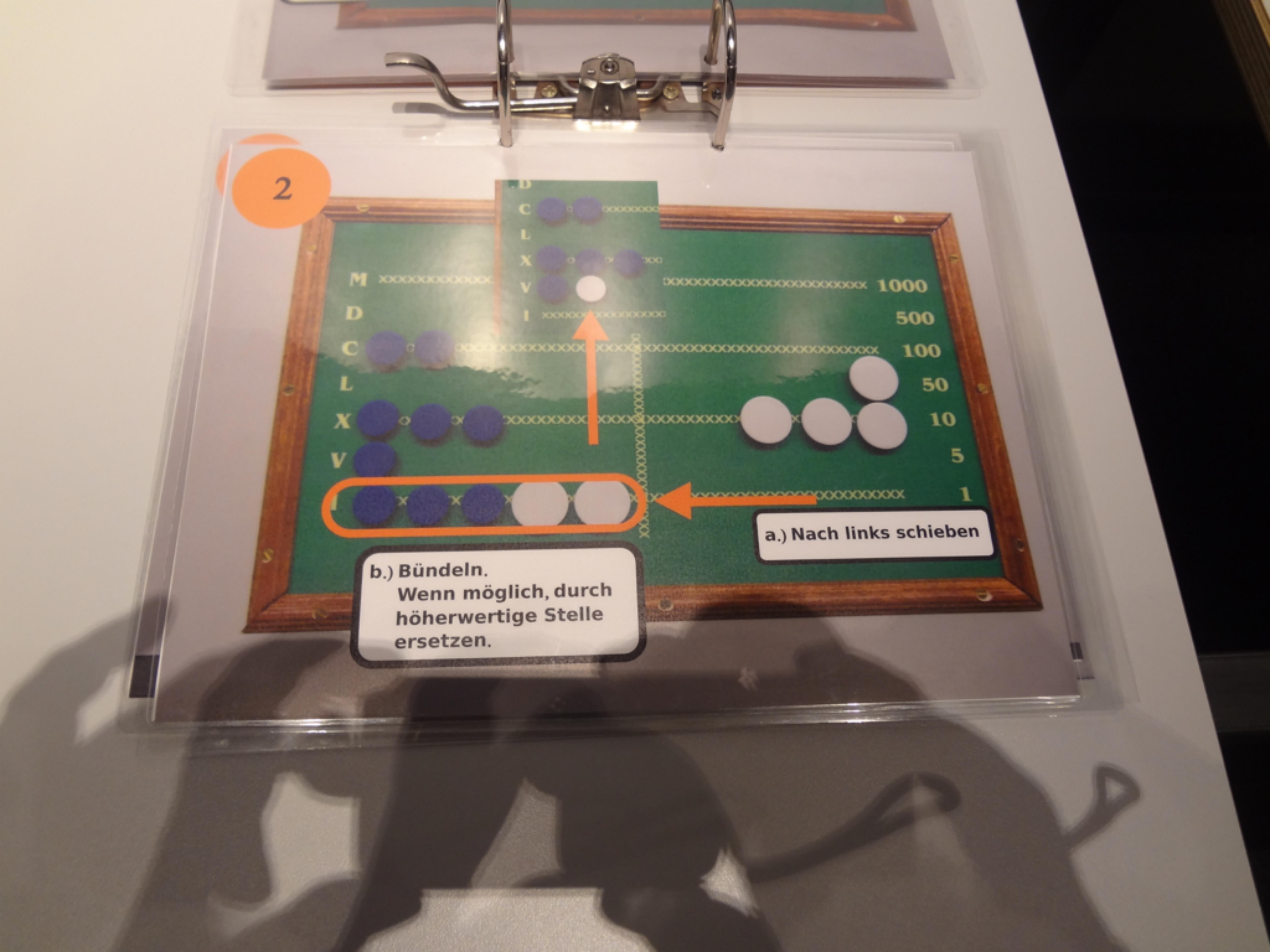
História da Matemática na Sala de Aula

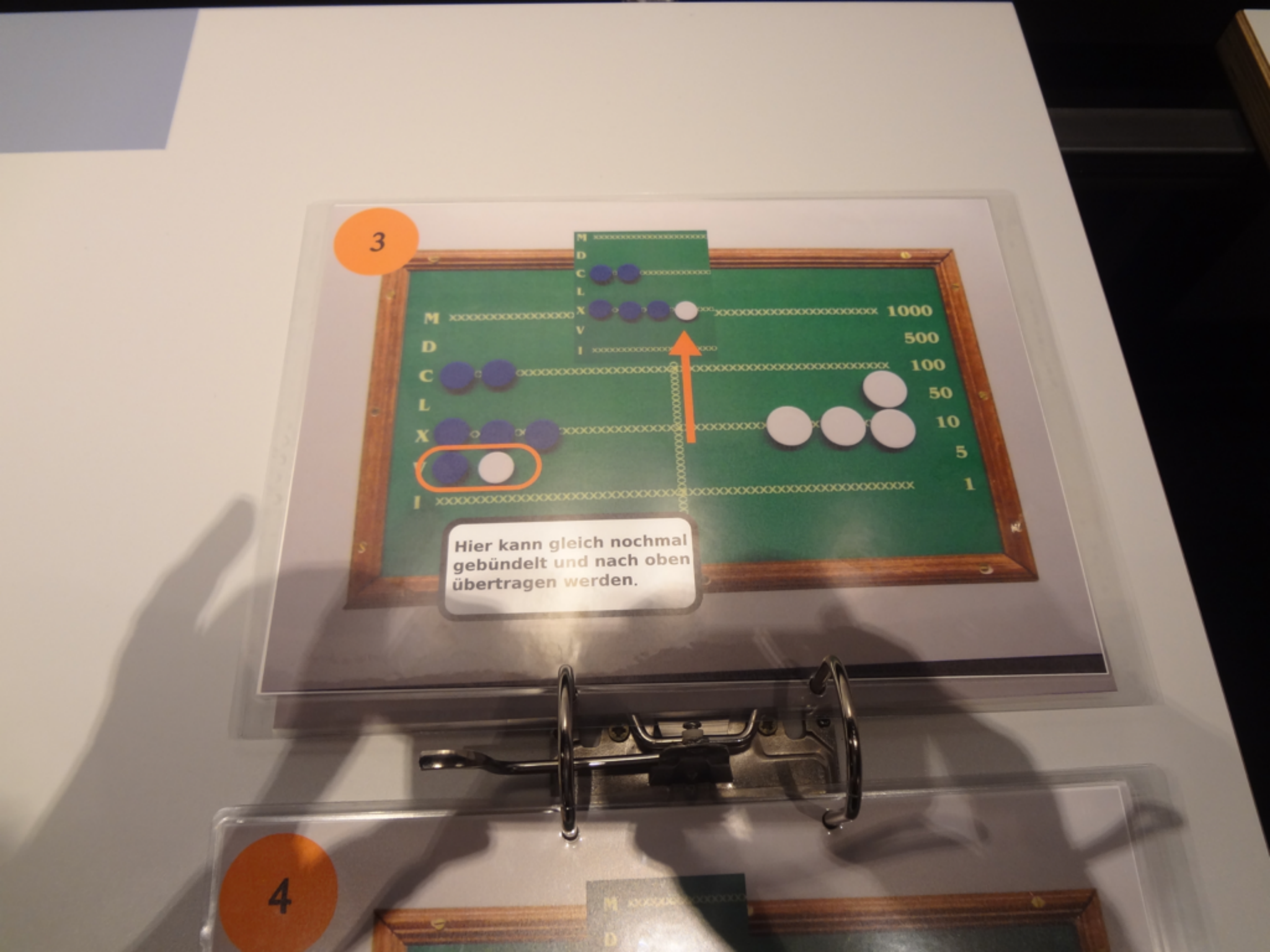
FAZER CONTAS

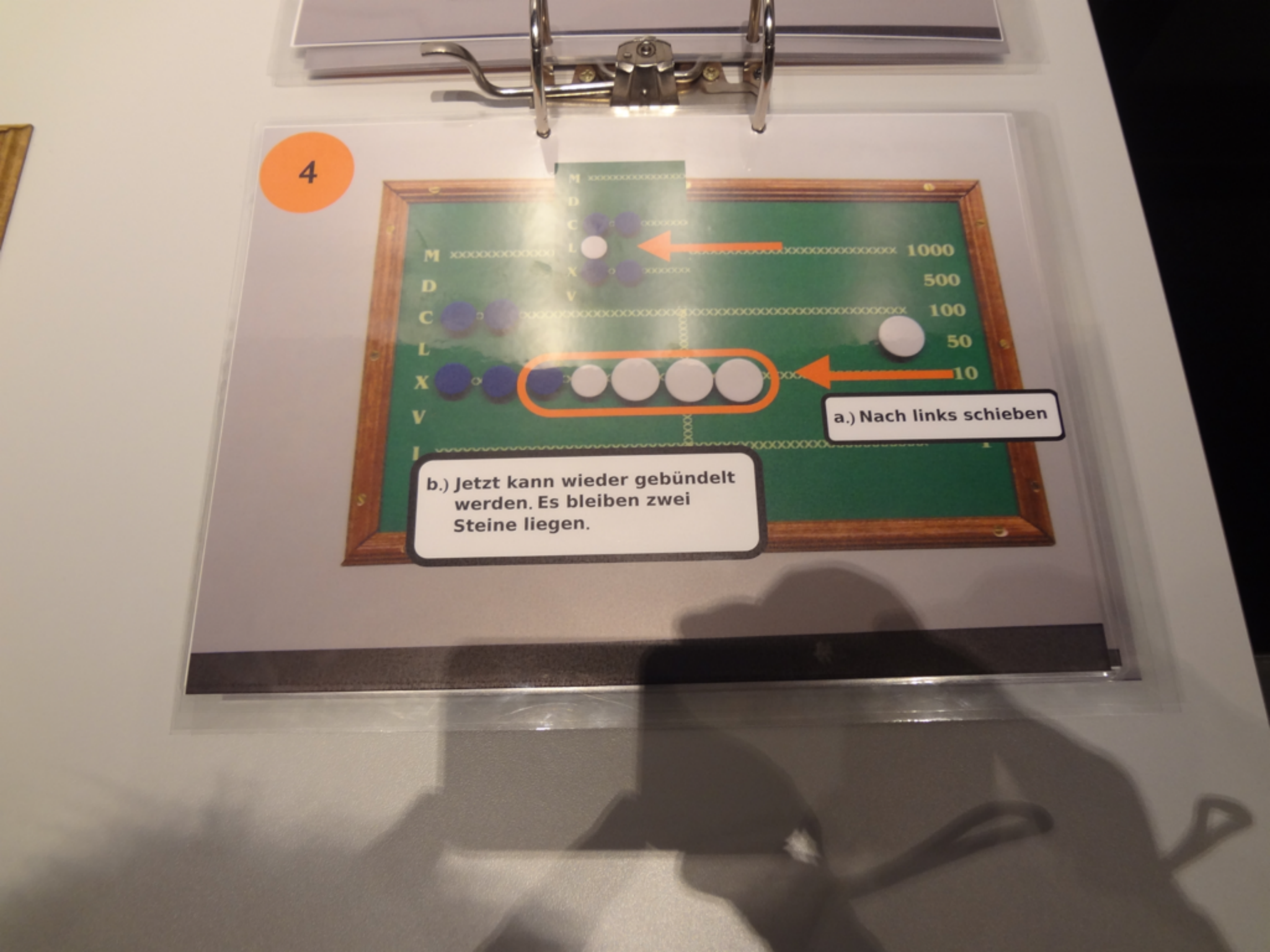

M 1000
D 500
C 100
L 50
X 10
V 5
I 1

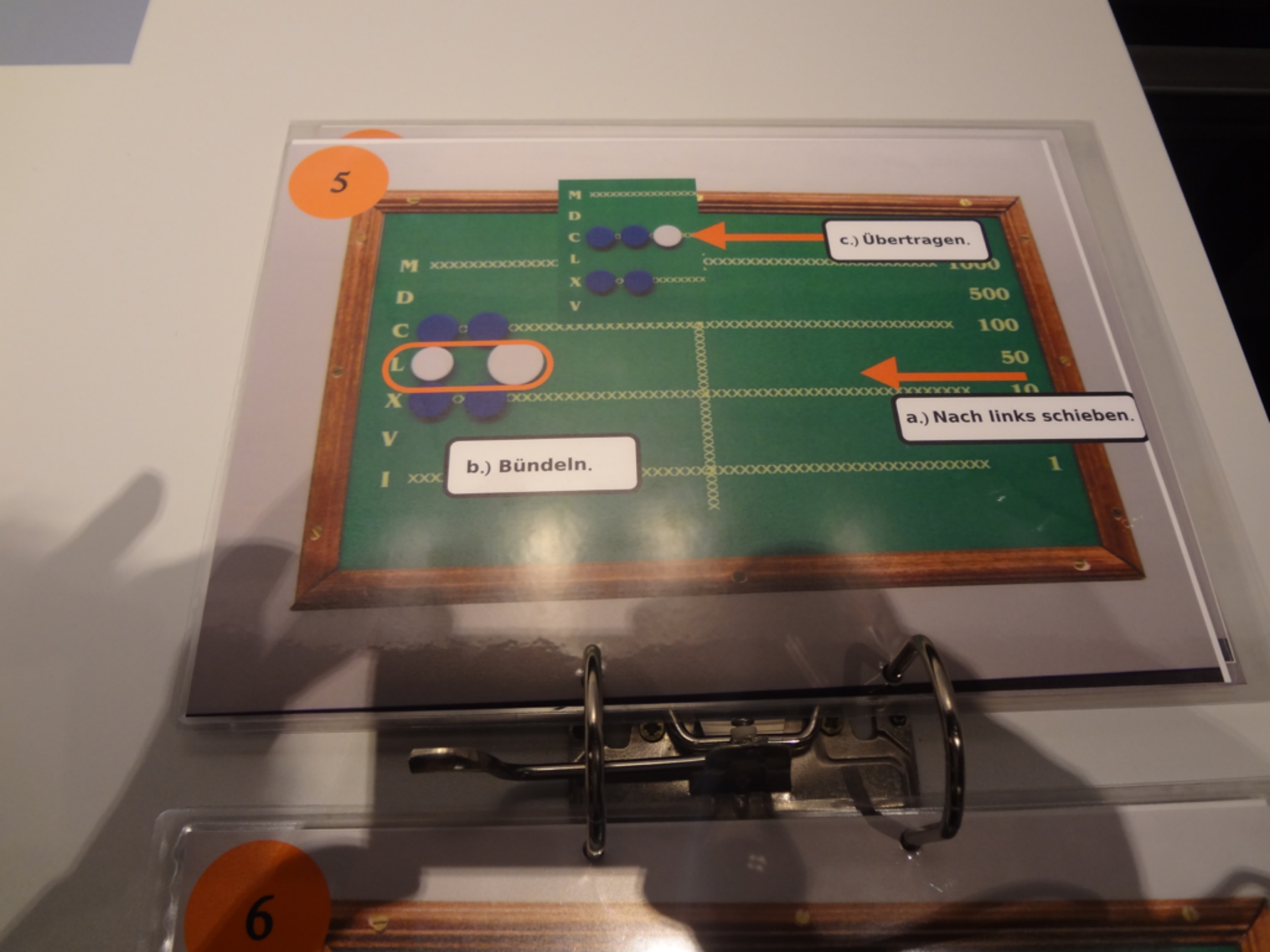

M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1

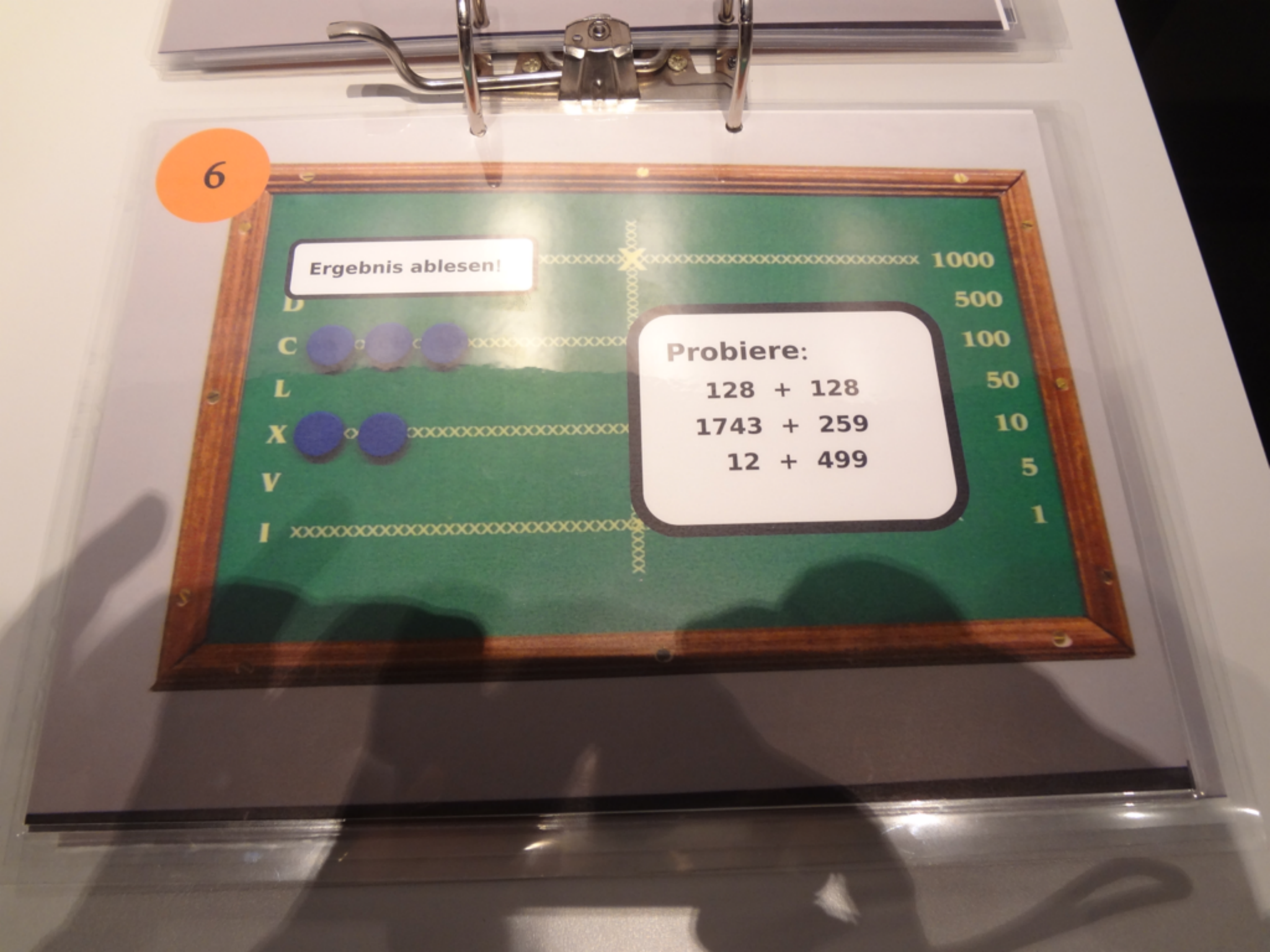

1
Wir rechnen: 238 + 82
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1
2 x "C" 100
3 x "X" 10
1 x "V" 5
3 x "I" 1
238
2

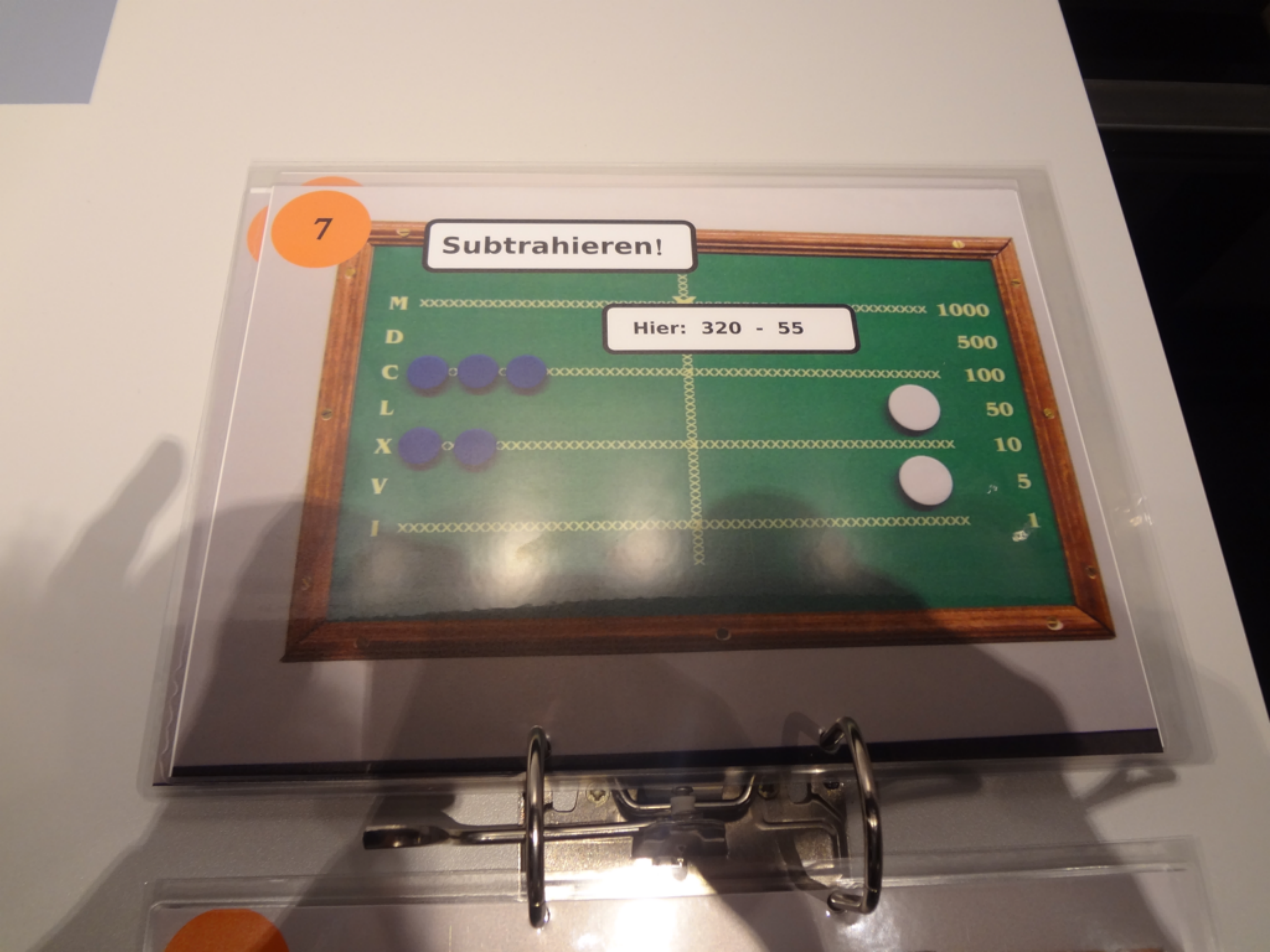

2
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1
a.) Nach links schieben
b.) Bündeln.
Wenn möglich, durch
höherwertige Stelle
ersetzen.

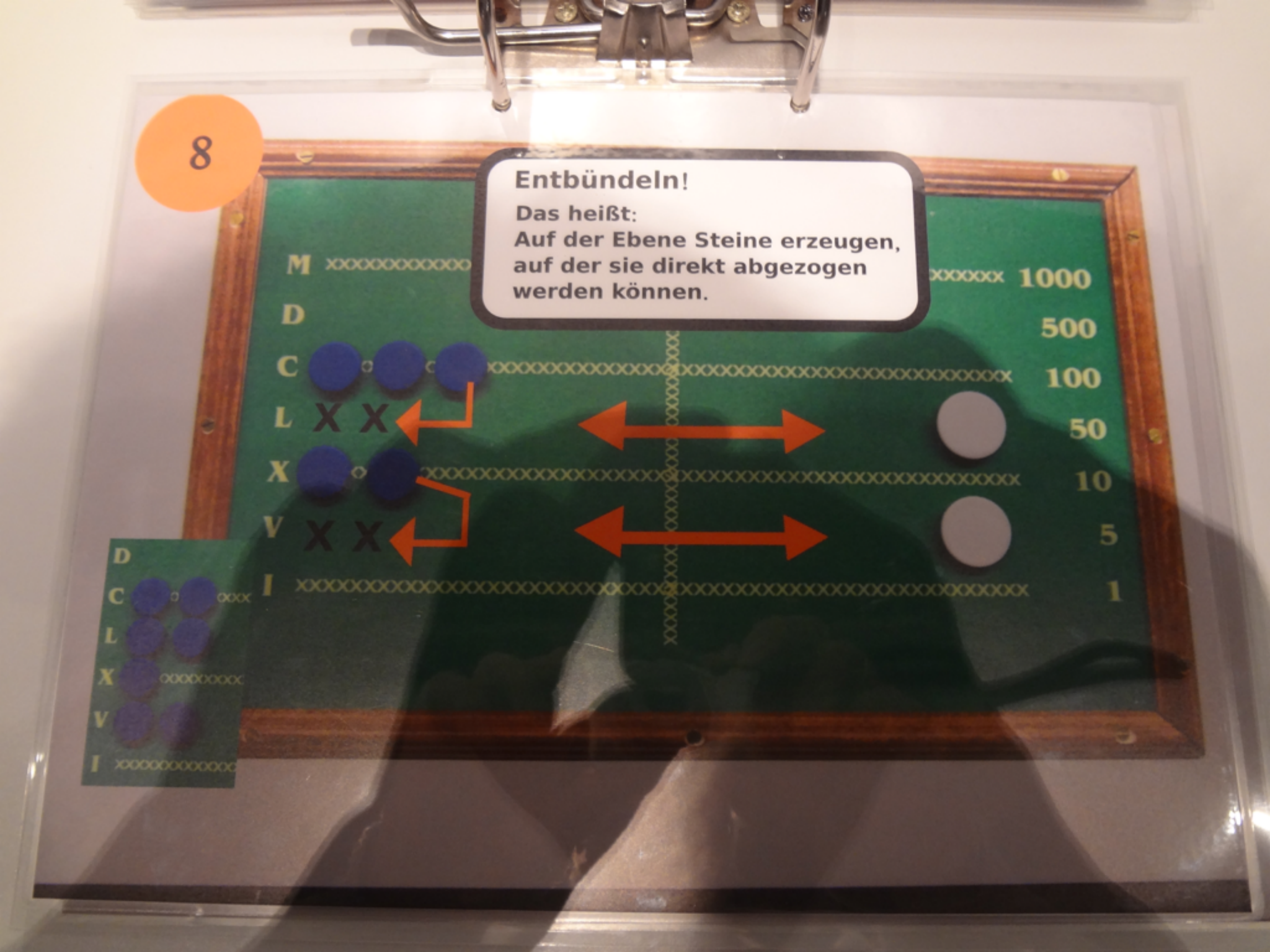

3
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1
Hier kann gleich nochmal
gebündelt und nach oben
übertragen werden.
4


4
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
a.) Nach links schieben
b.) Jetzt kann wieder gebündelt werden. Es bleiben zwei Steine liegen.

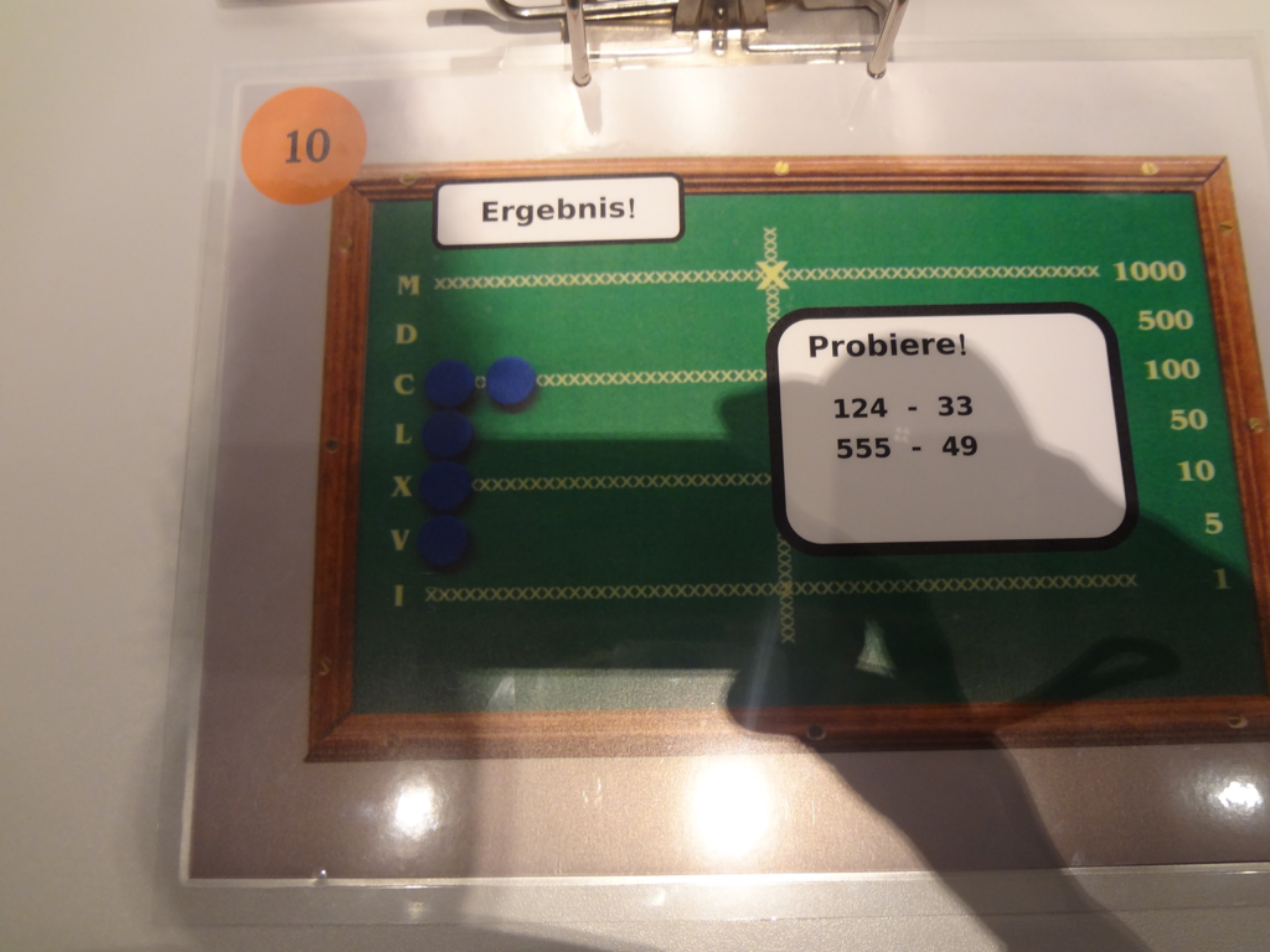

5
M
D
C
L
X
V
c.) Übertragen.
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
1
a.) Nach links schieben.
b.) Bündeln.
6

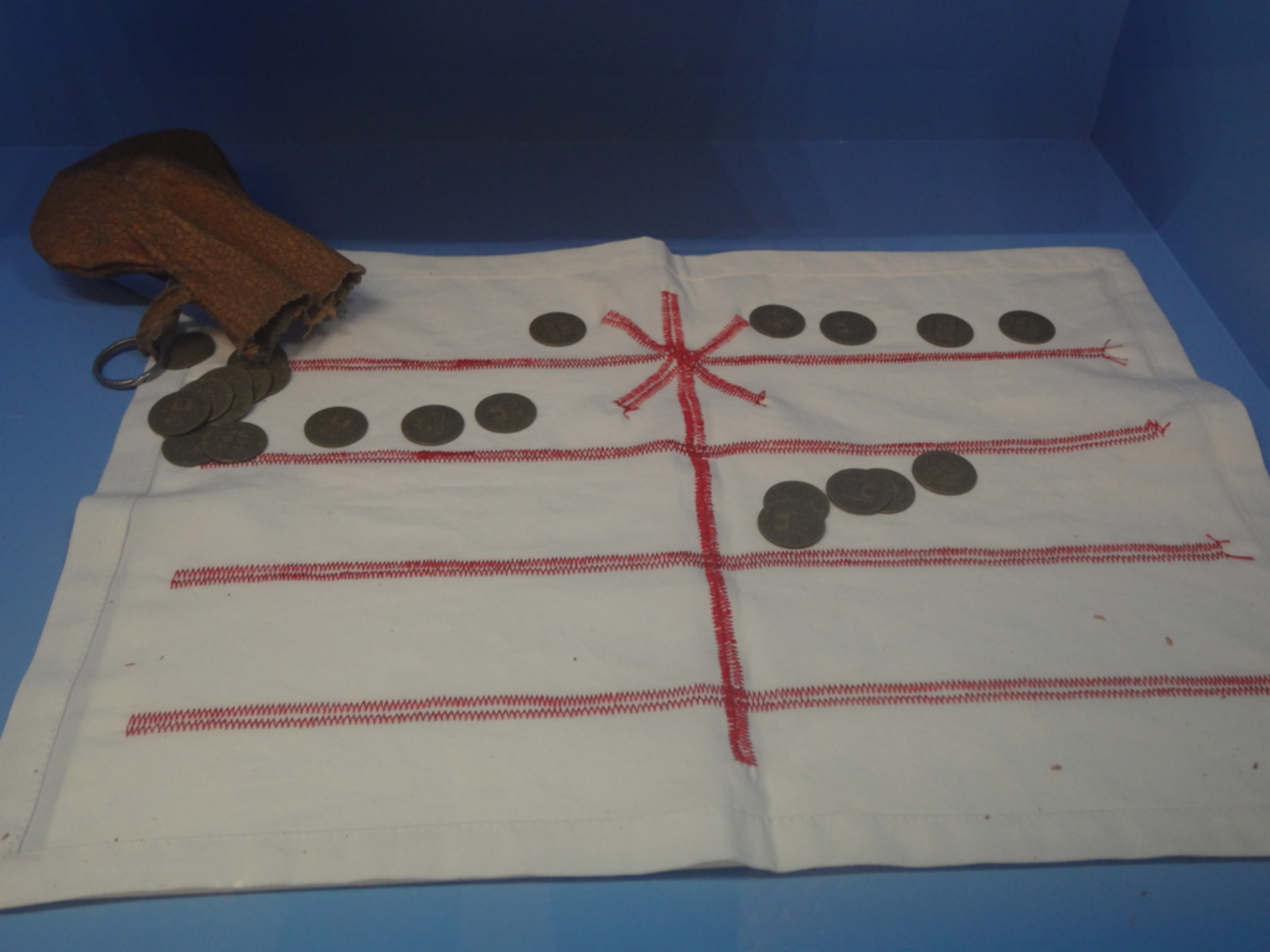

6
Ergebnis ablesen!
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1
Probiere:
128 + 128
1743 + 259
12 + 499

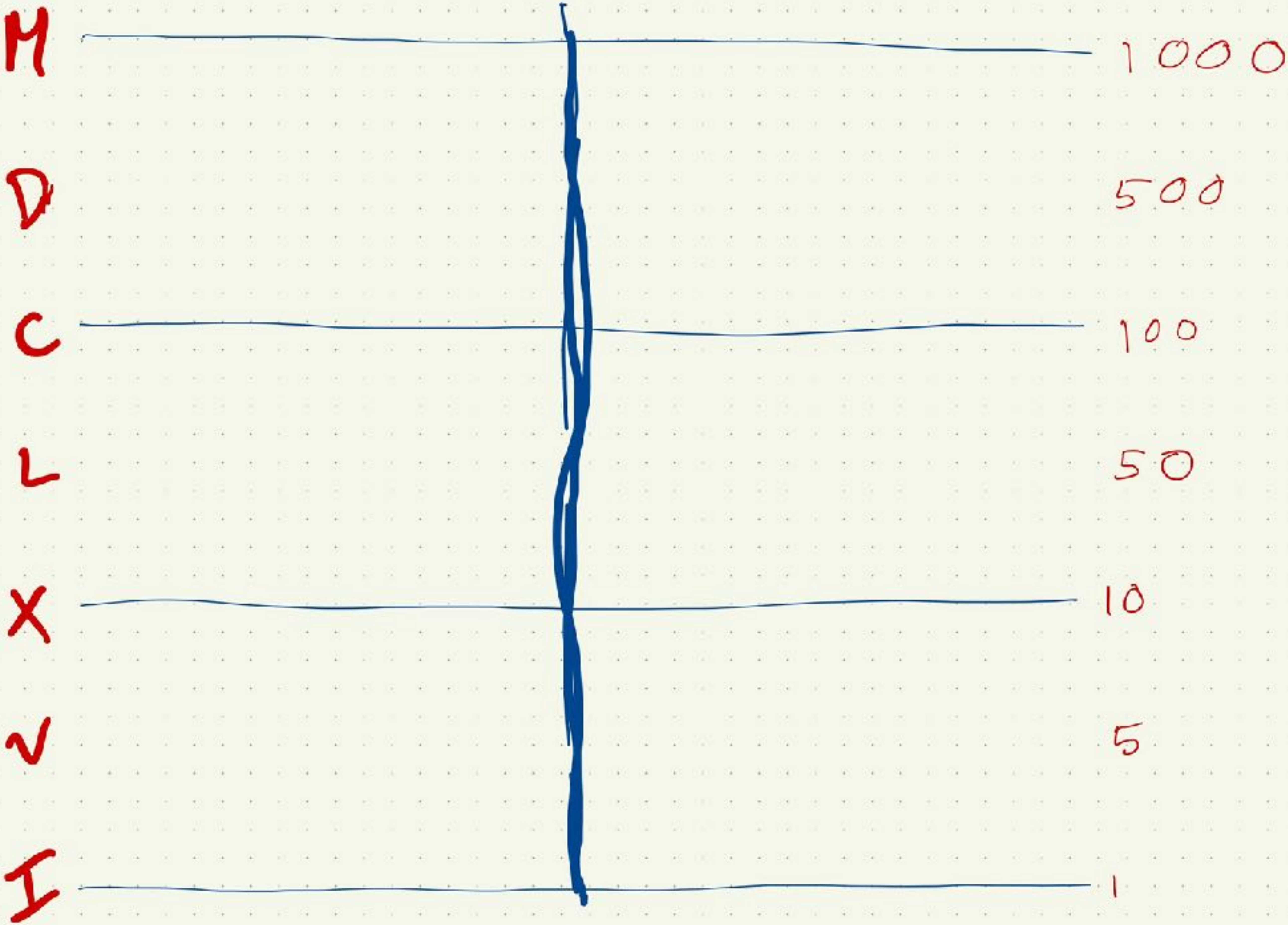

7
Subtrahieren!
Hier: 320 - 55
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1

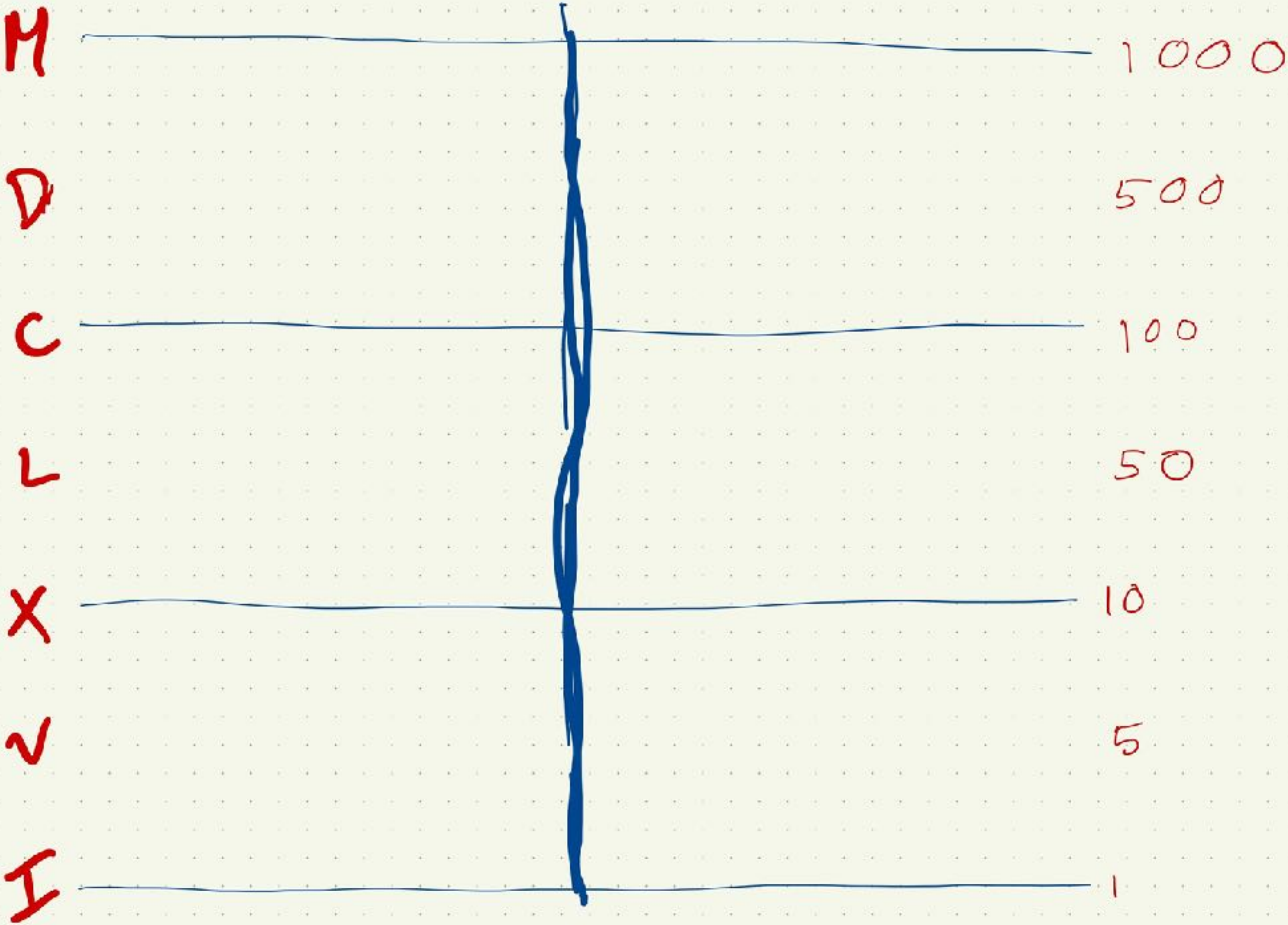

8
Entbündeln!
Das heißt:
Auf der Ebene Steine erzeugen,
auf der sie direkt abgezogen
werden können.
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1

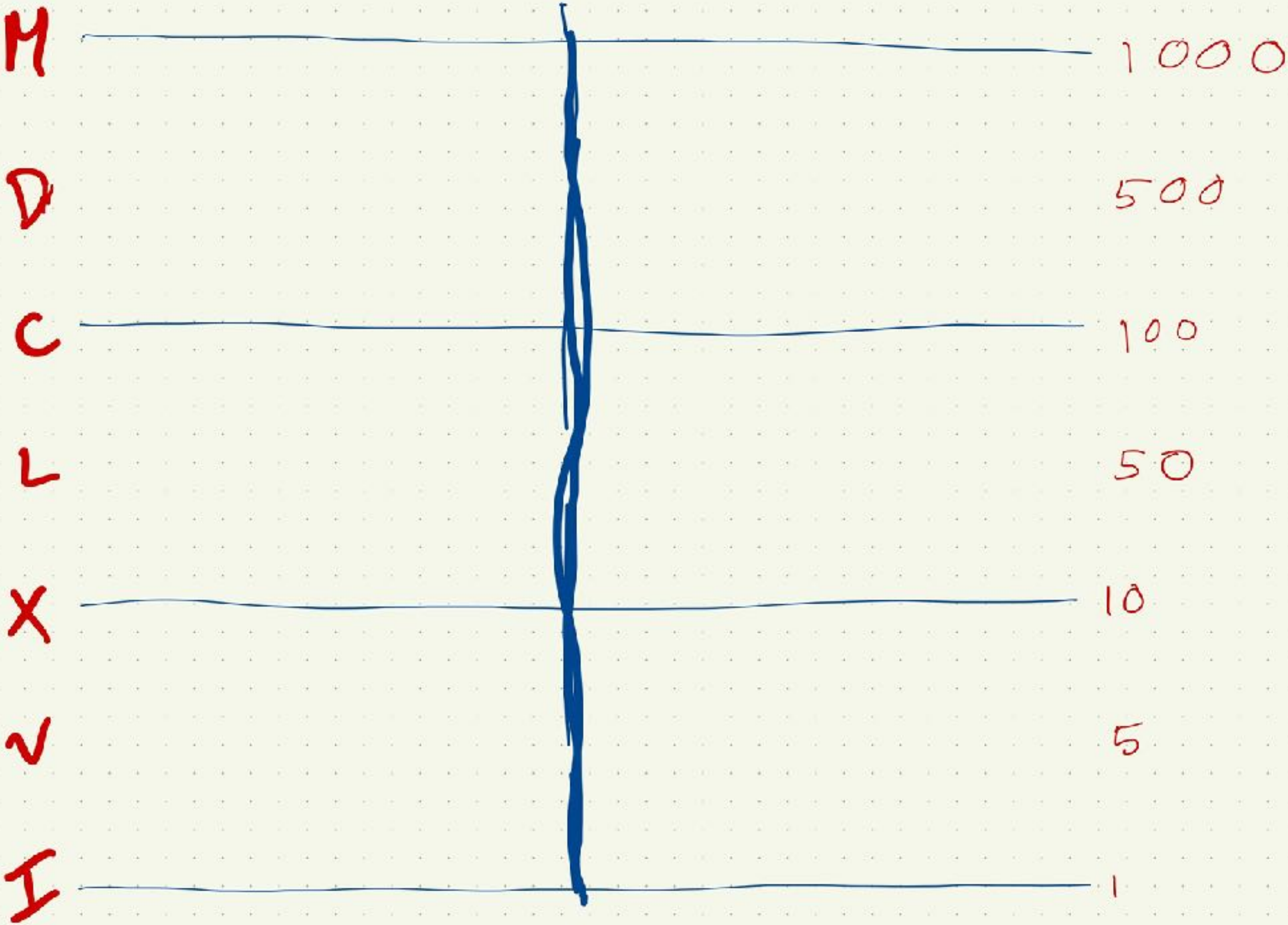

9
Abziehen!
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1

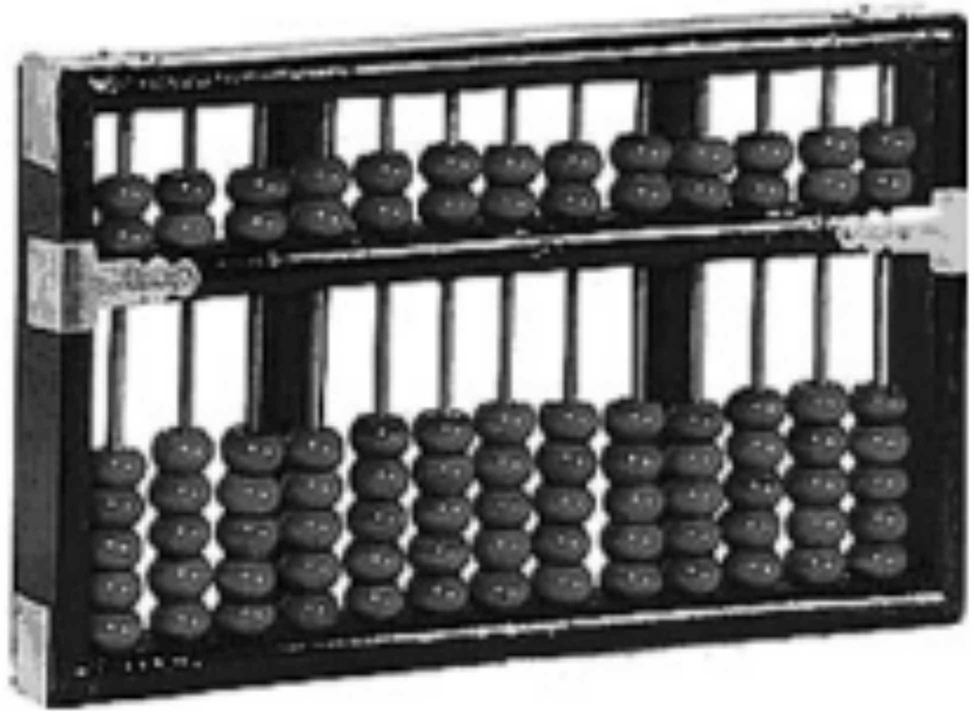

10
Ergebnis!
Probiere!
124 - 33
555 - 49
M
D
C
L
X
V
I
1000
500
100
50
10
5
1




M
1000
D
500
C
100
L
50
X
10
V
5
I
1

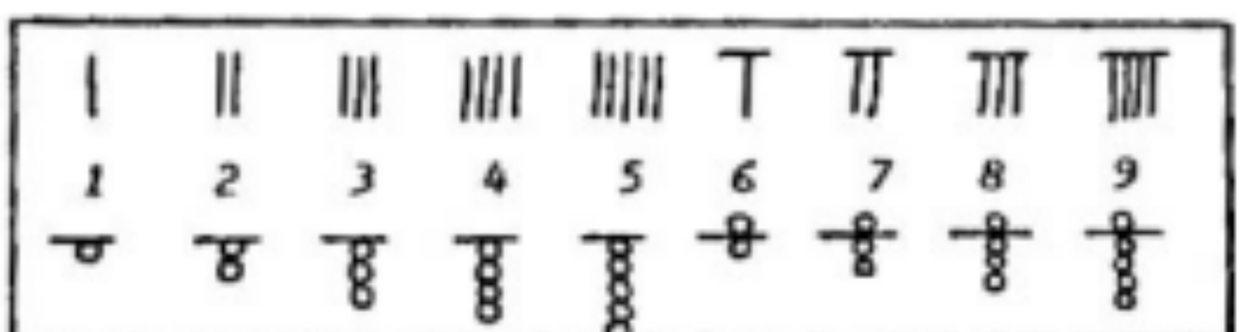

M
1000
D
500
C
100
L
50
X
10
V
5
I
1


M
1000
D
500
C
100
L
50
X
10
V
5
I
1



Ábaco chinês (*Suanpan*)

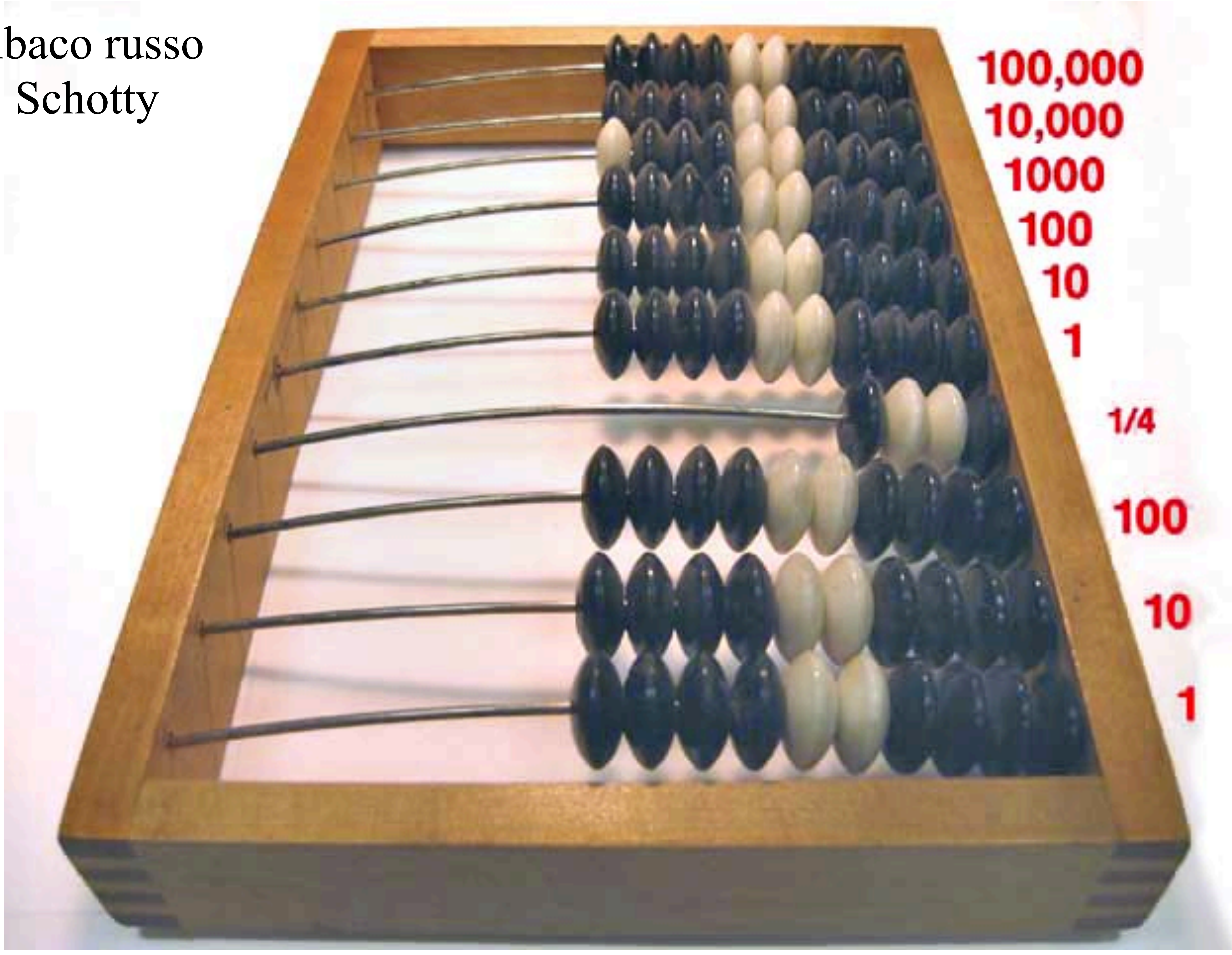
Este tipo de ábaco é o mais conhecido em Portugal, já que era muito popular em Macau. Para representar os números convenciona-se que cada uma das peças abaixo da barra vale uma unidade e cada uma das outras vale cinco. As peças que se utilizam deslocam-se para a barra central. Esquematicamente:



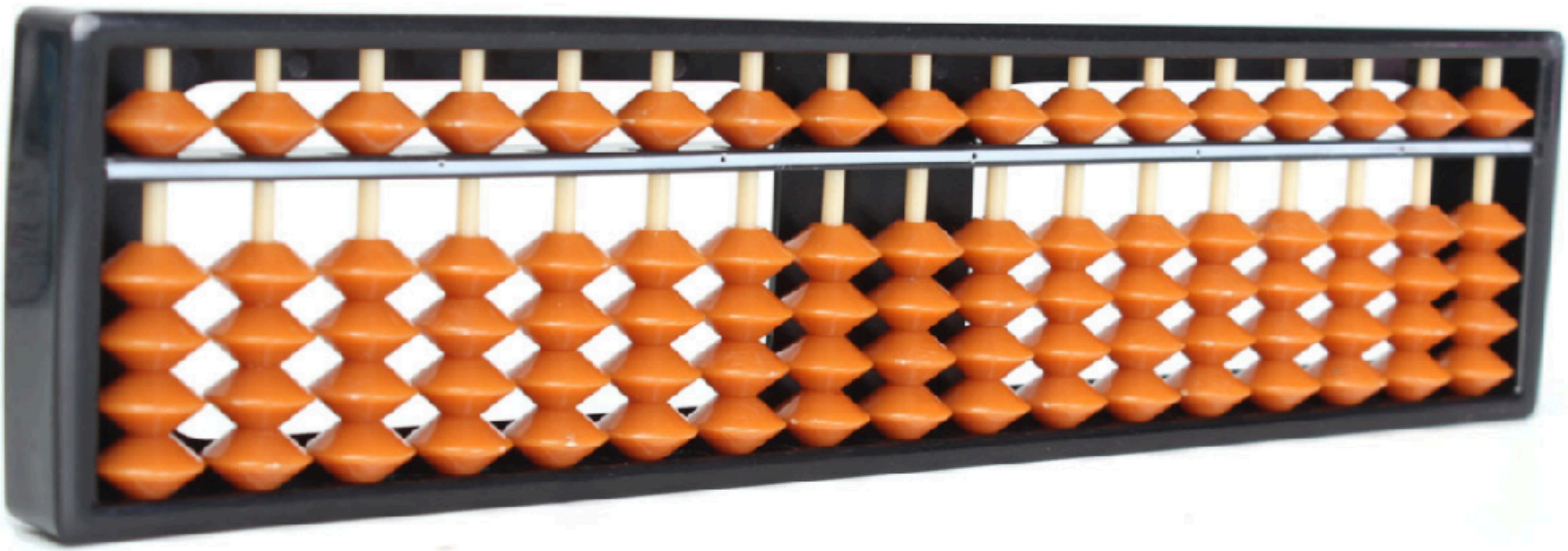
A representação dos números no ábaco chinês

Por exemplo, para representar 6543, deslocavam-se as peças da seguinte forma:

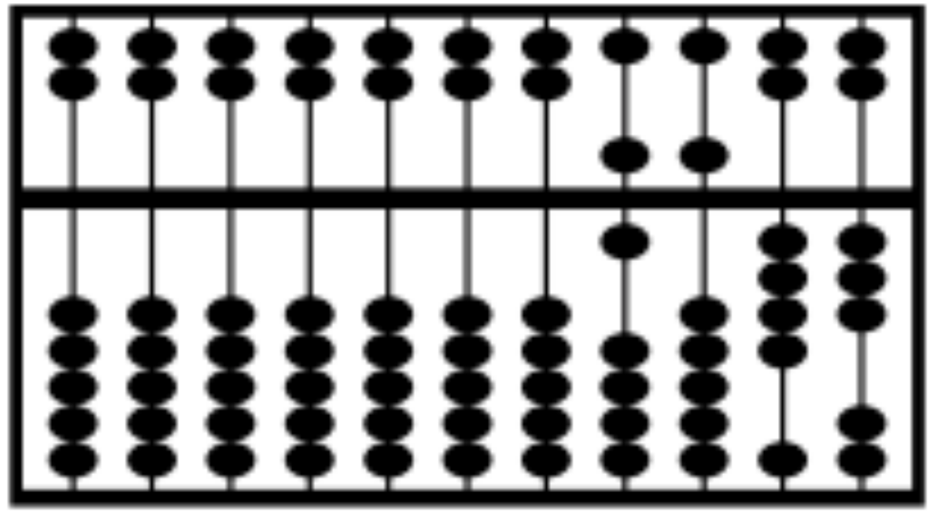
Ábaco russo
Schotty



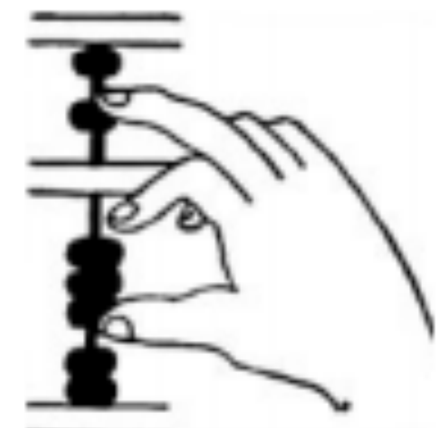
Ábaco japonês
Soroban




MASTER MIND
ABACUS



Representação do número 6543 no *Suanpan*



Manipulação do ábaco chinês

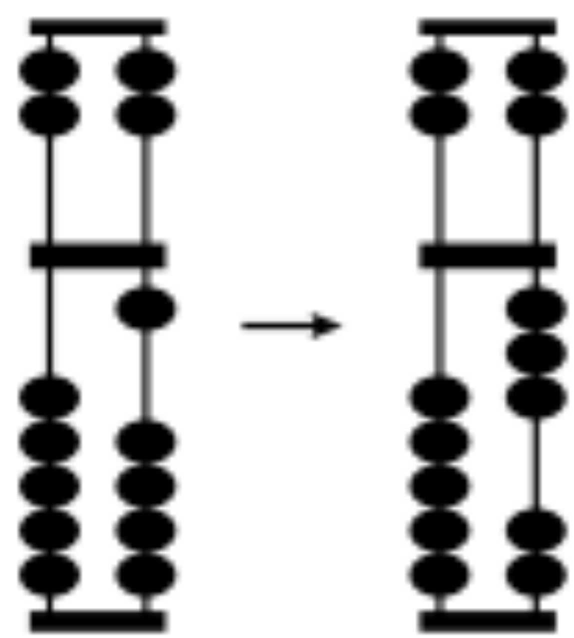
A manipulação desta ferramenta pode ser muito rápida e eficiente. Aconselha-se que se utilizem certos dedos para as peças de baixo e outros para as de cima:

Para efectuar as operações havia regras práticas, ensinadas nos manuais aritméticos. Vejamos, as da soma:

1. Um – baixar cinco, anular quatro;
2. Dois – baixar cinco, anular três;
3. Três – baixar cinco, anular dois;
4. Quatro – baixar cinco, anular um;
5. Um – anular nove, adiantar dez;
6. Dois – anular oito, adiantar dez;
7. Três – anular sete, adiantar dez;
8. Quatro – anular seis, adiantar dez;
9. Cinco – anular cinco, adiantar dez;
10. Seis – anular quatro, adiantar dez;
11. Sete – anular três, adiantar dez;
12. Oito – anular dois, adiantar dez;

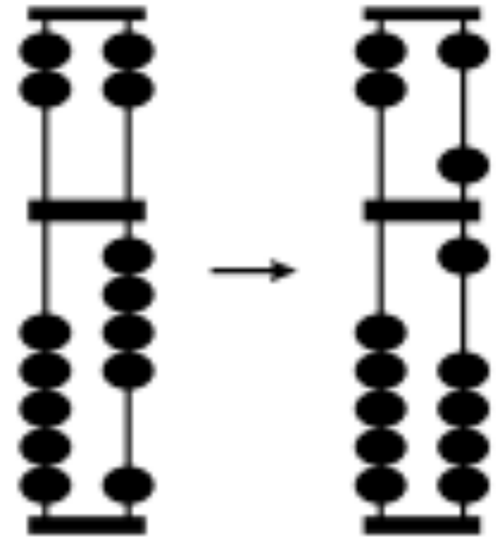
13. Nove – anular um, adiantar dez;
14. Seis – elevar um, anular cinco, adiantar dez;
15. Sete – elevar dois, anular cinco, adiantar dez;
16. Oito – elevar três, anular cinco, adiantar dez;
17. Nove – elevar quatro, anular cinco, adiantar dez.

Consideremos, por exemplo, as regras que dizem respeito a somar dois, isto é, as regras 2 e 6. Se quisermos somar duas unidades a primeira coisa a fazer é tentar subir duas peças inferiores, o que funciona bem ao calcular 1+2 (as próximas figuras contêm somente as varetas das unidades e das dezenas):



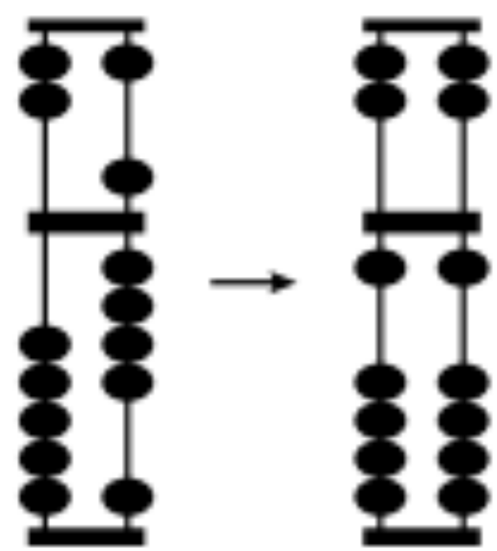
1+2=3

Mas, para somar 2 a 4 já não dispomos de duas peças para subir, temos de usar a regra 2, isto é, juntar 5 e retirar 2 (5–3=2):



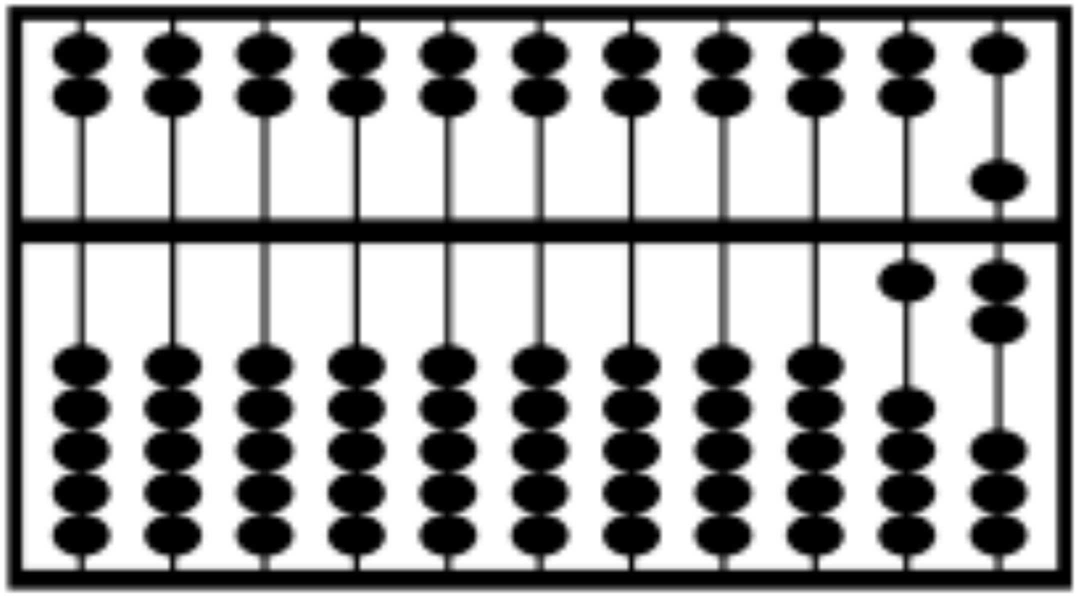
4 + 2 = 6

Mas pode ainda dar-se o caso de não dispormos de uma peça de 5, na mesma vareta, que possamos usar. Neste caso temos de transportar para a casa decimal seguinte (o célebre *e vai um*). Temos de recorrer à regra 6. É o que sucede no cálculo de 9+2:



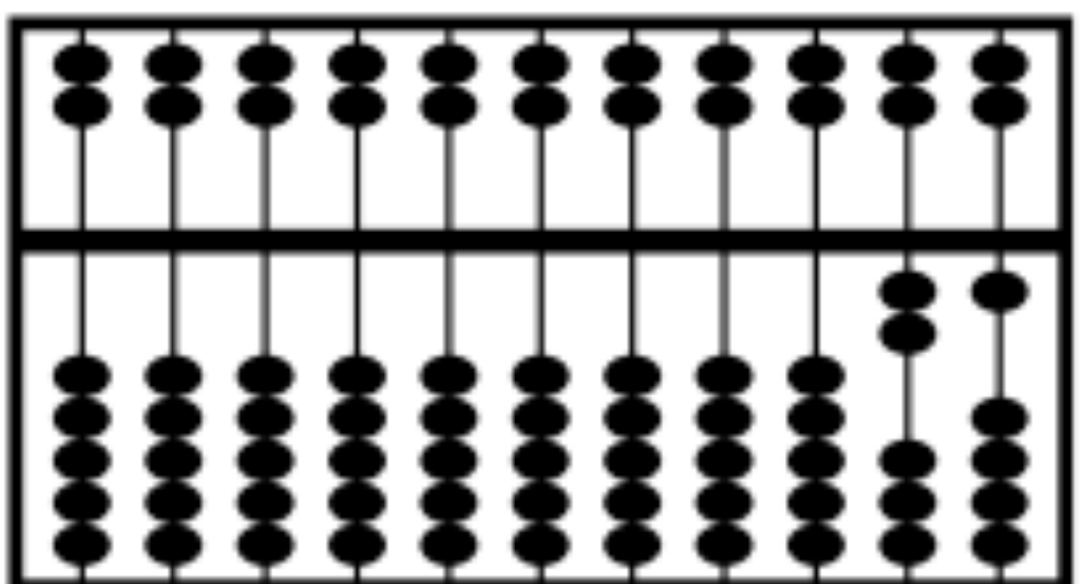
9 + 2 = 11

Calculemos agora 17+44. Primeiro, representamos 17:



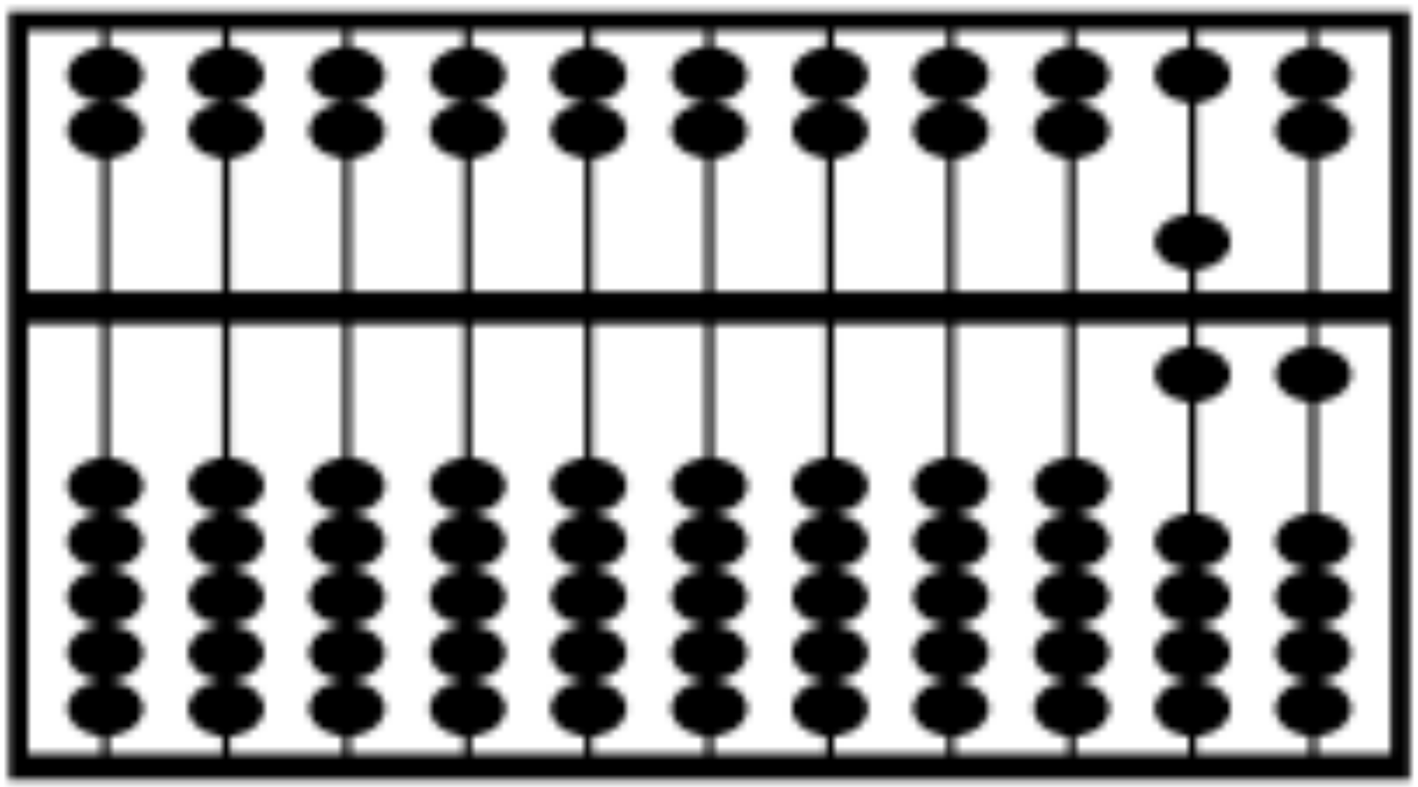
O número 17

Agora adicionemos 4 às unidades. Como o número representado nas unidades é superior a 6, usamos a regra 8. Para tal anulamos 6 e juntamos 10 (isto é, uma unidade na casa decimal seguinte):



O resultado de somar 4 a 17

Agora resta-nos somar 40, isto é, somar 4 à segunda vareta. Como estão lá 2, o resultado é 6.



O resultado de somar 40 a 21

Obtemos assim o resultado final: 17+44-61.

Para as outras operações há regras semelhantes, que constituem um conjunto de automatismos que viabilizam uma manipulação muito rápida.

Grécia

Usavam letras para representar números.

Γ	Δ	Η	Χ	Μ
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Murioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 - 10 in Greek acrophonic numbers									

Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ	𐅇
10	50	100	500	1000	5000	10000	50000
Higher numbers and combining acrophonic numerals							

Grécia

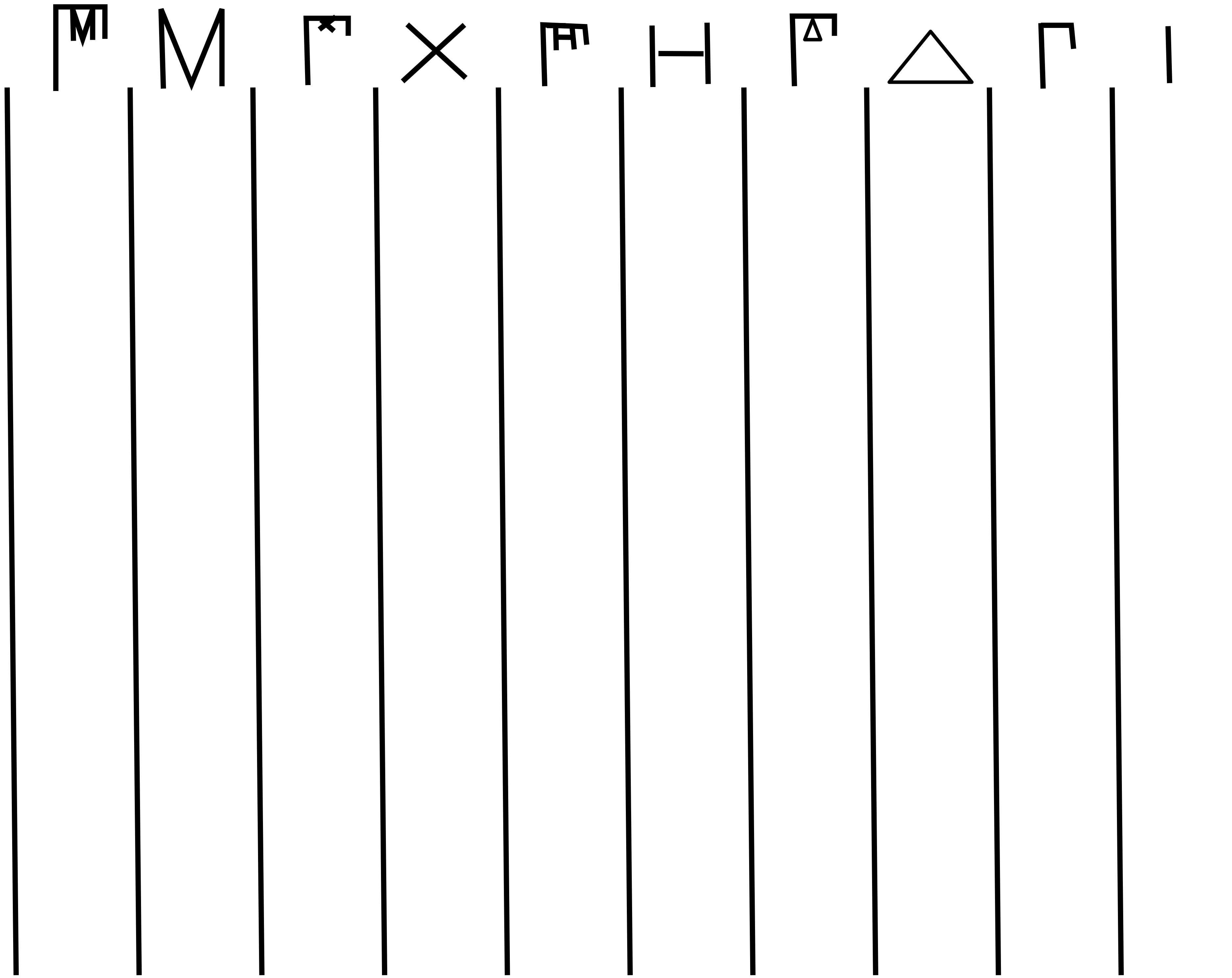
Neste sistema, as letras eram atribuídas aos números por ordem alfabética.

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ϛ	Ζ	Η	Θ
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9

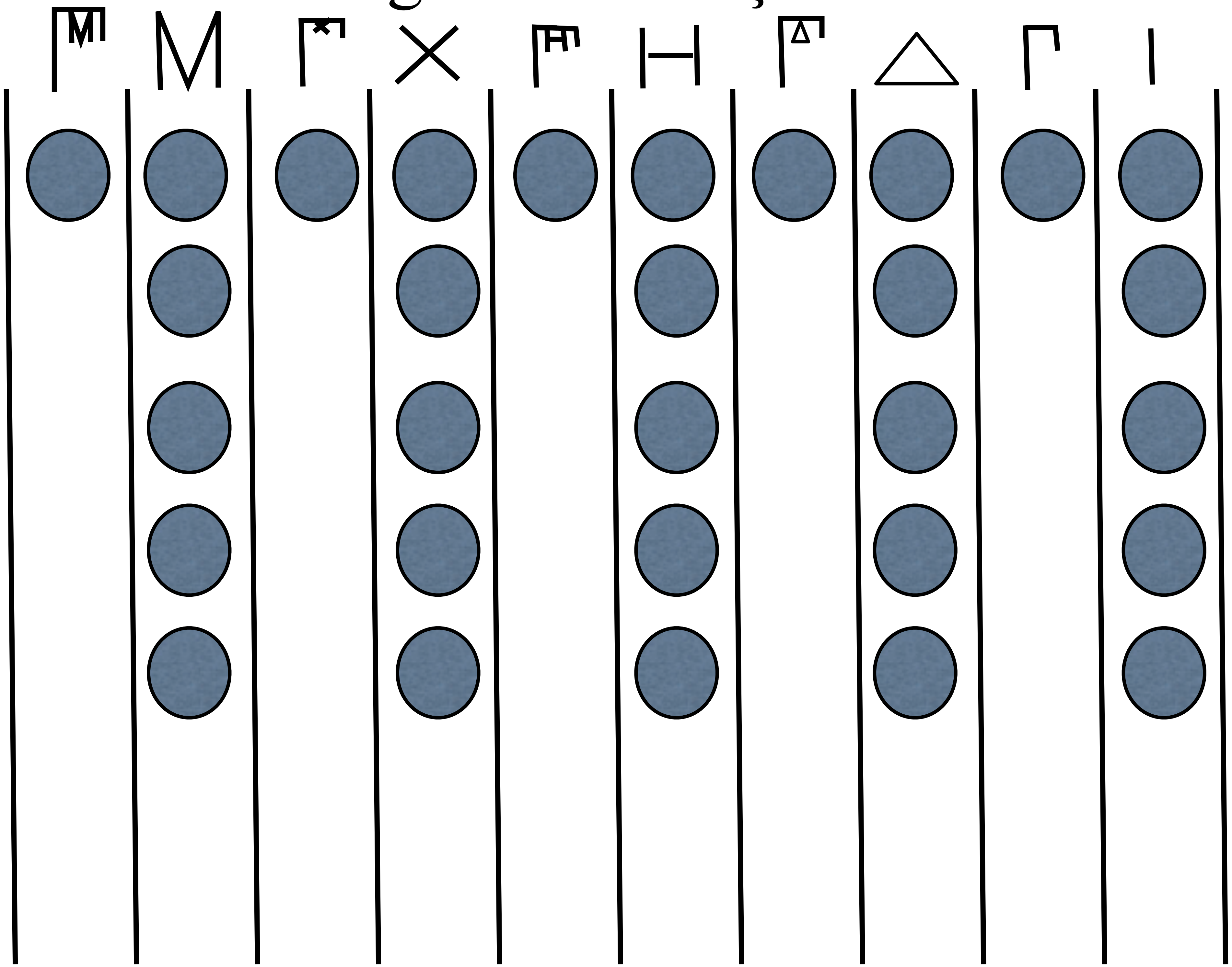
Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ϟ
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90

Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω	Ϡ
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

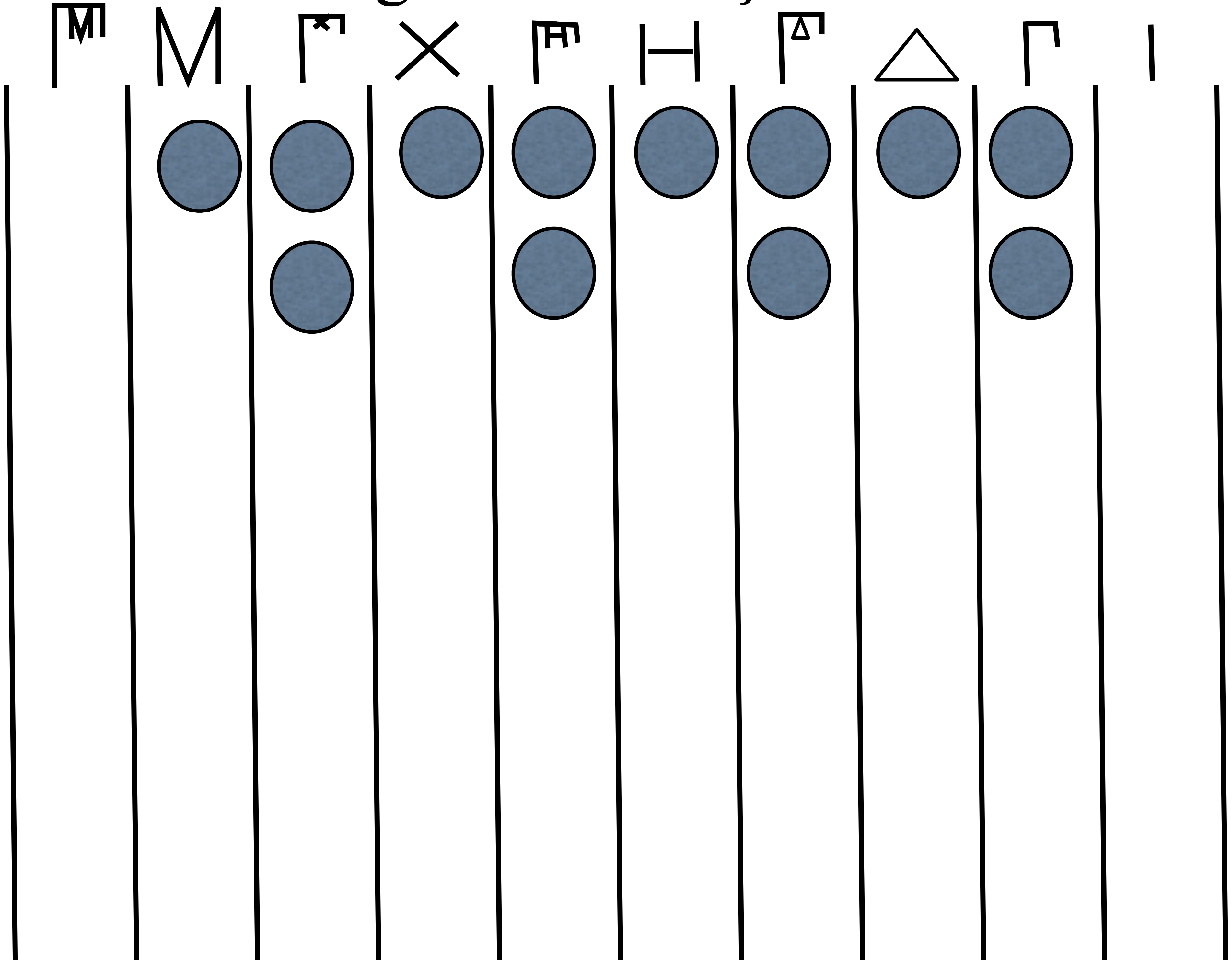
Grécia



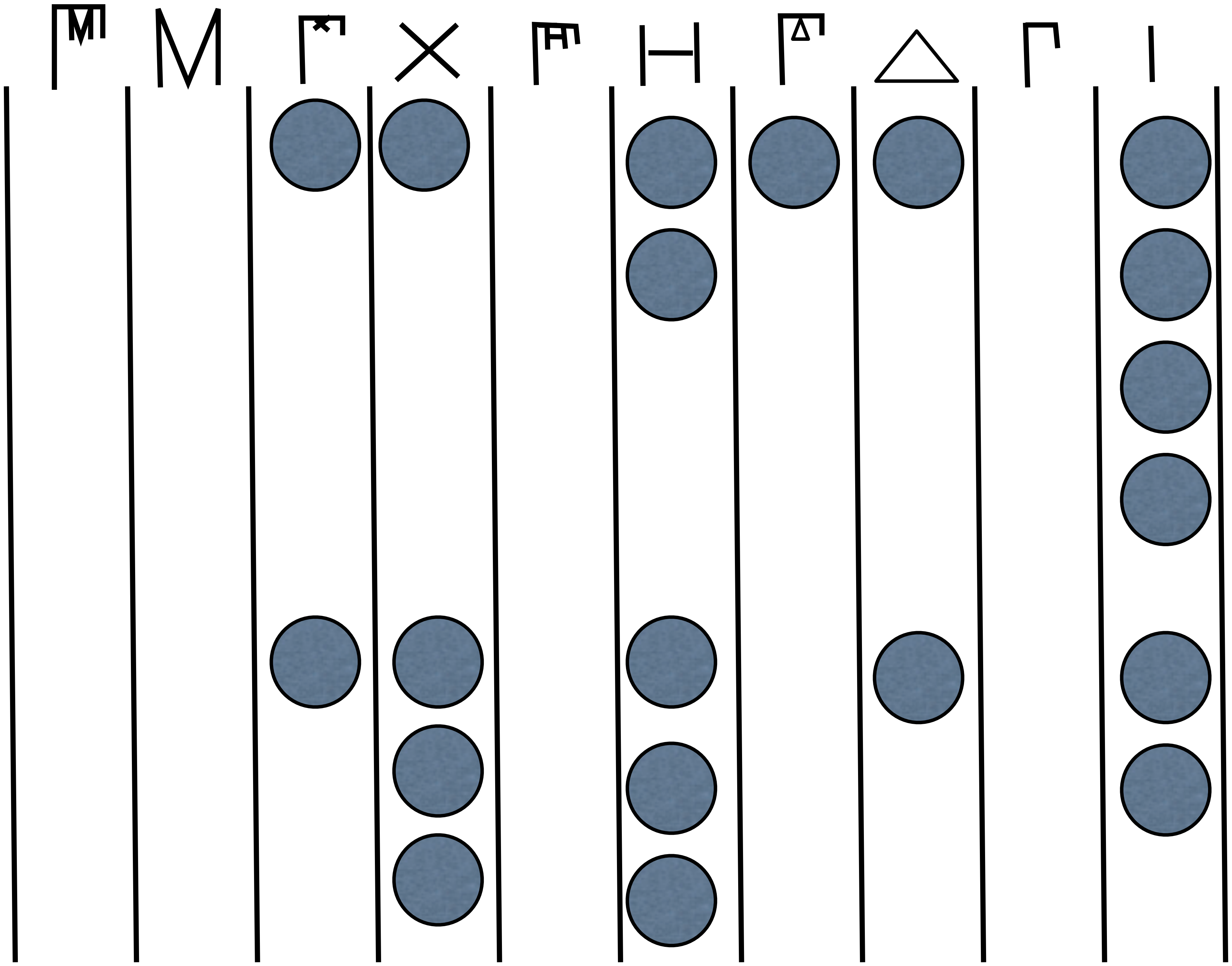
Regras de redução - I



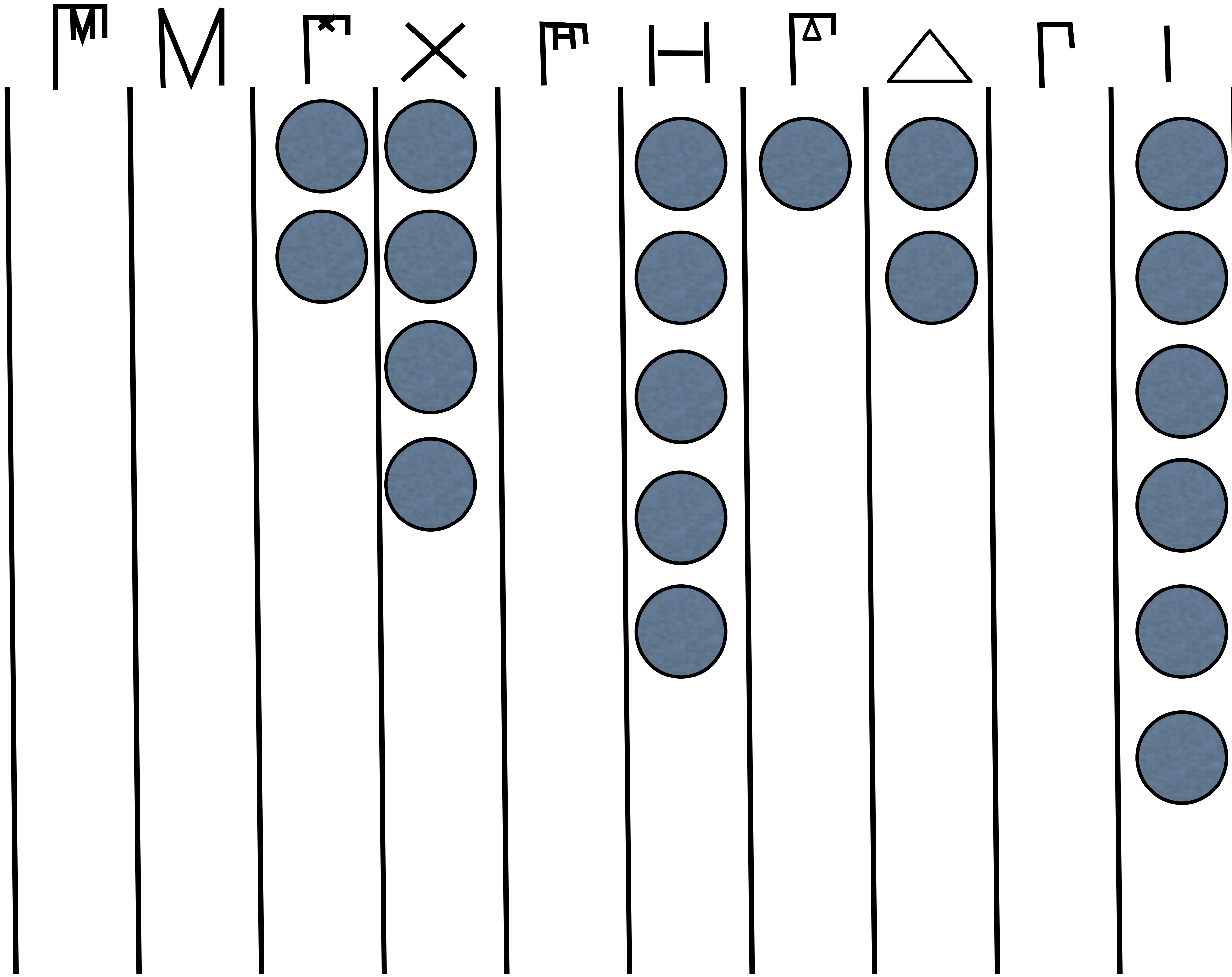
Regras de redução - II



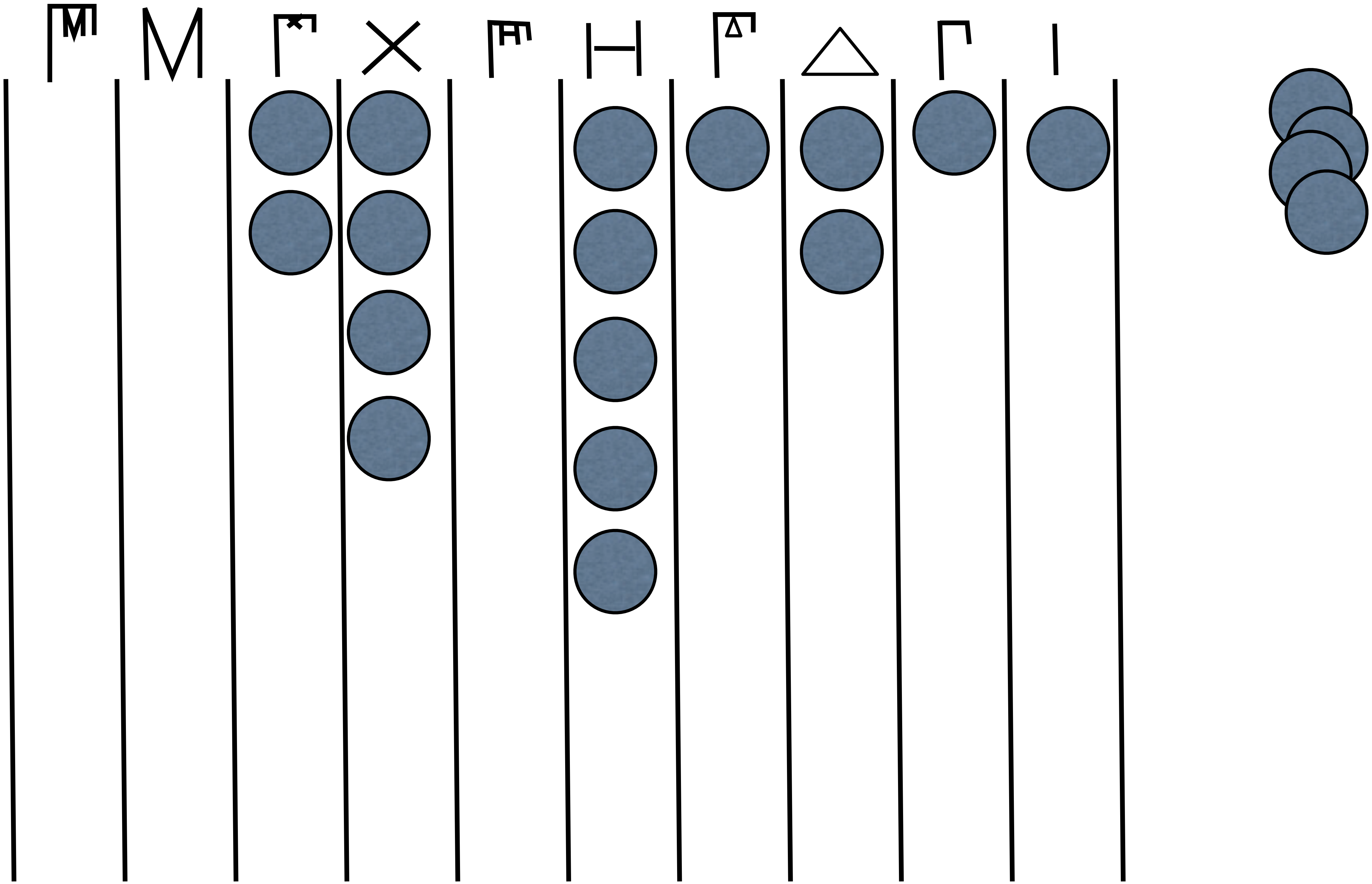
6264 + 8312



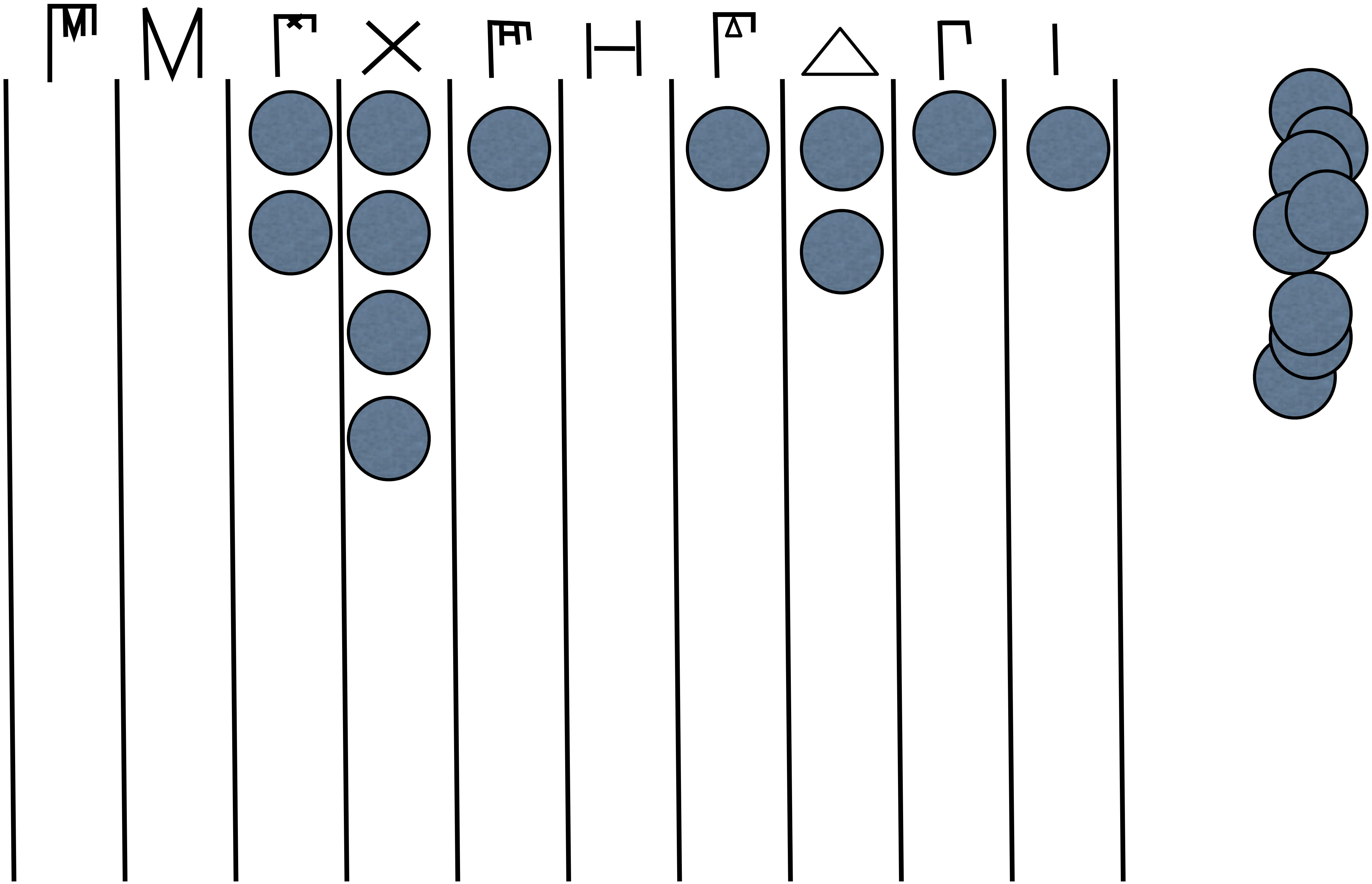
6264 + 8312



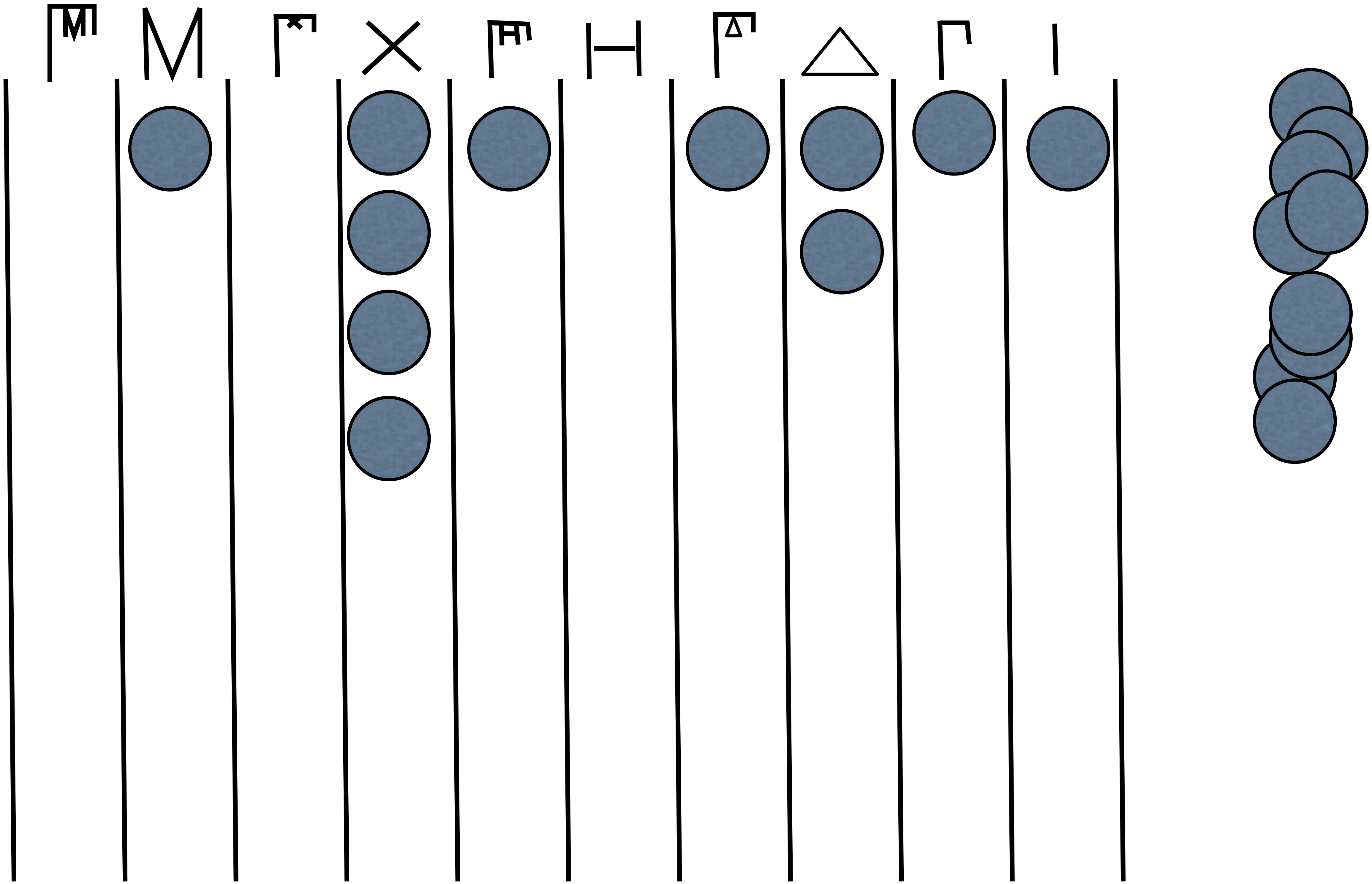
6264 + 8312



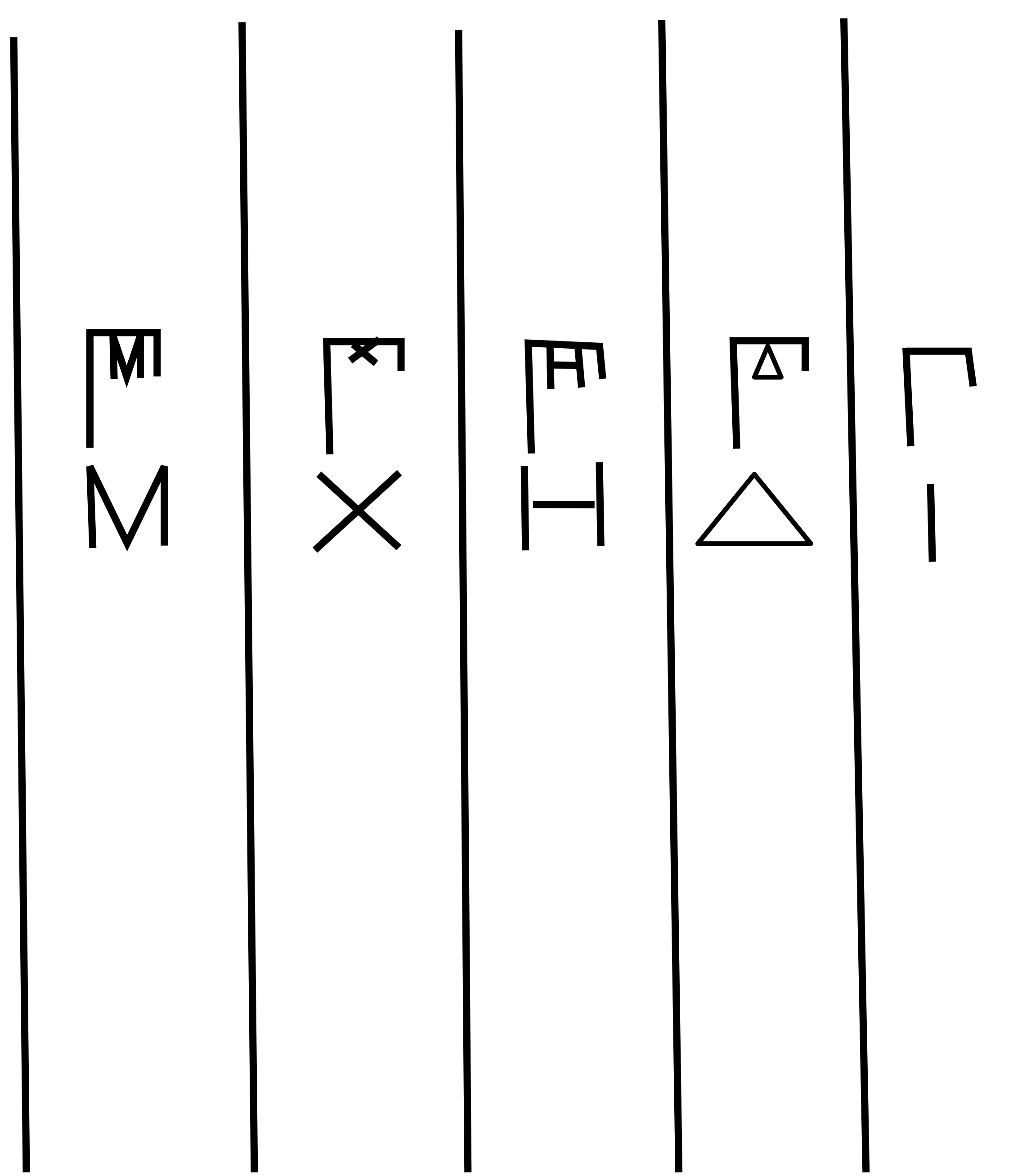
6264 + 8312



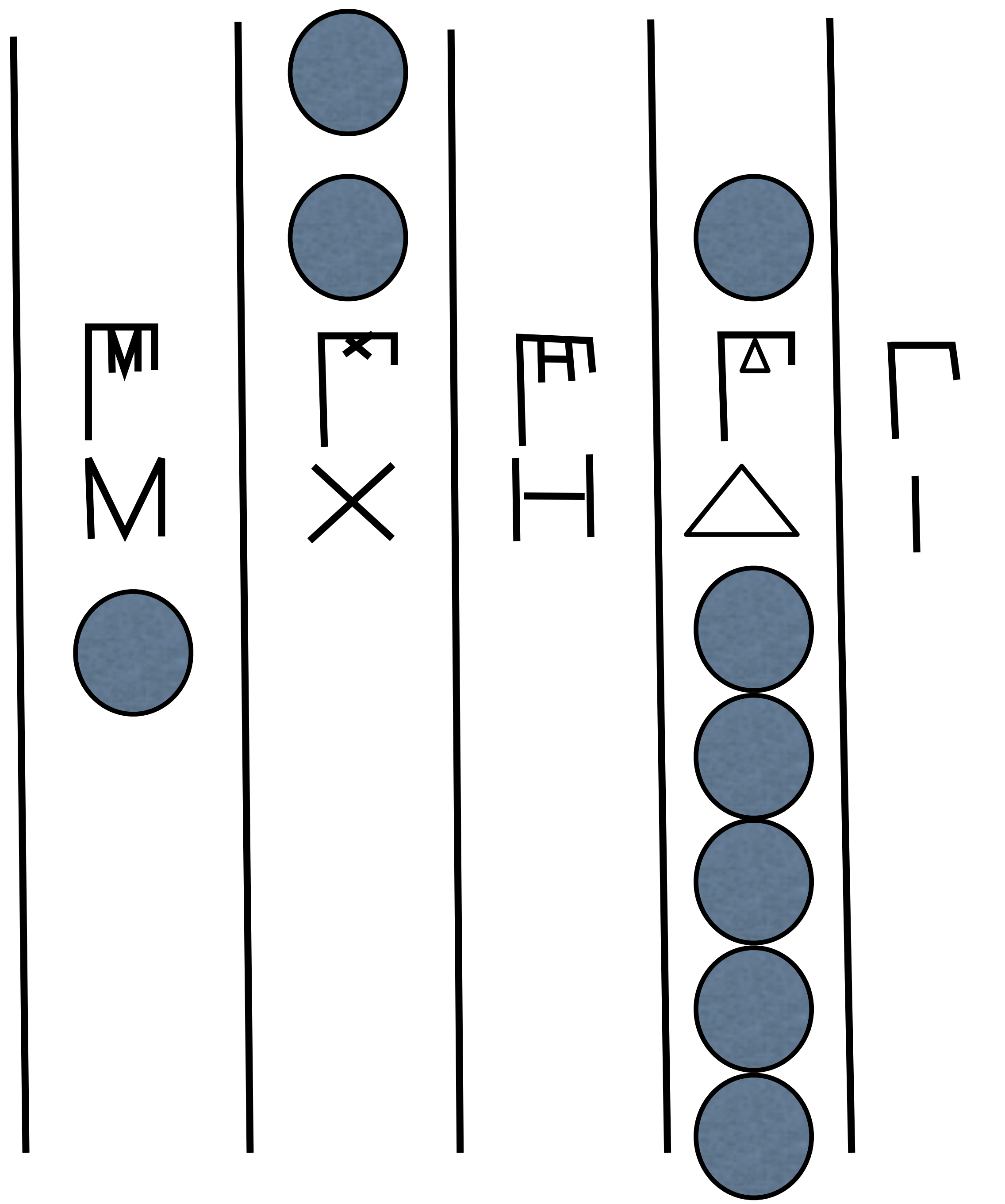
$$6264 + 8312 = 14576$$



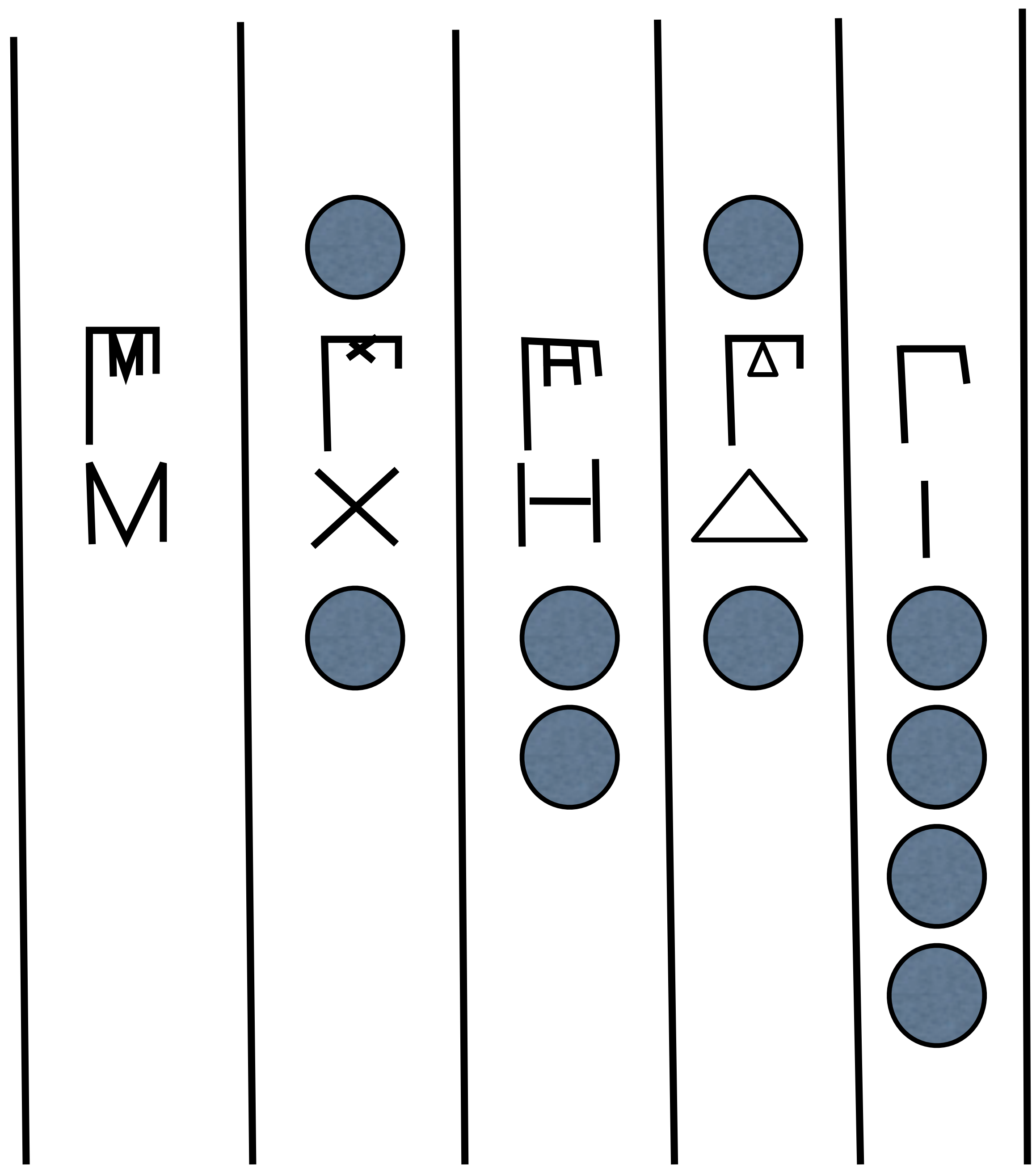
Colunas decimais



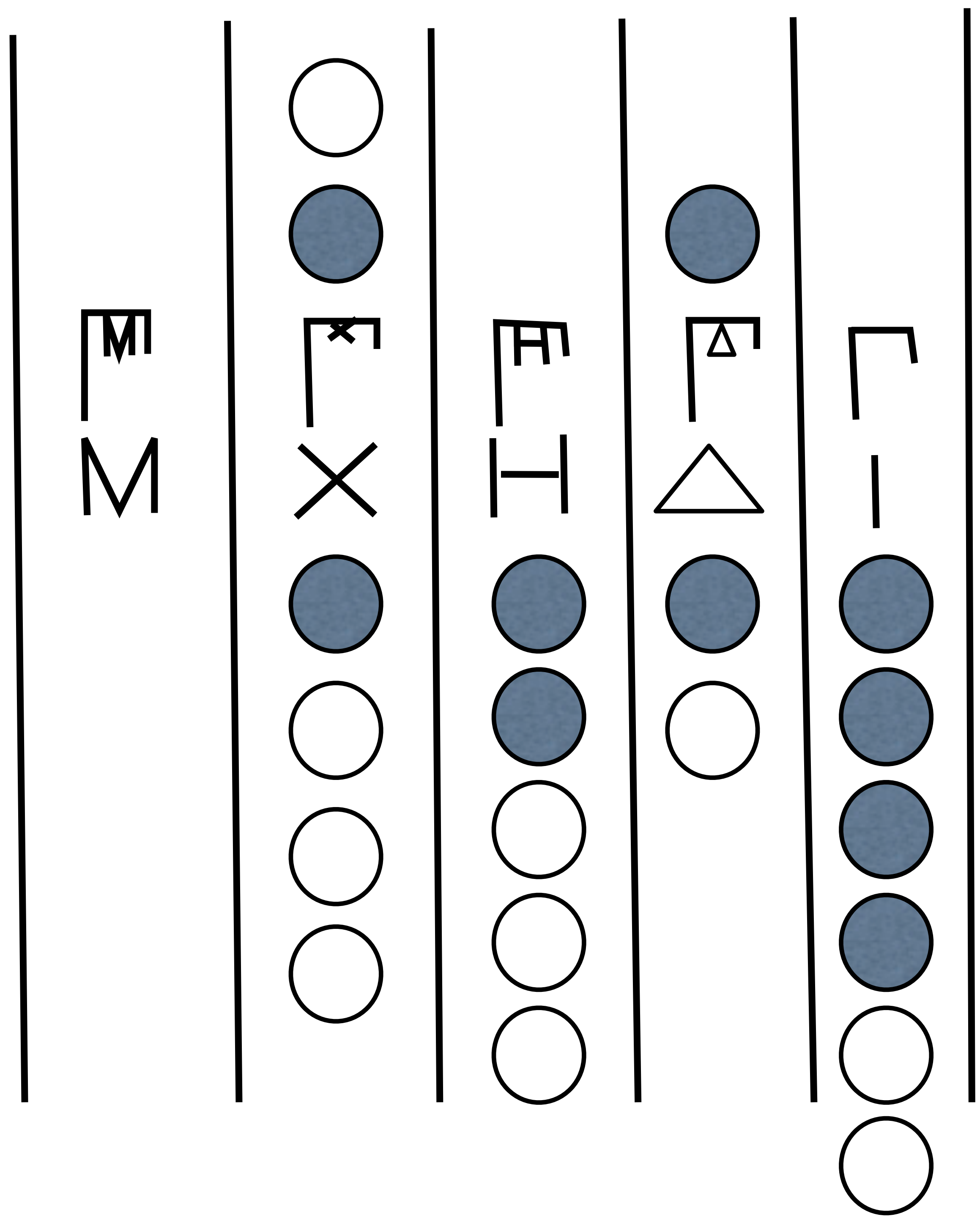
Regras de redução



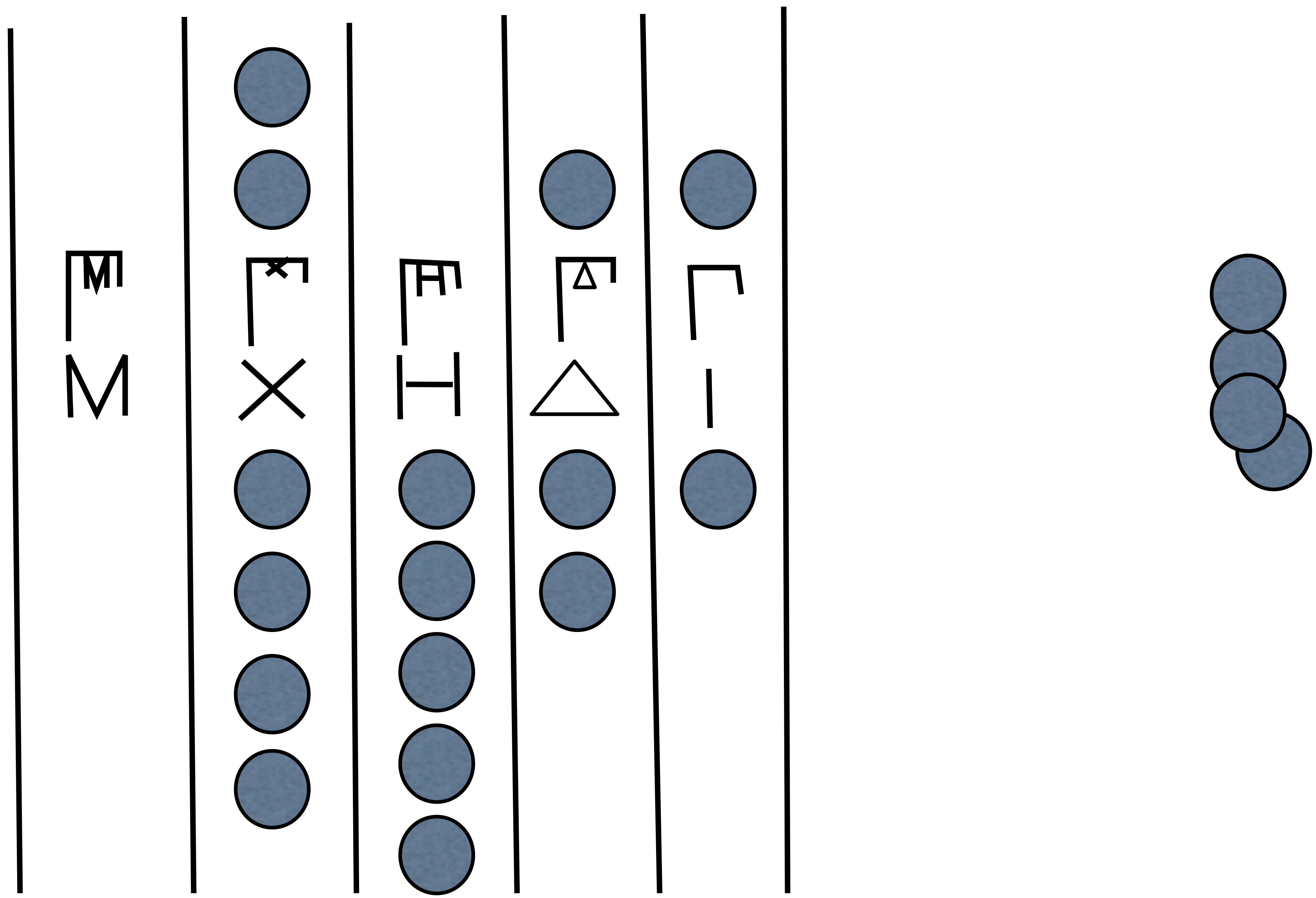
6264 + 8312



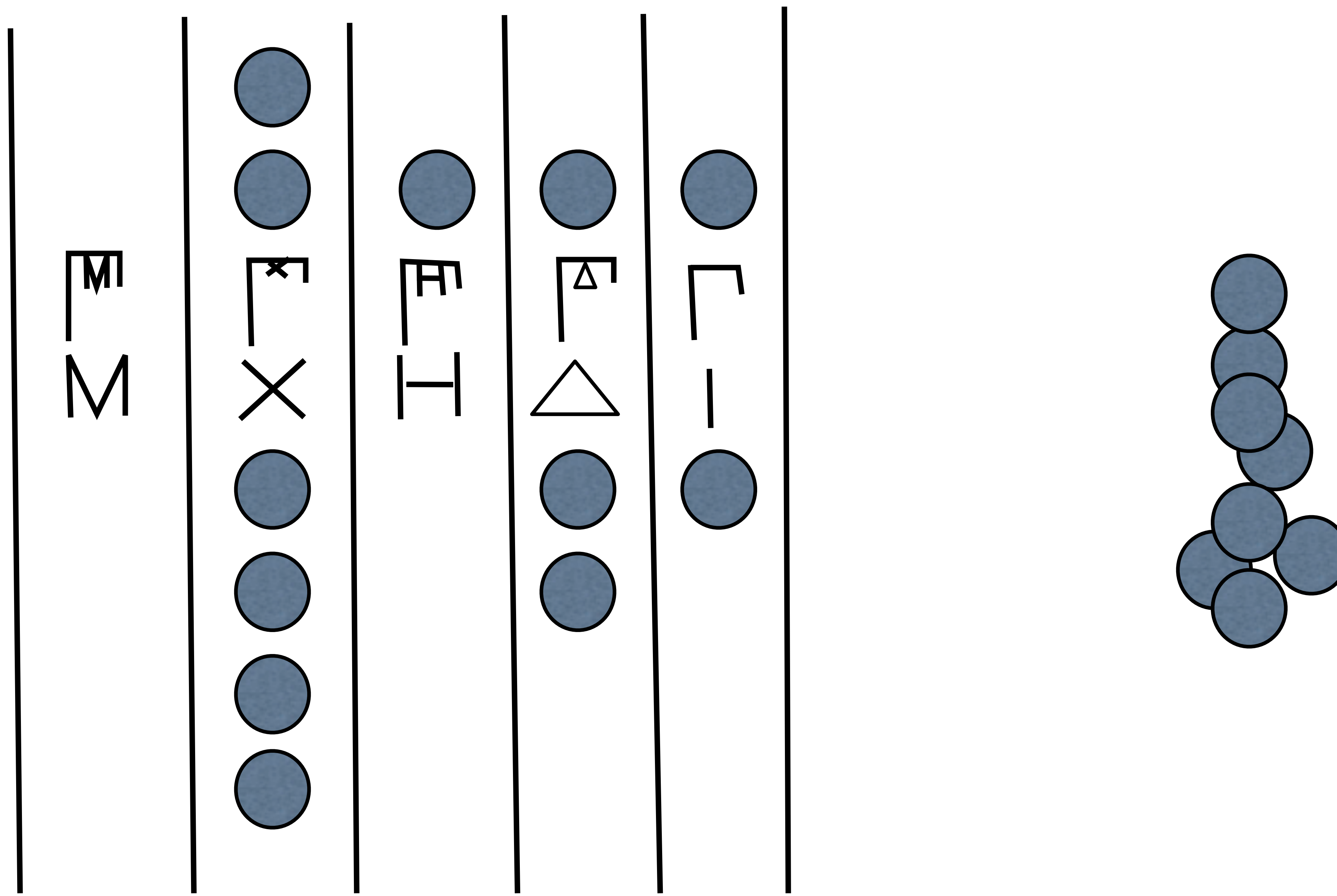
6264 + 8312



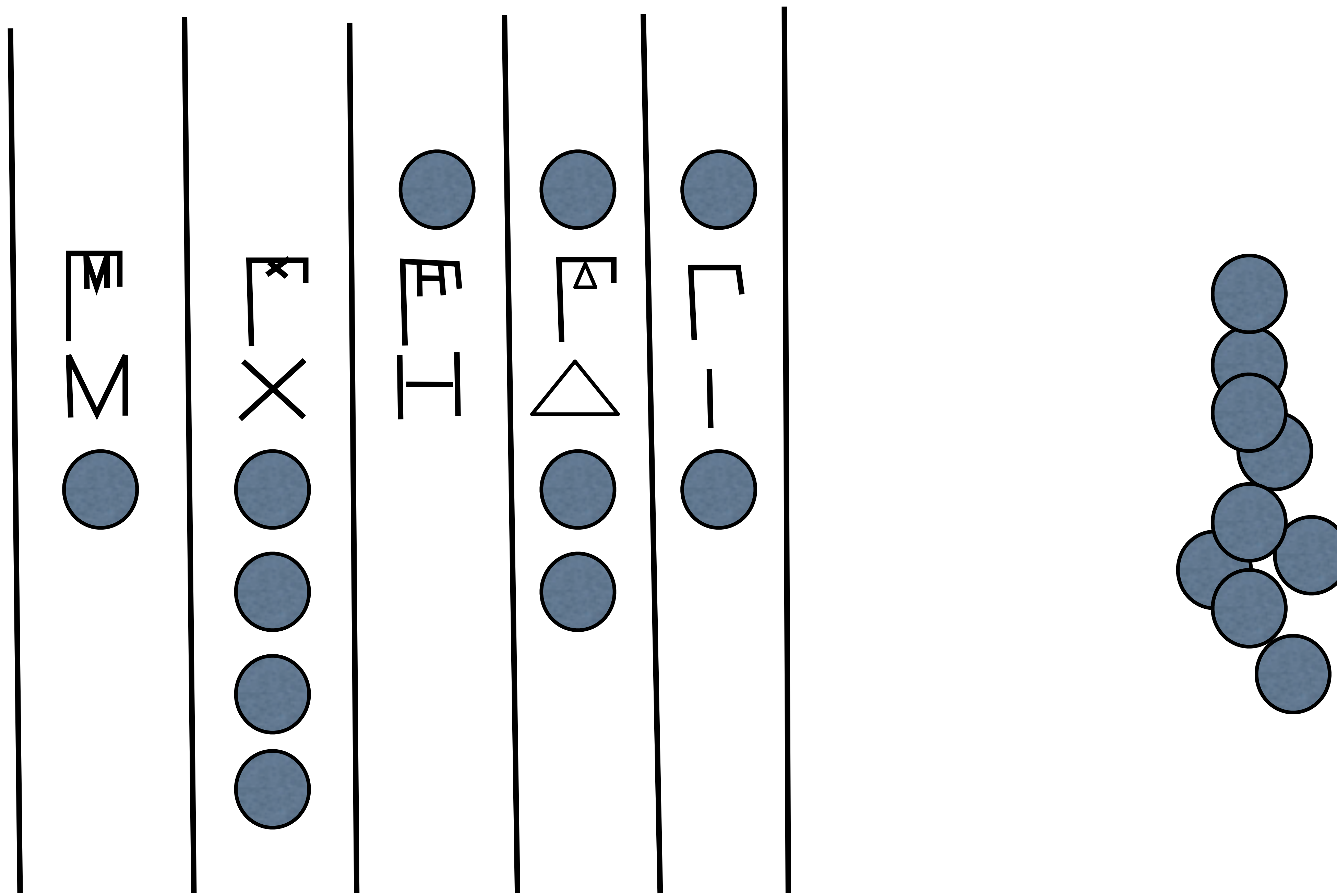
6264 + 8312



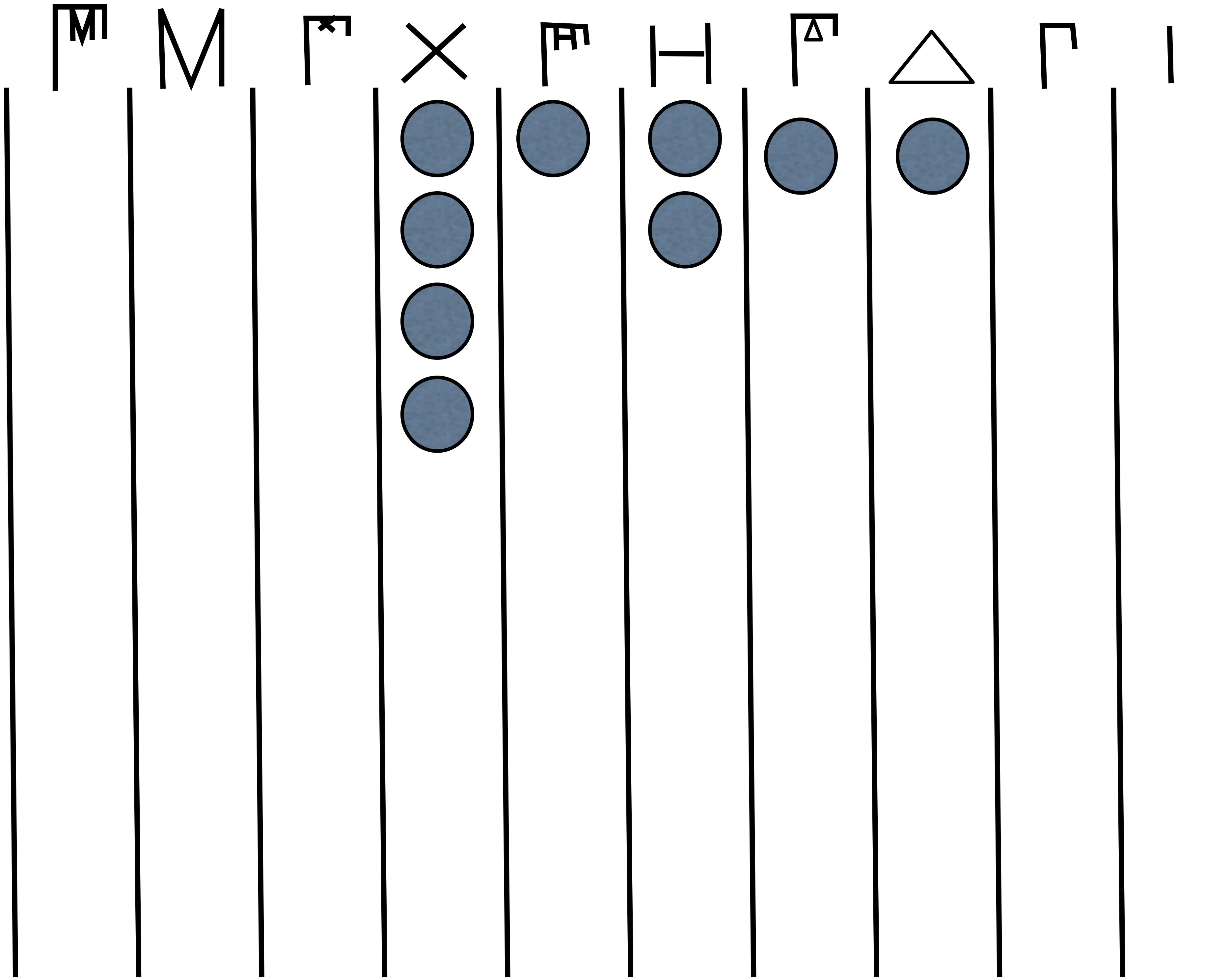
6264 + 8312



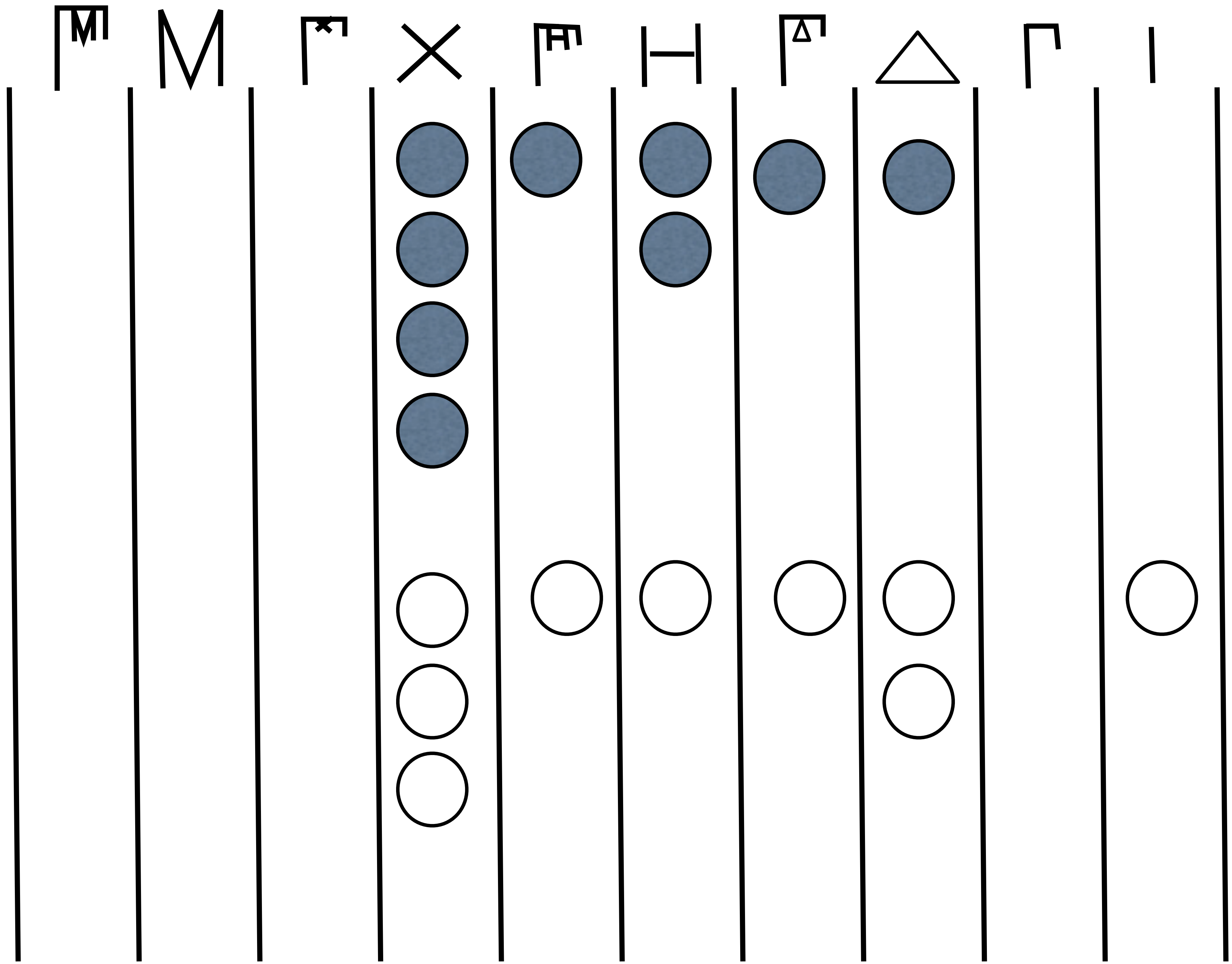
$$6264 + 8312 = 14576$$



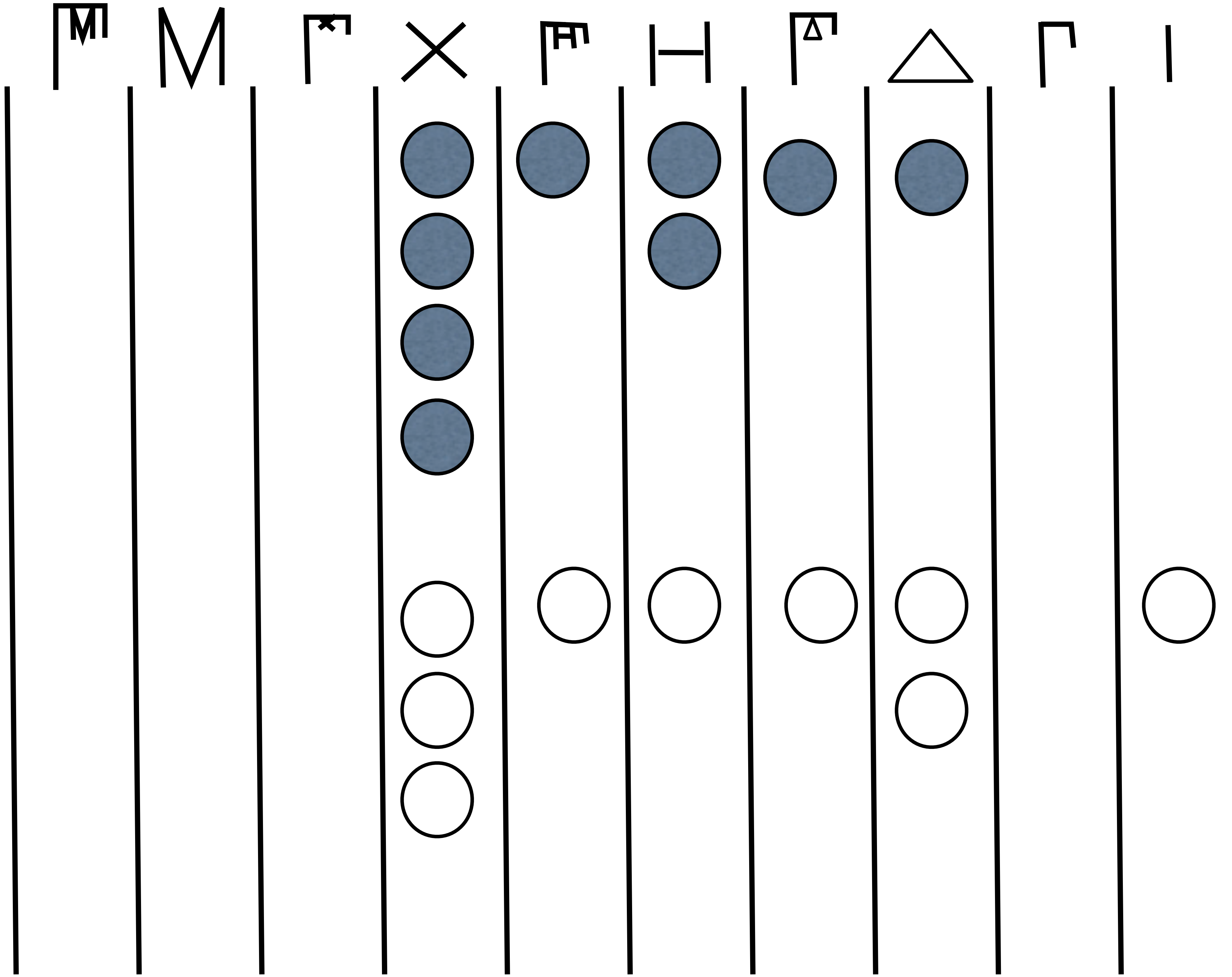
4760 - 3671



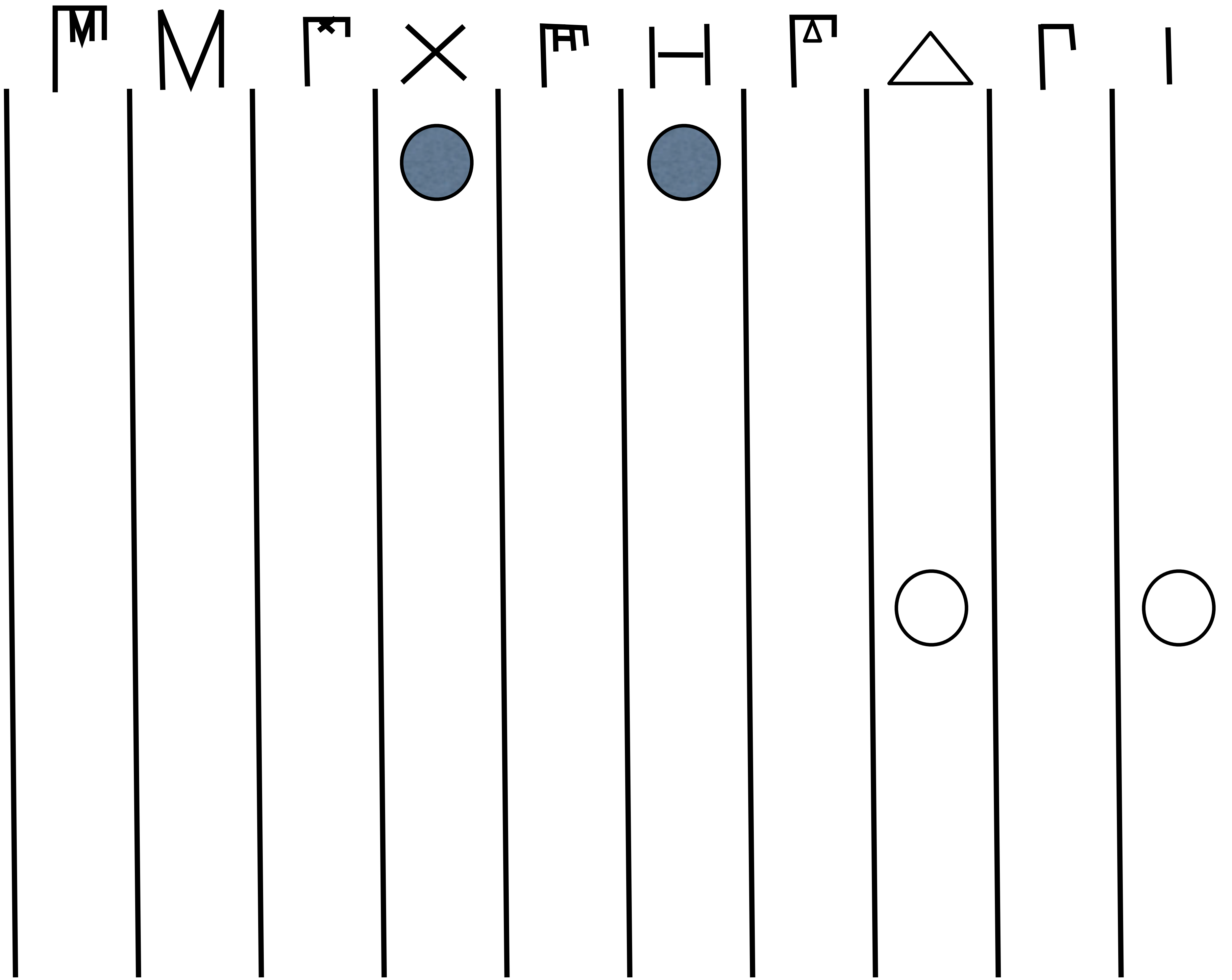
4760 - 3671



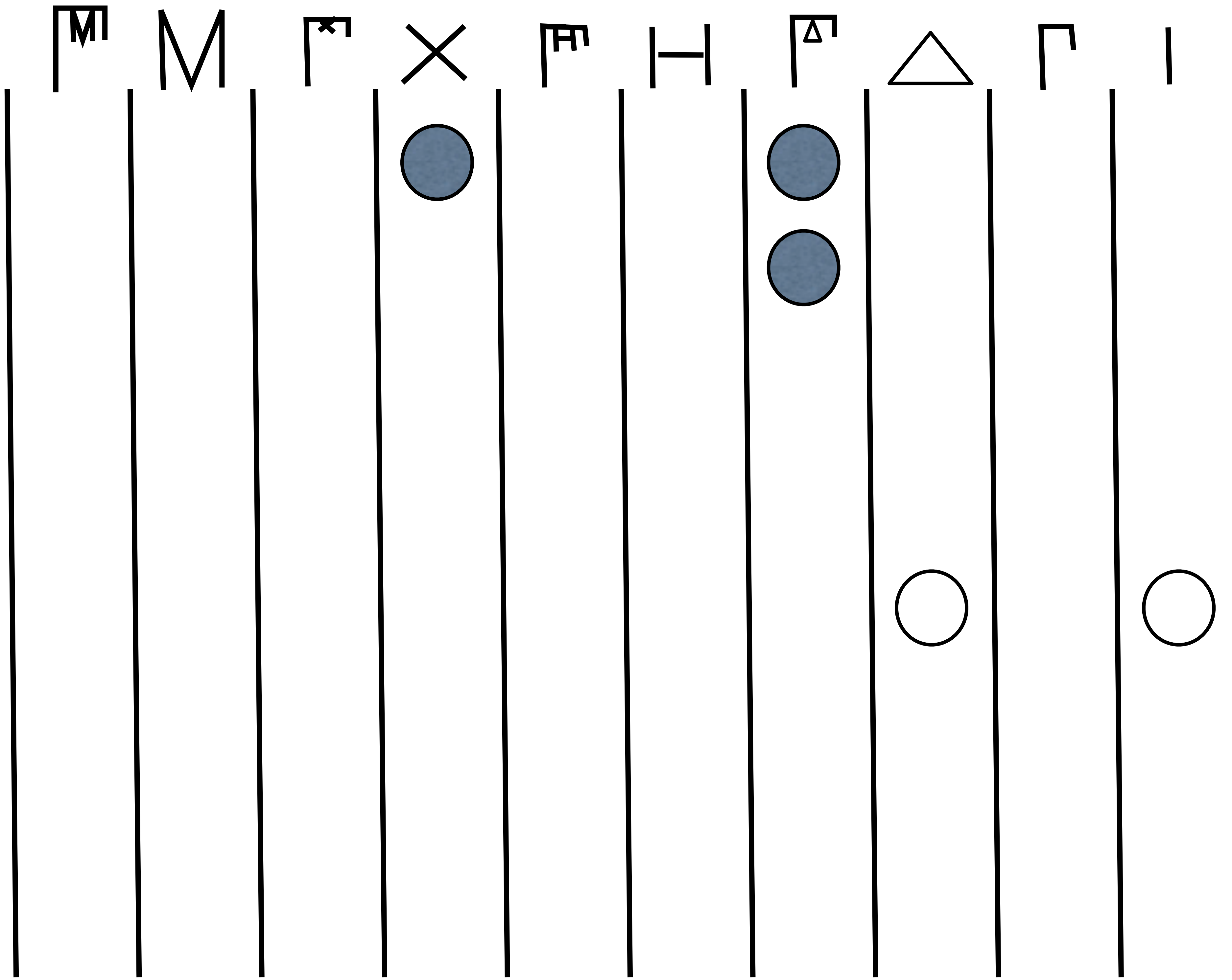
4760 - 3671



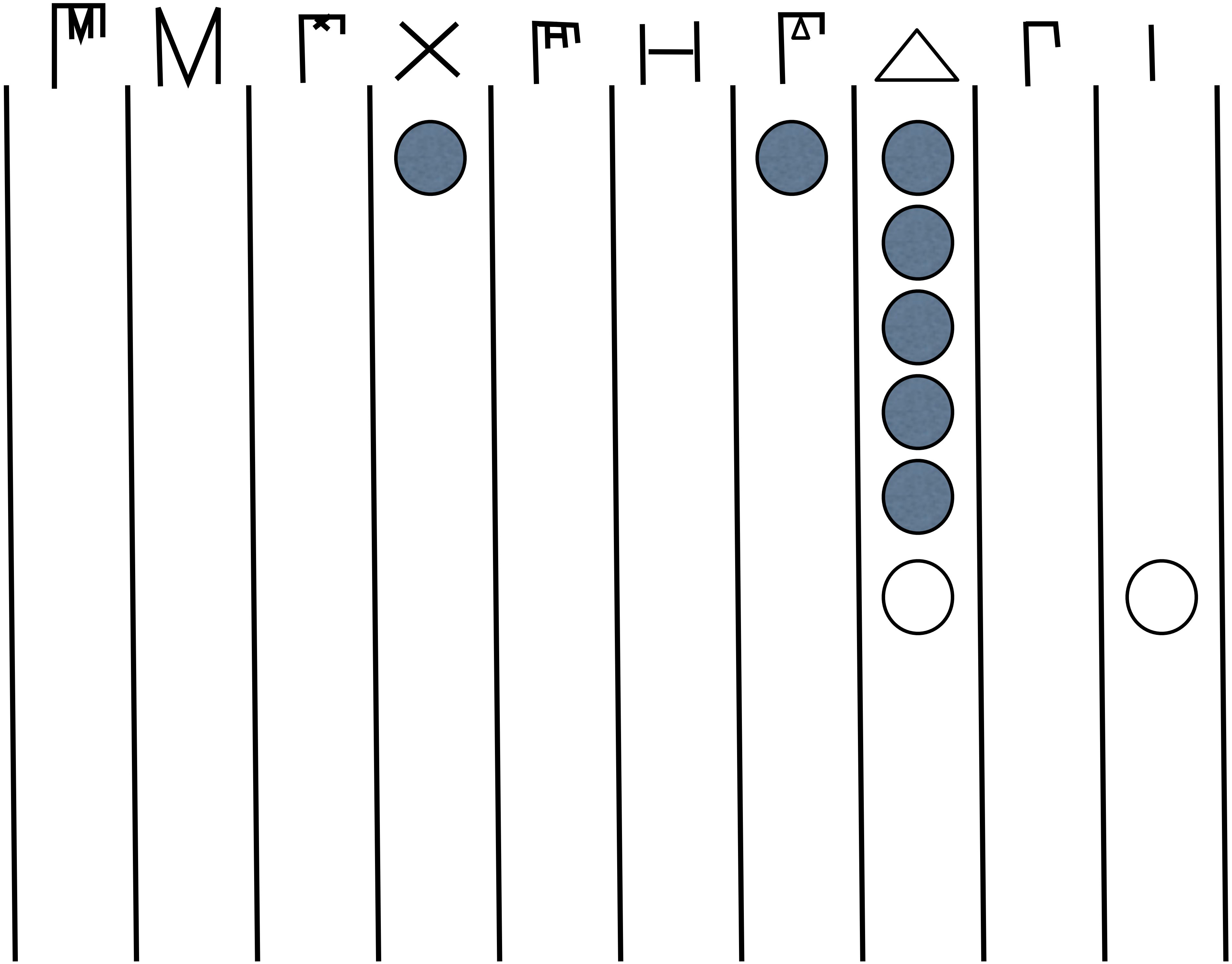
4760 - 3671



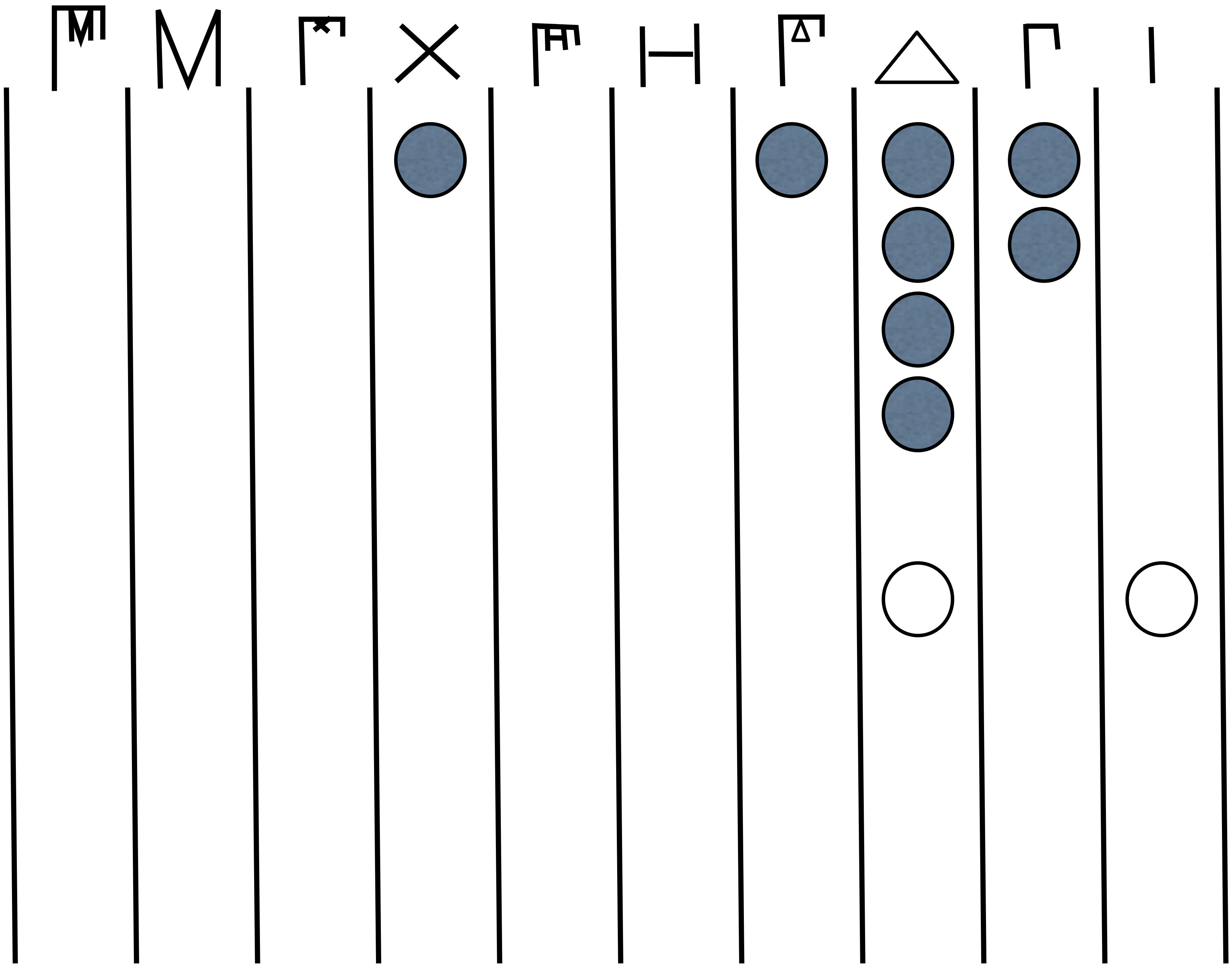
4760 - 3671



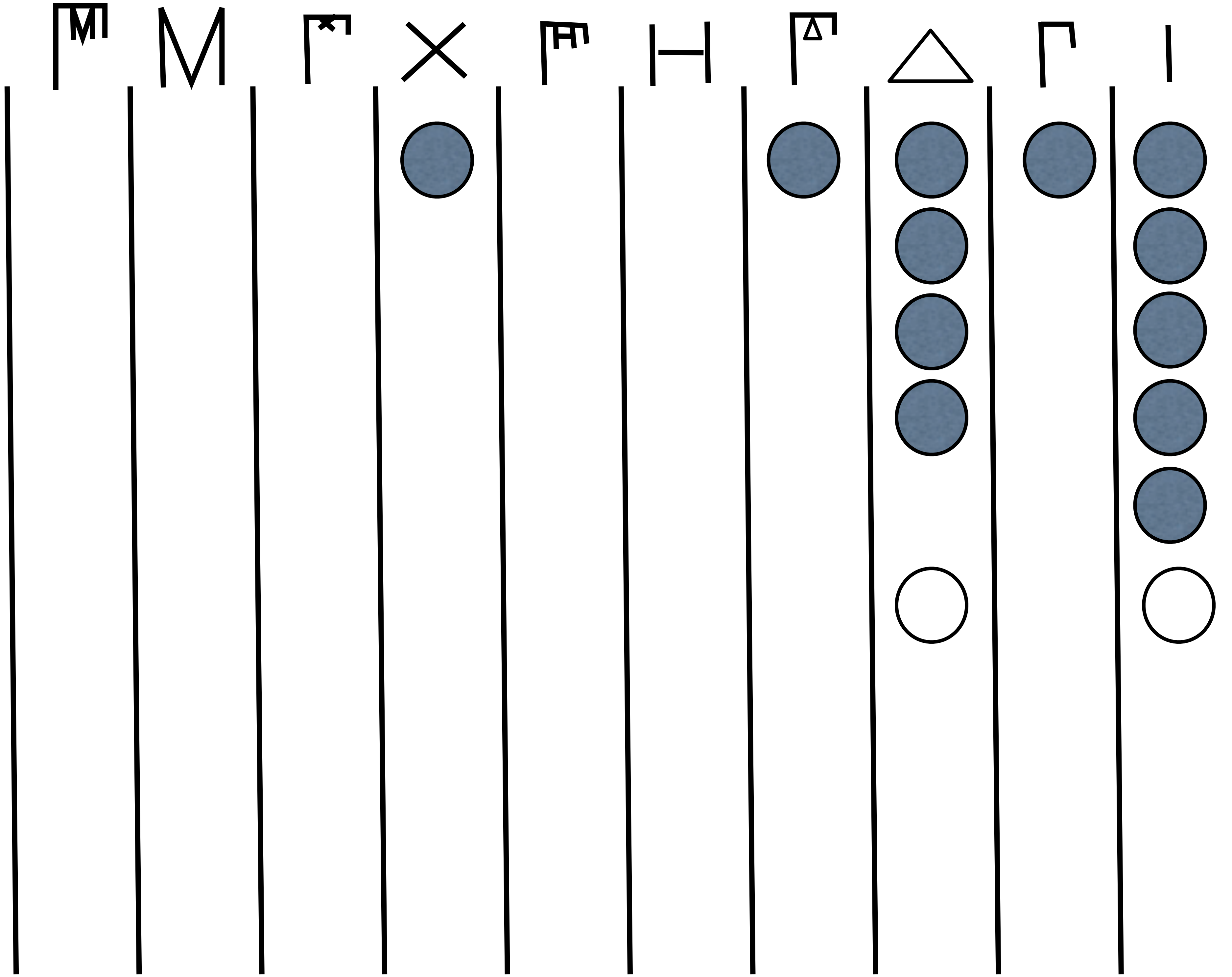
4760 - 3671



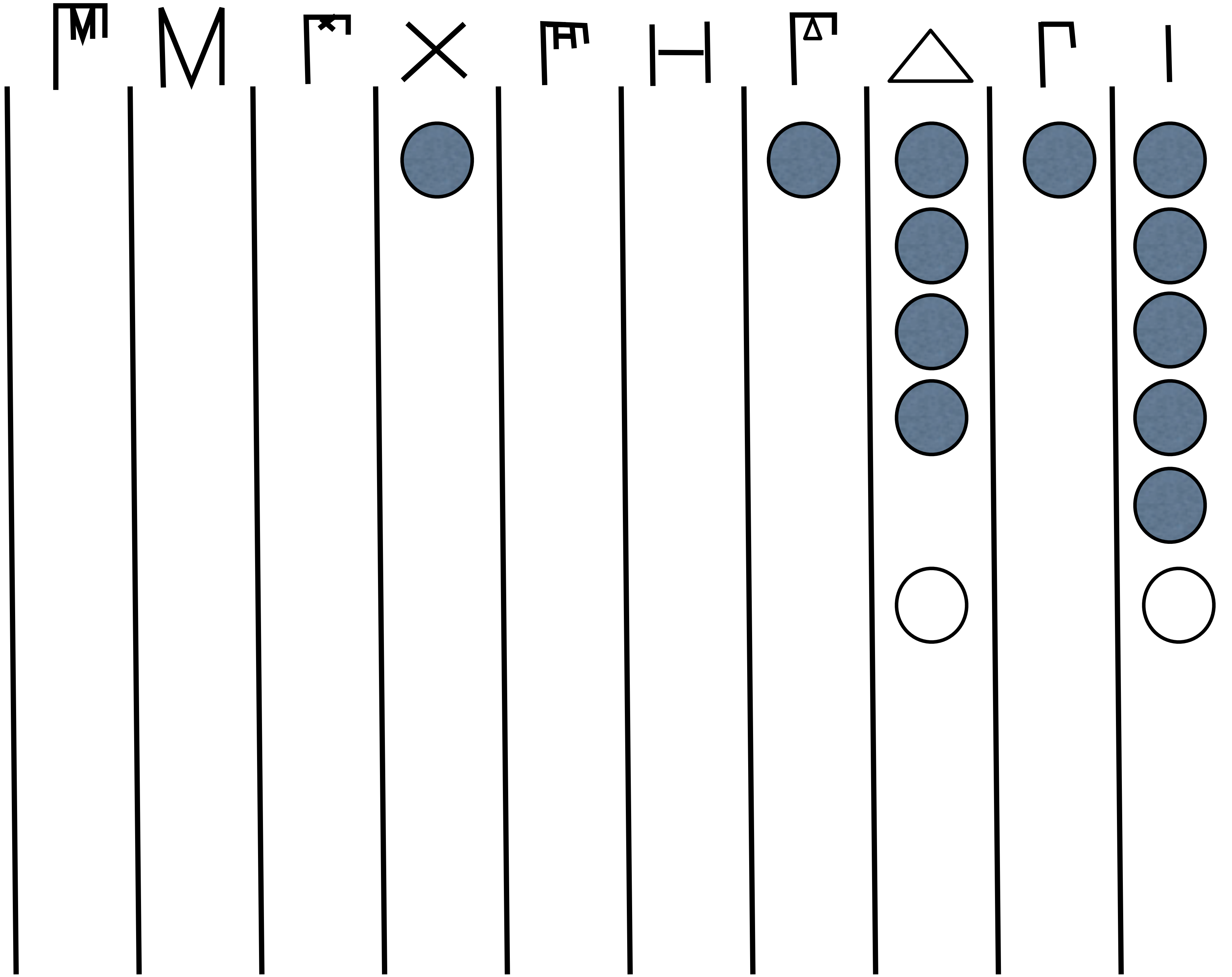
4760 - 3671



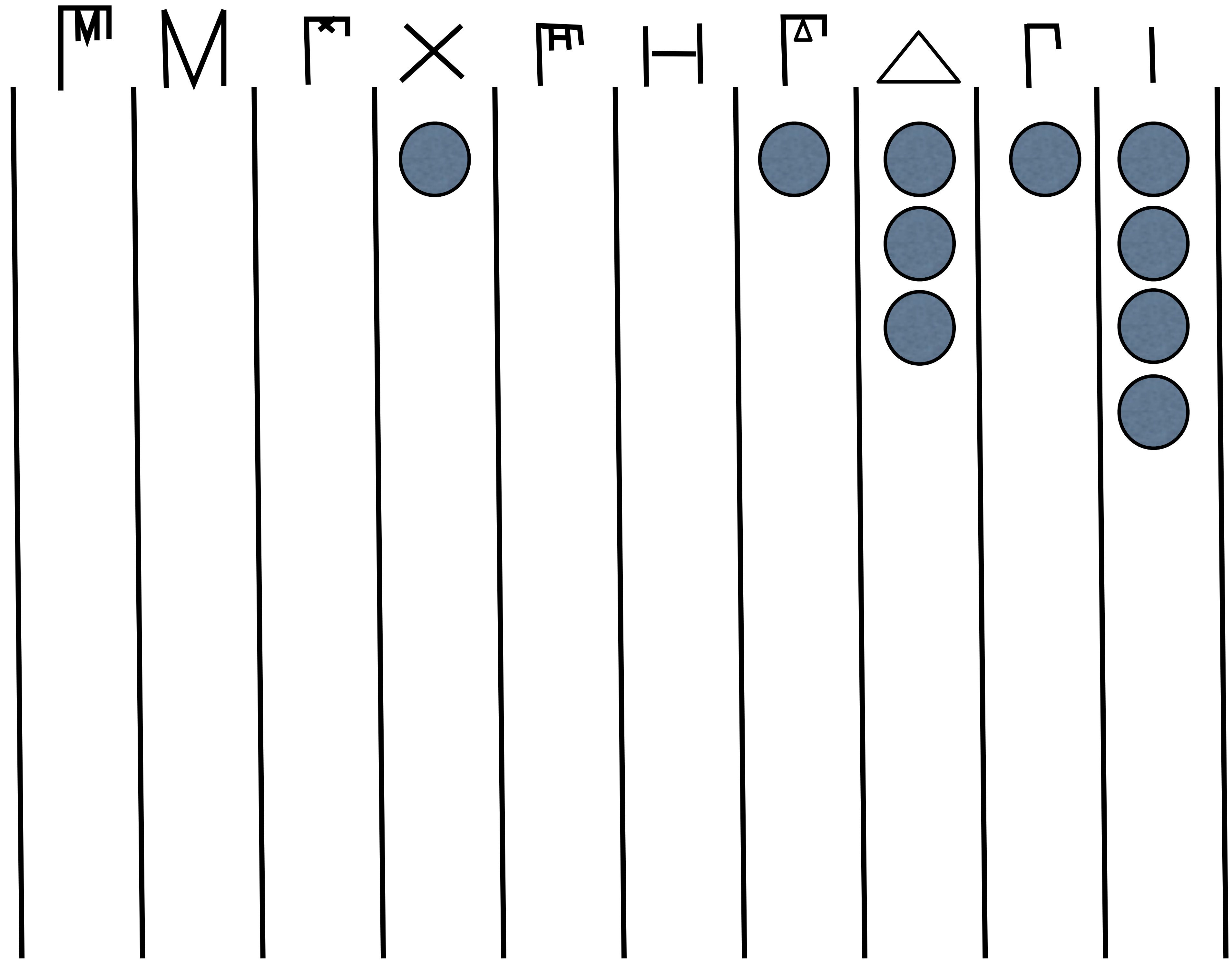
4760 - 3671



4760 - 3671



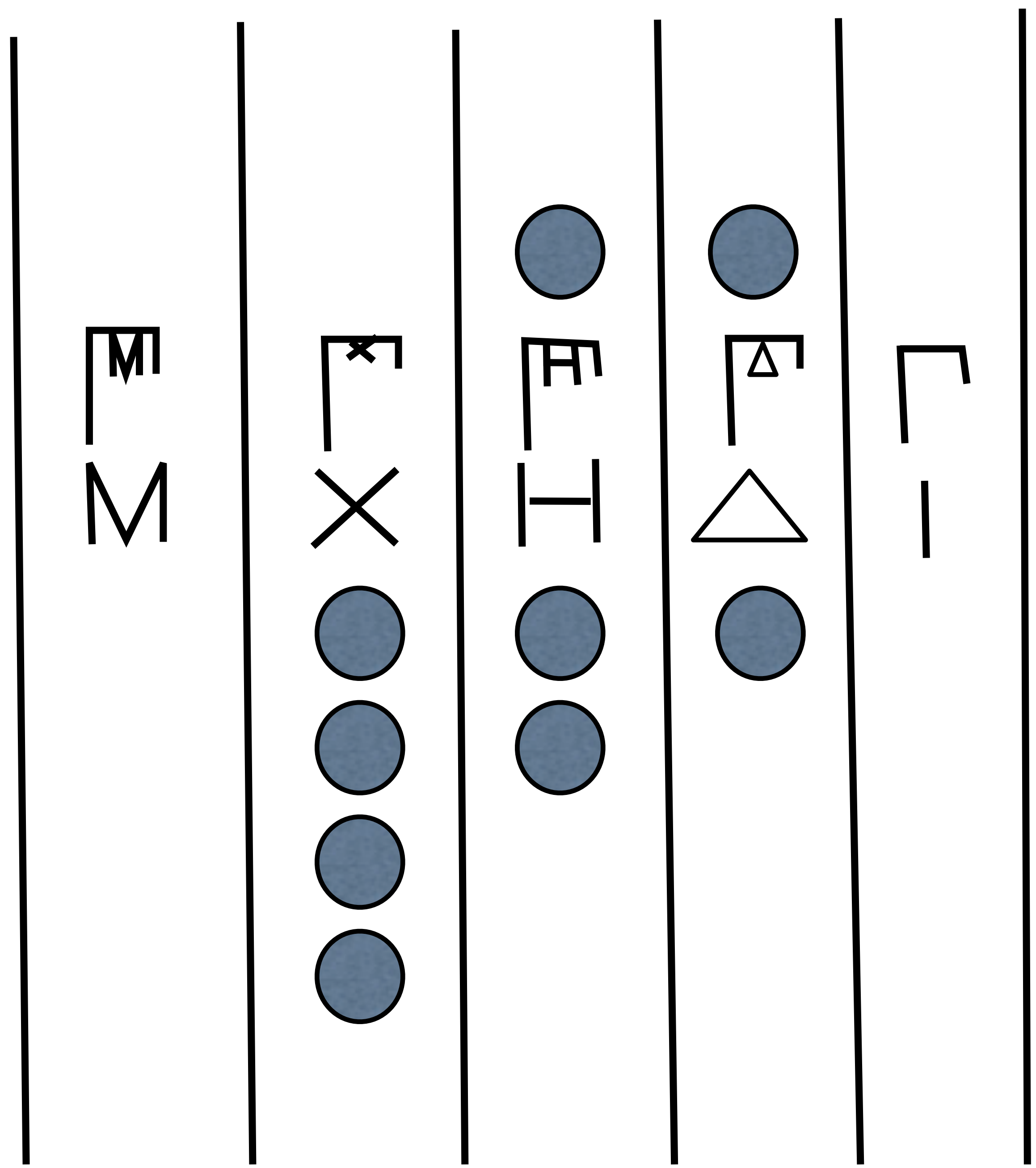
4760 - 3671 = 1089



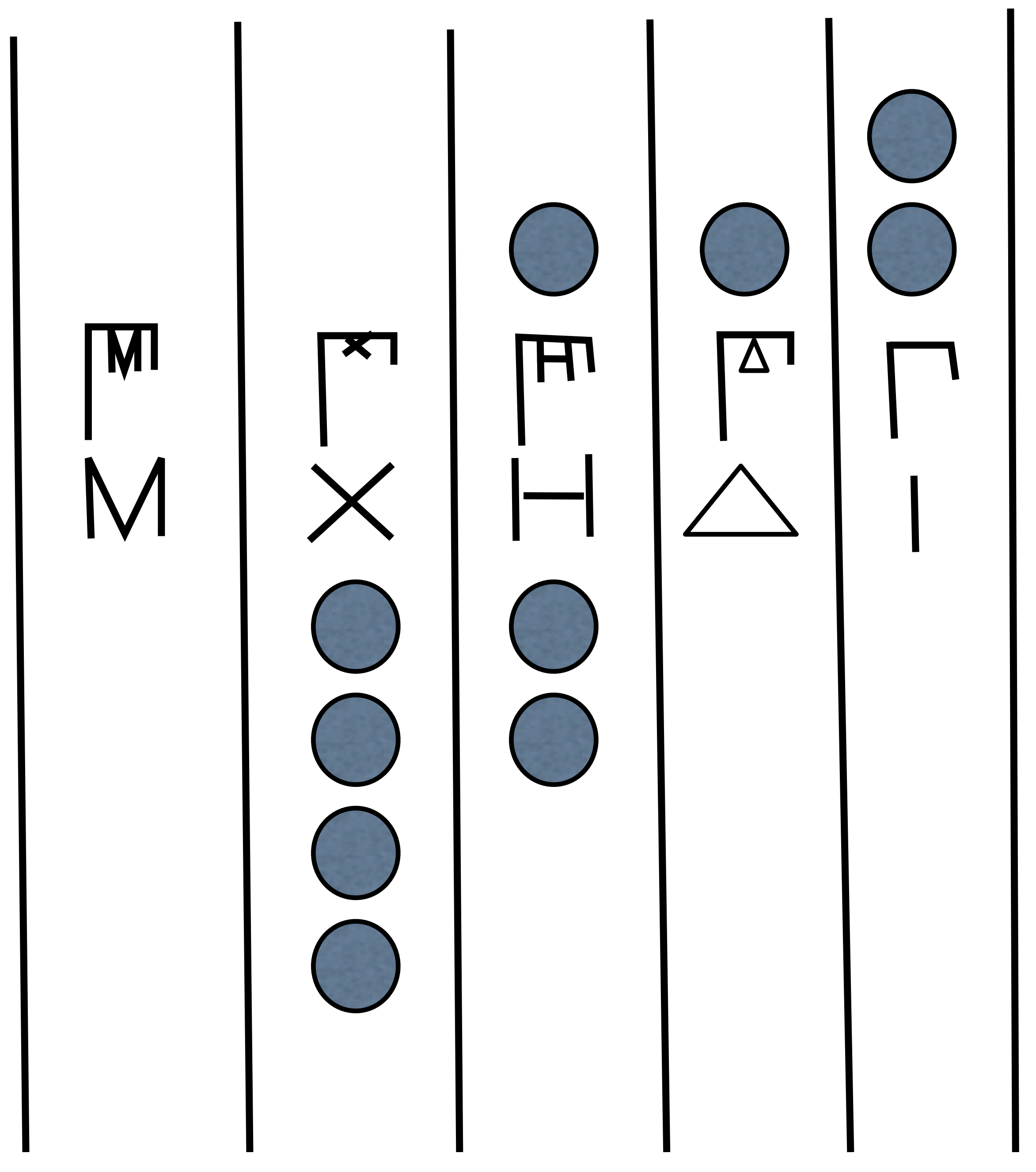
4760 - 3671

em colunas decimais temos de usar anti-redução total...

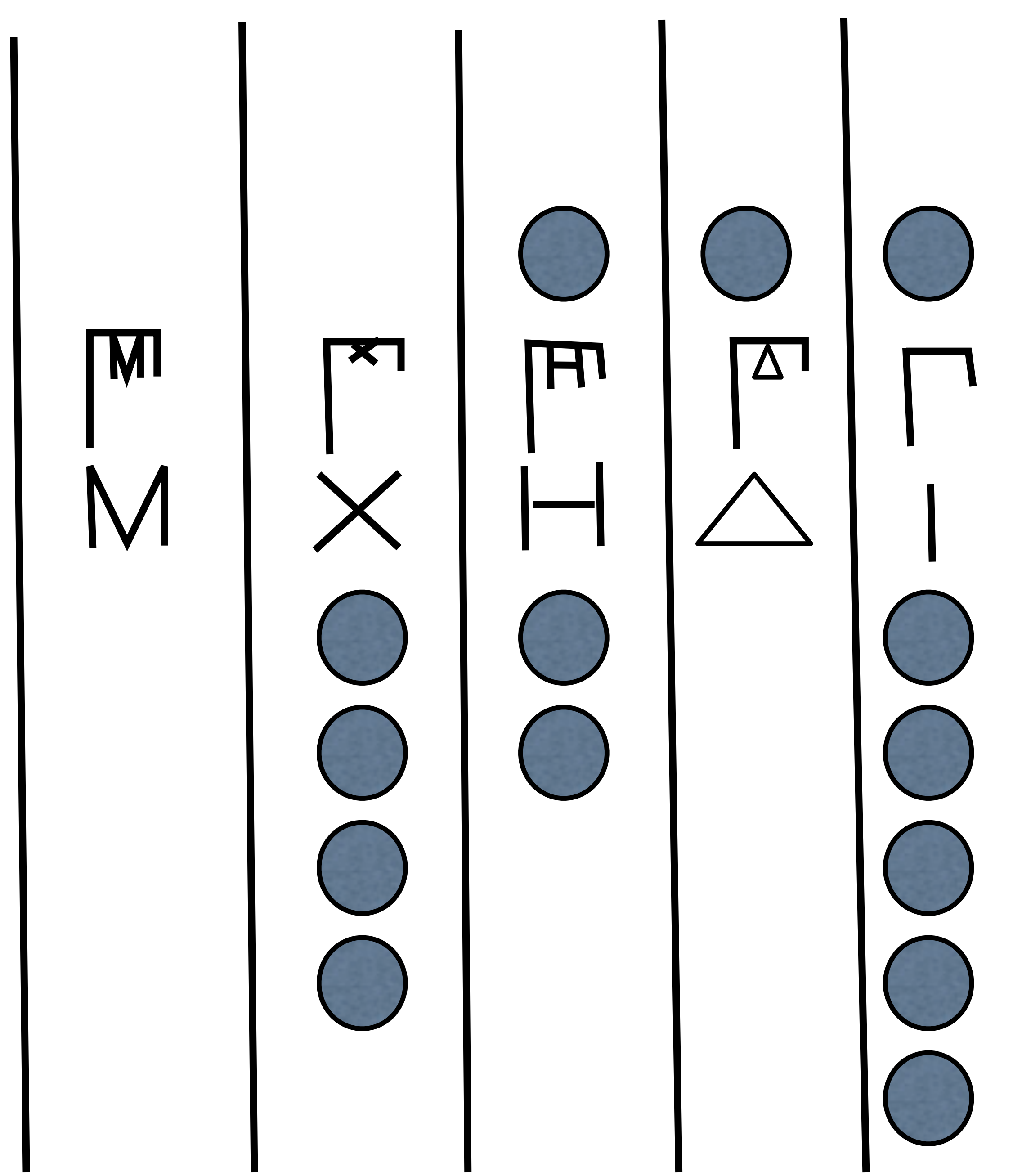
4760 - 3671



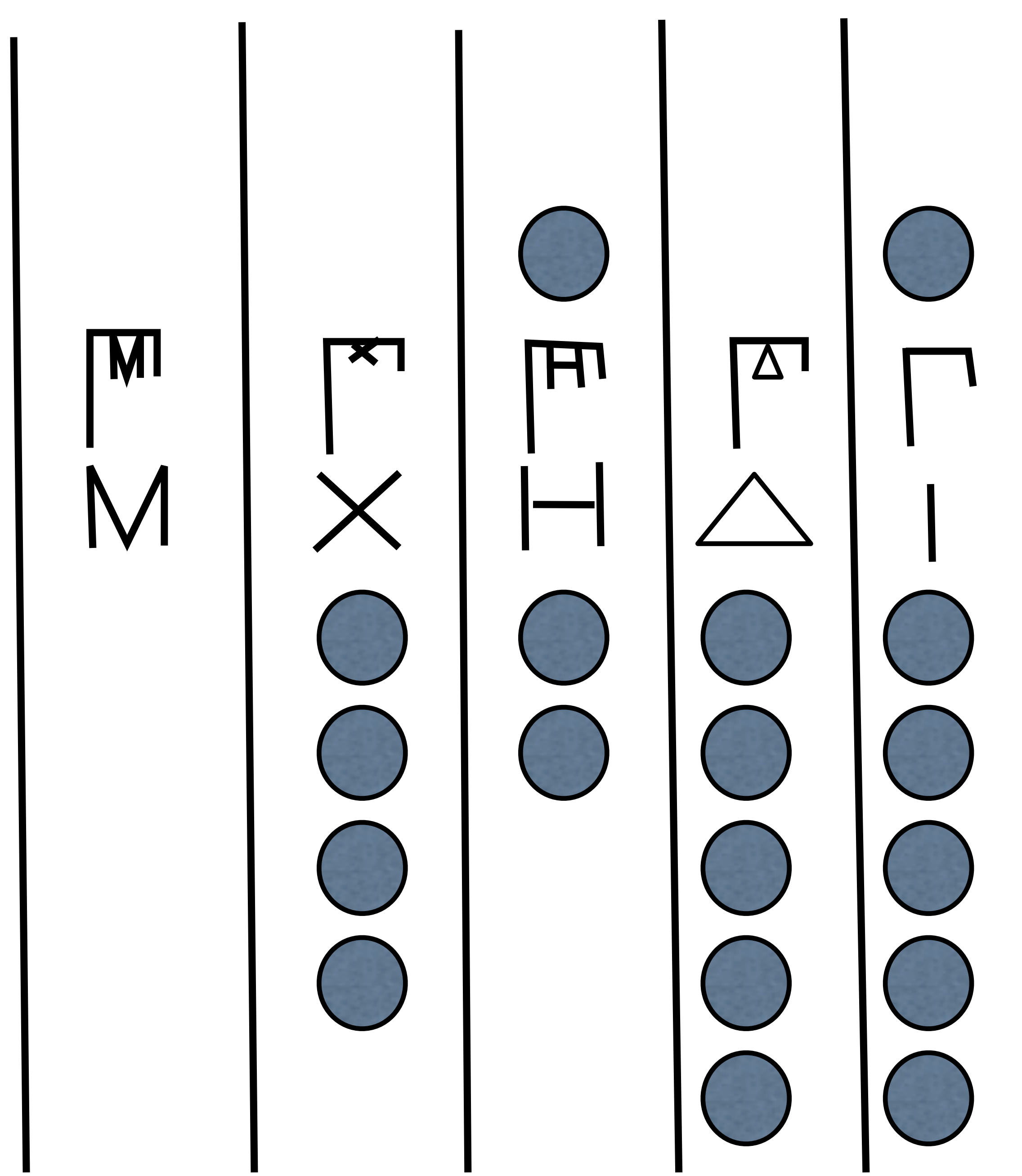
4760 - 3671



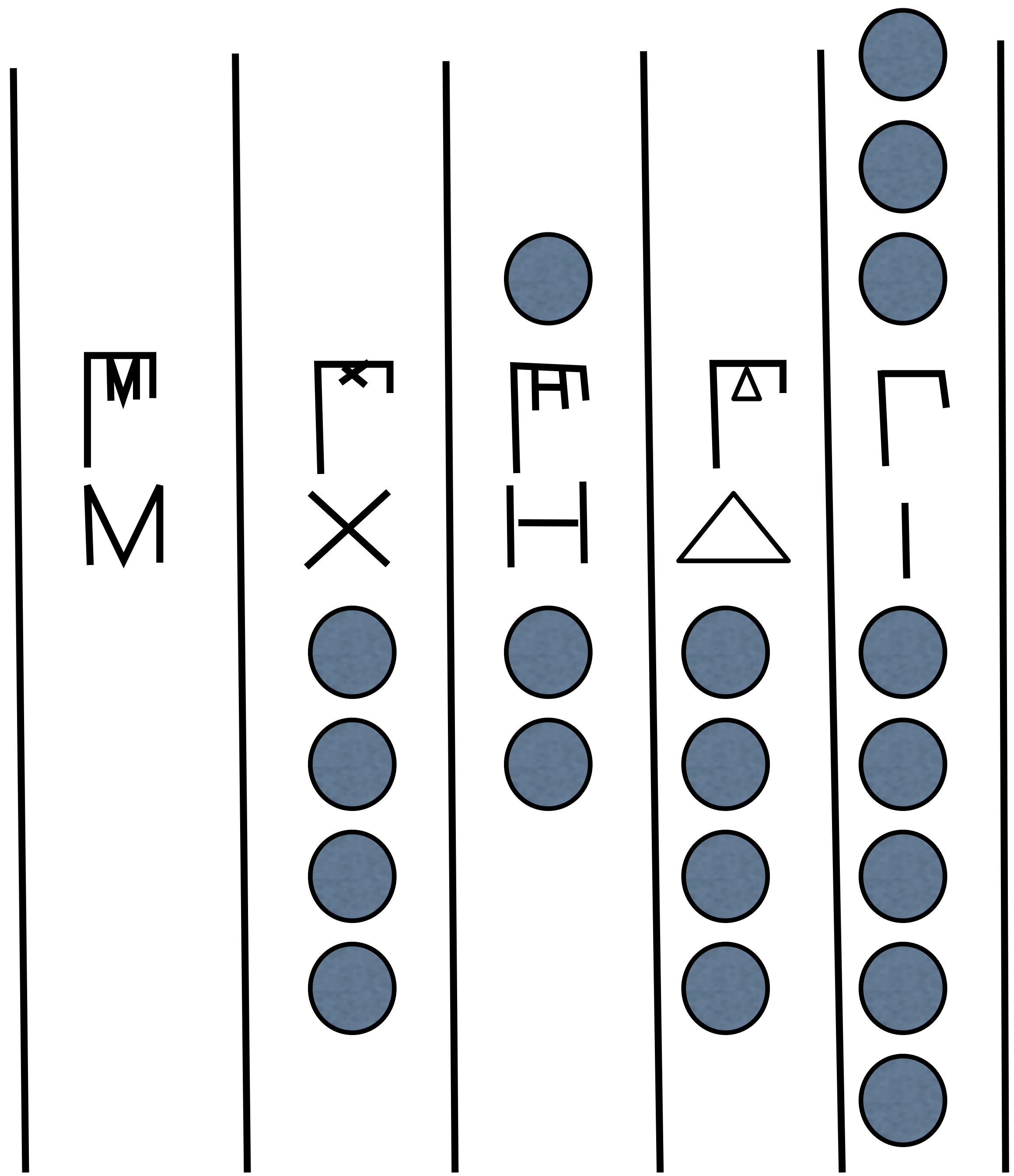
4760 - 3671



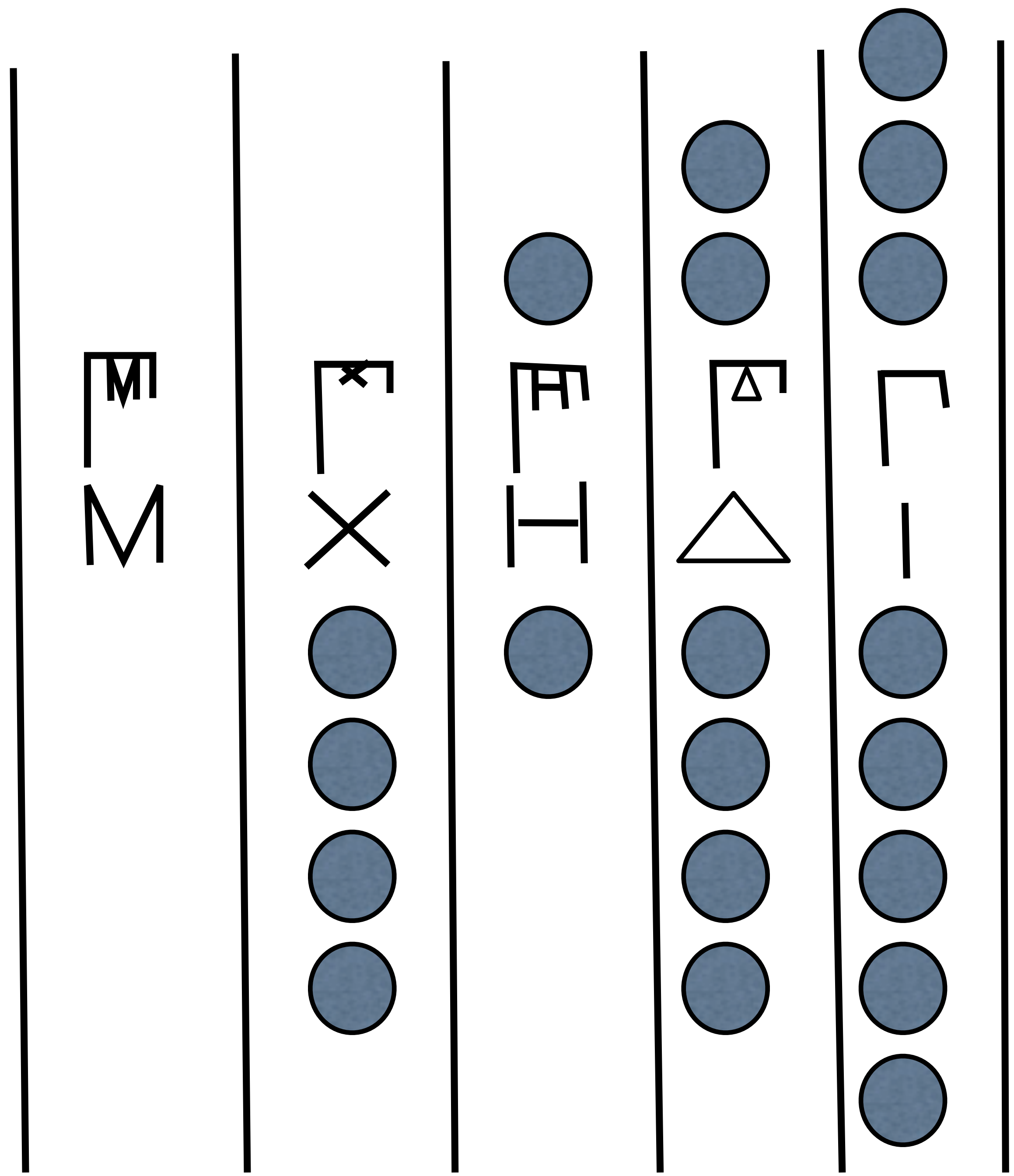
4760 - 3671



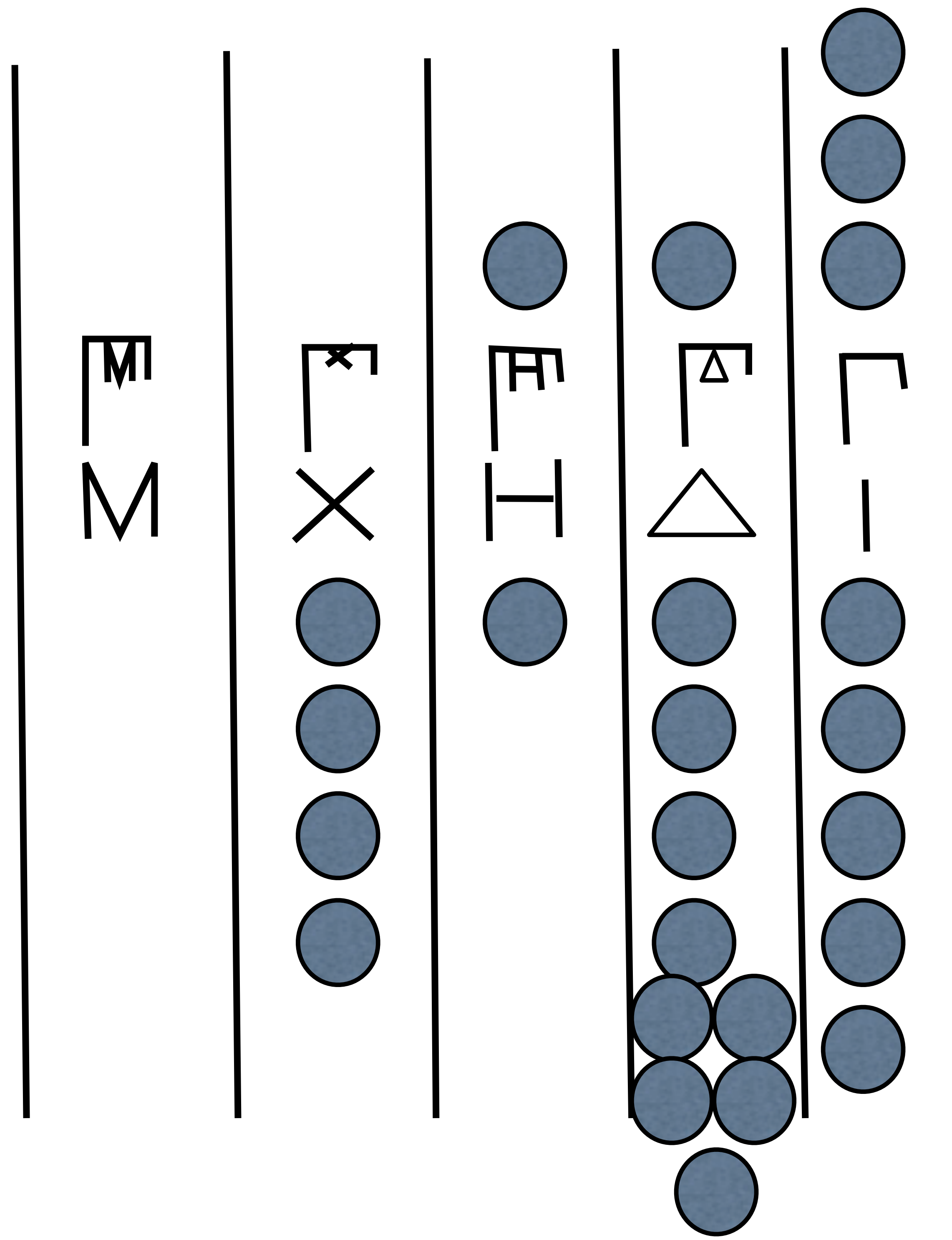
4760 - 3671



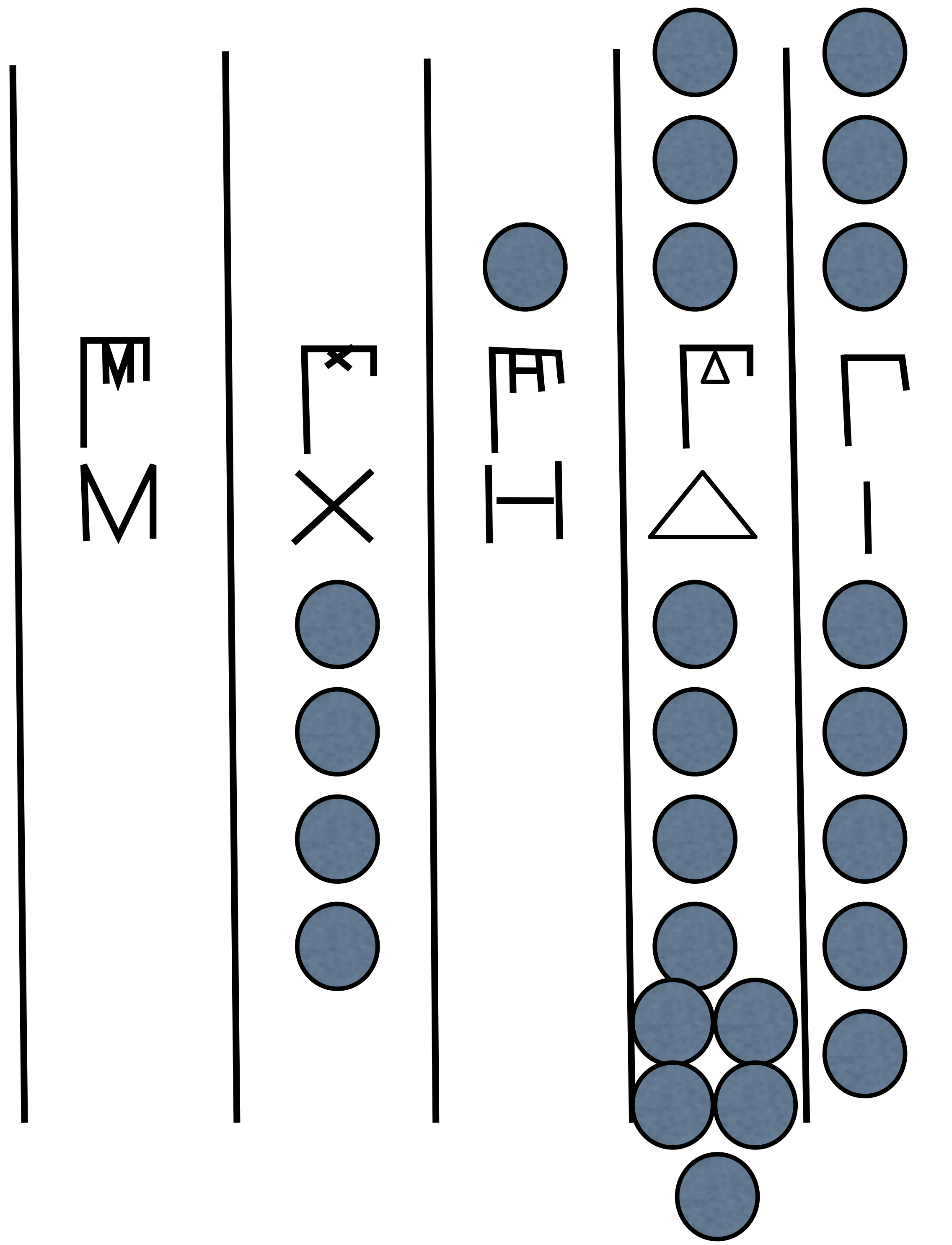
46760 - 3671



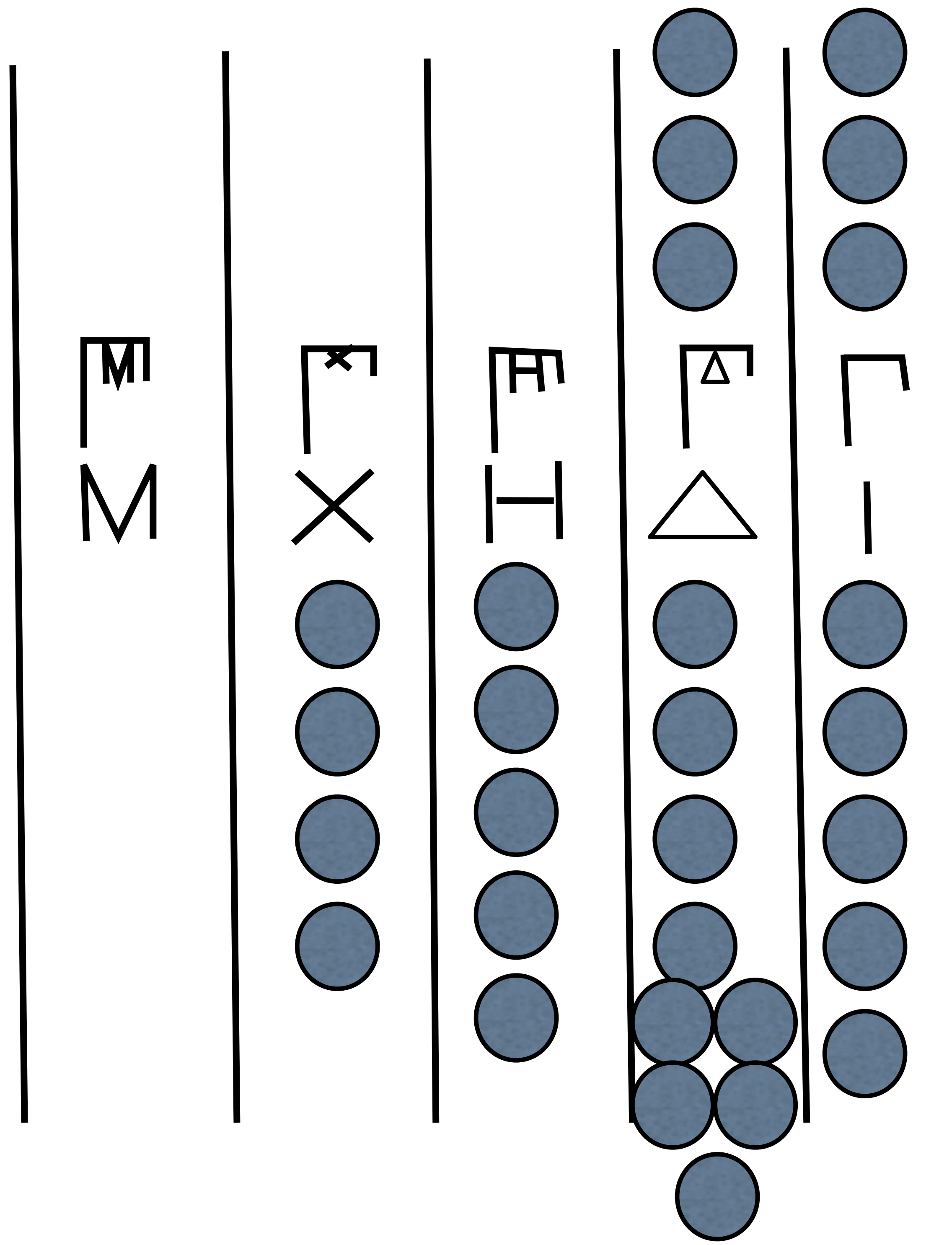
4760 - 3671



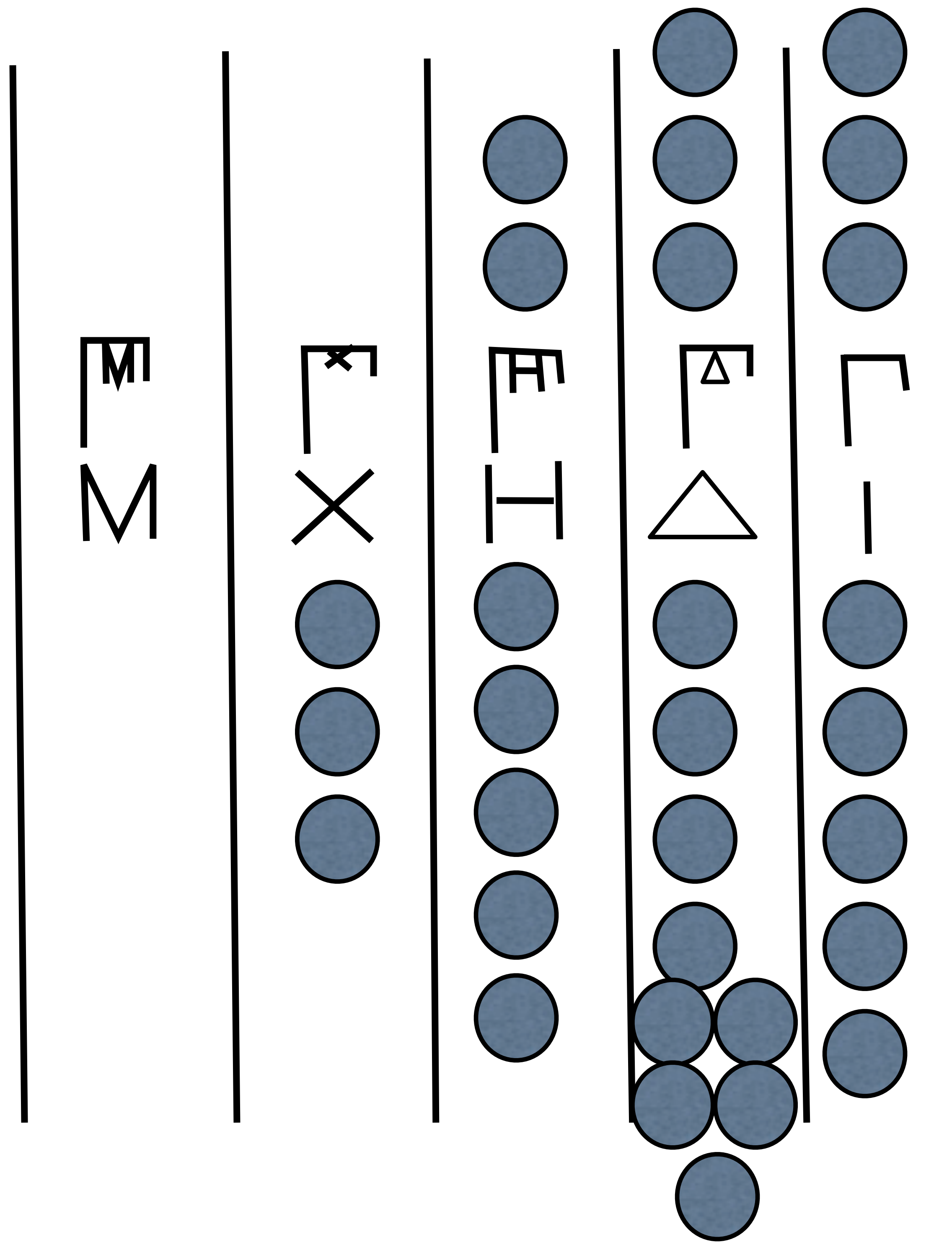
4760 - 3671



4760 - 3671

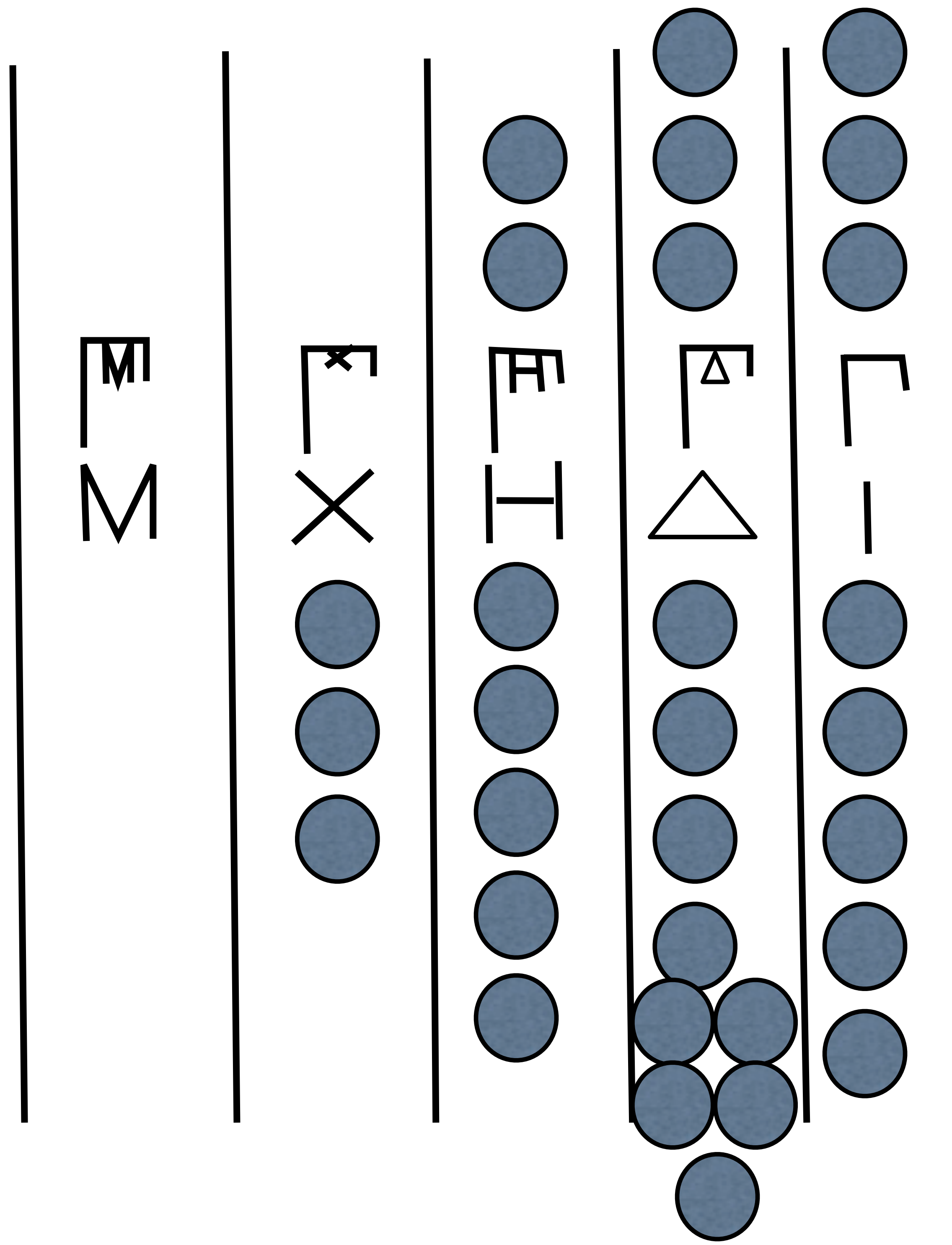


4760 - 3671



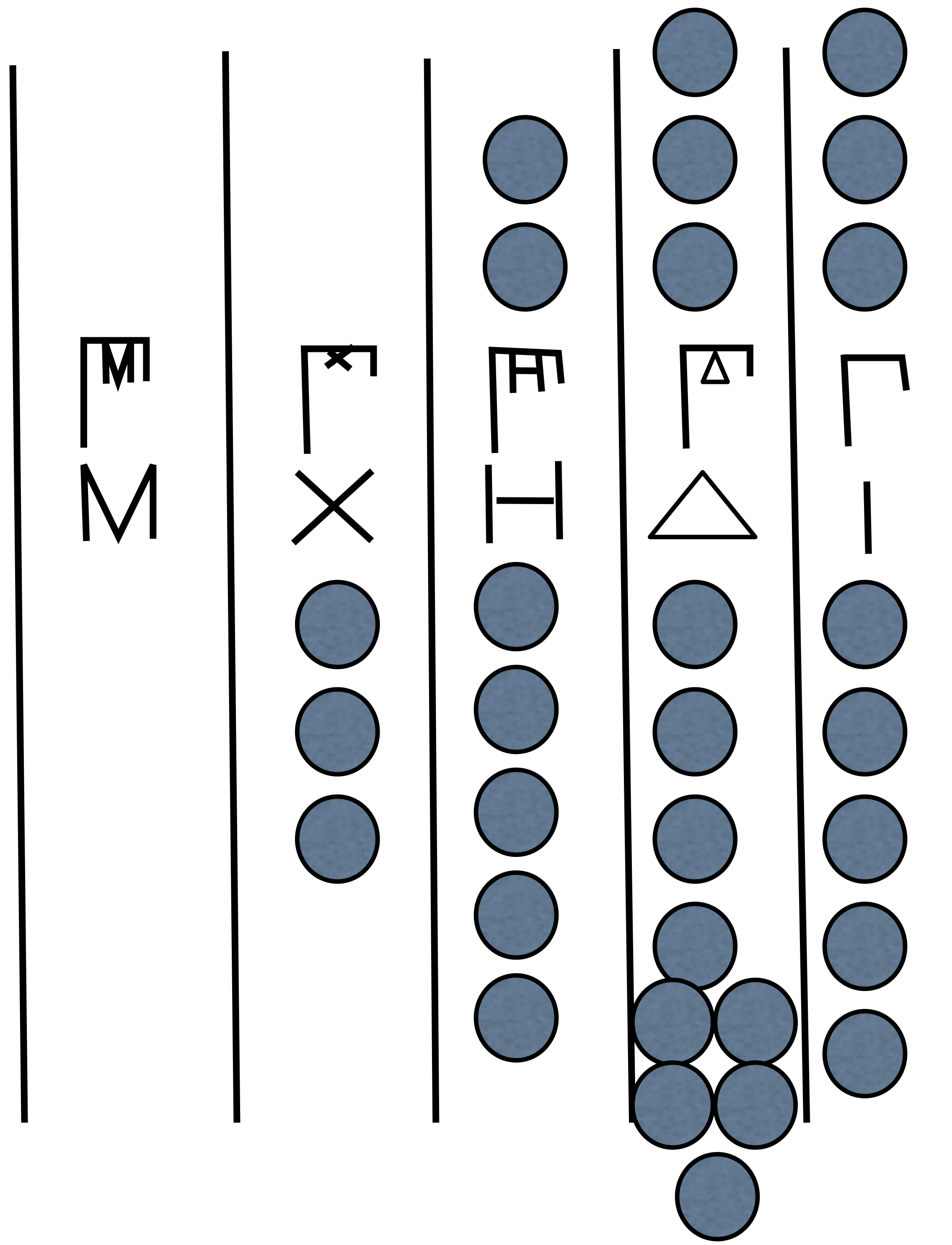
4760 - 3671

Agora retiramos 3671 usando a ordem natural (E⟶D)



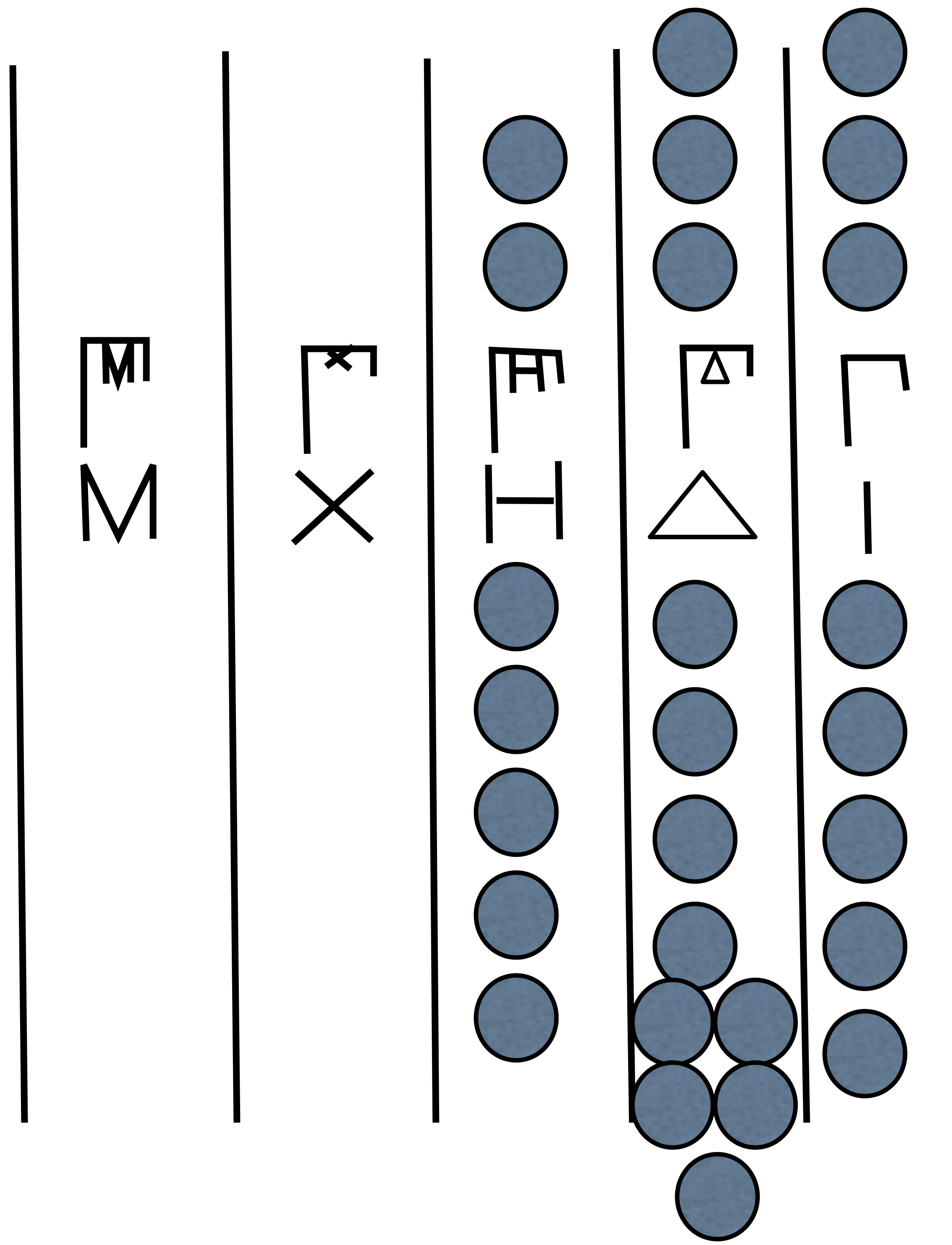
4760 - 3671

3671

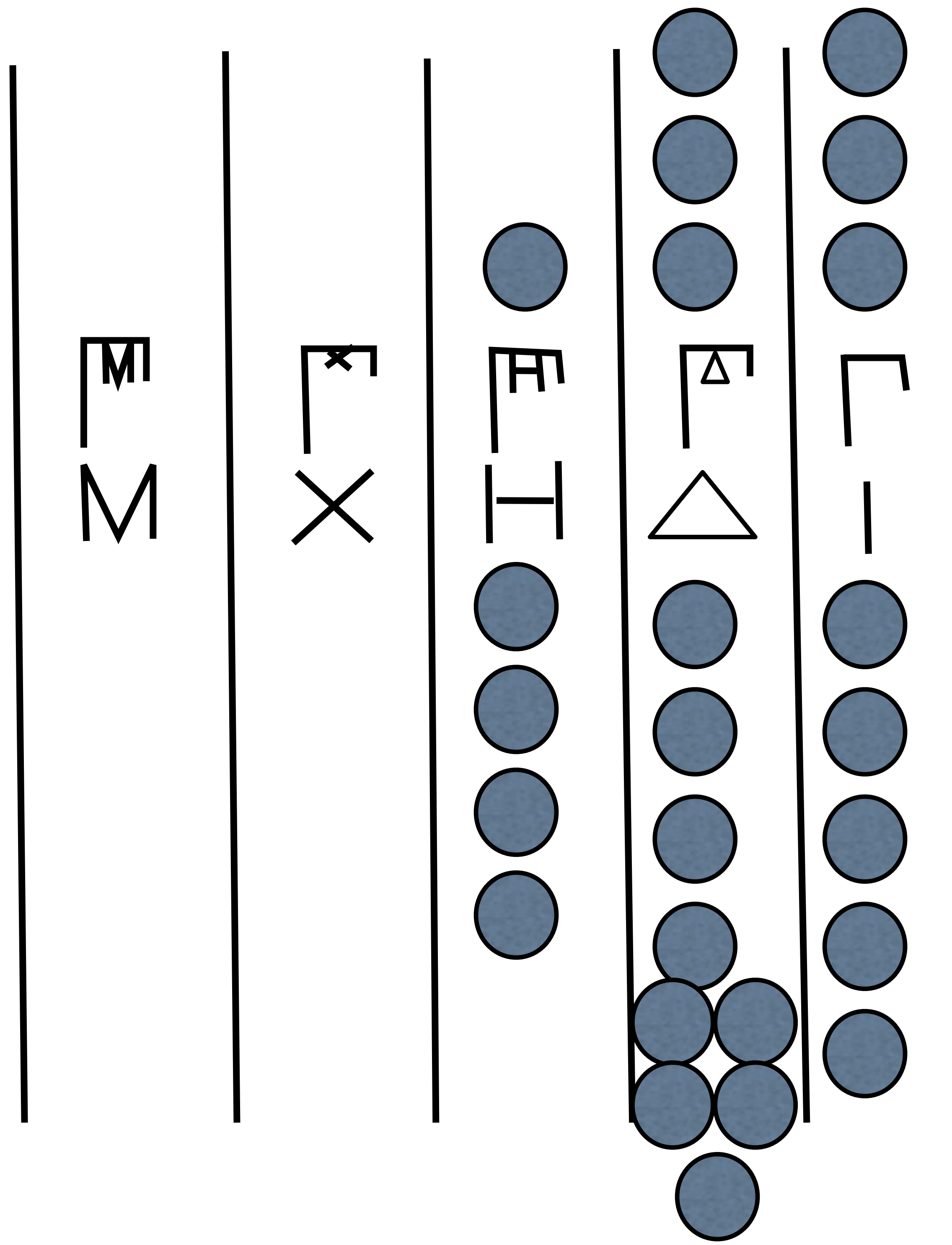


4760 - 3671

671



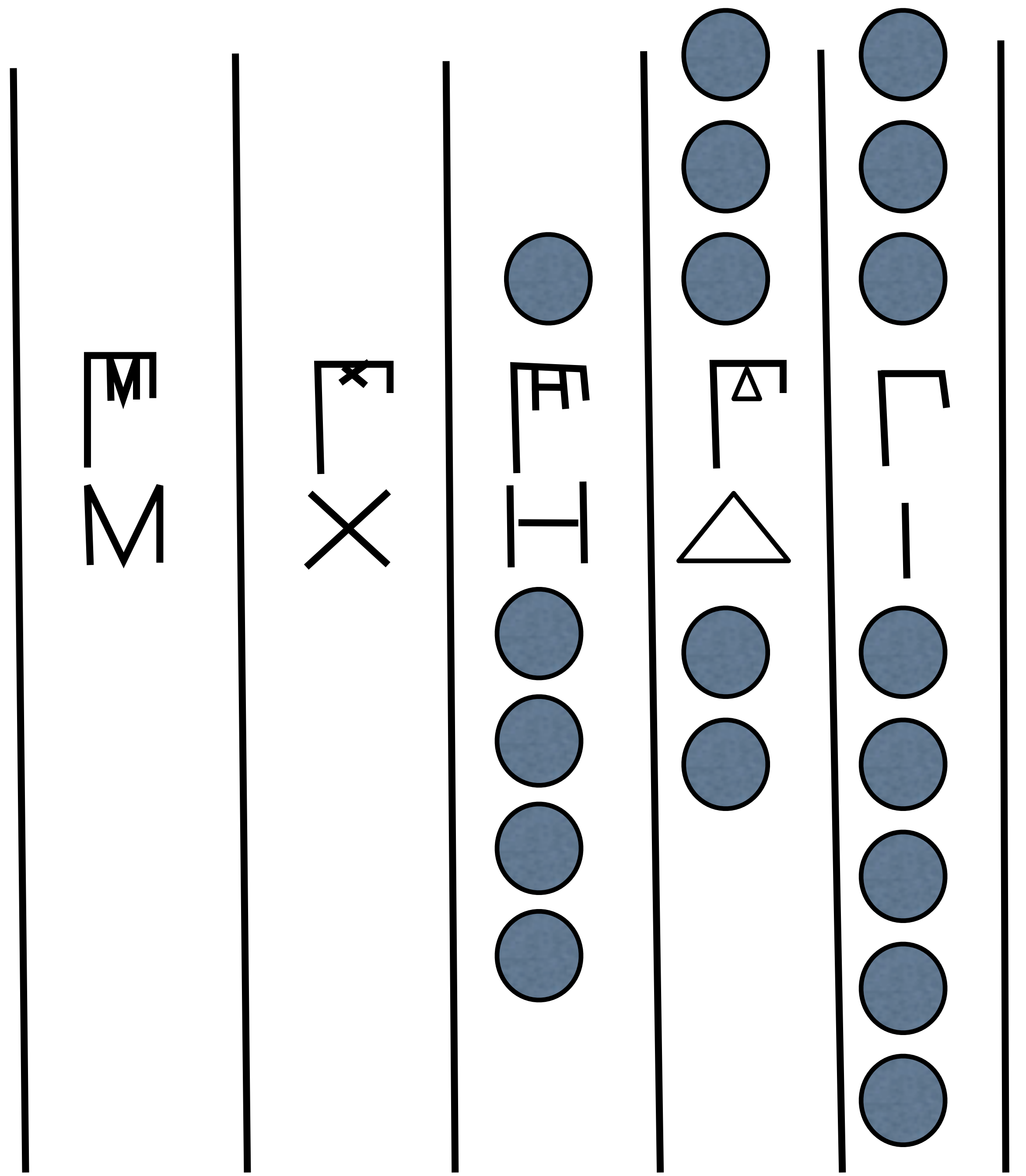
4760 - 3671



71

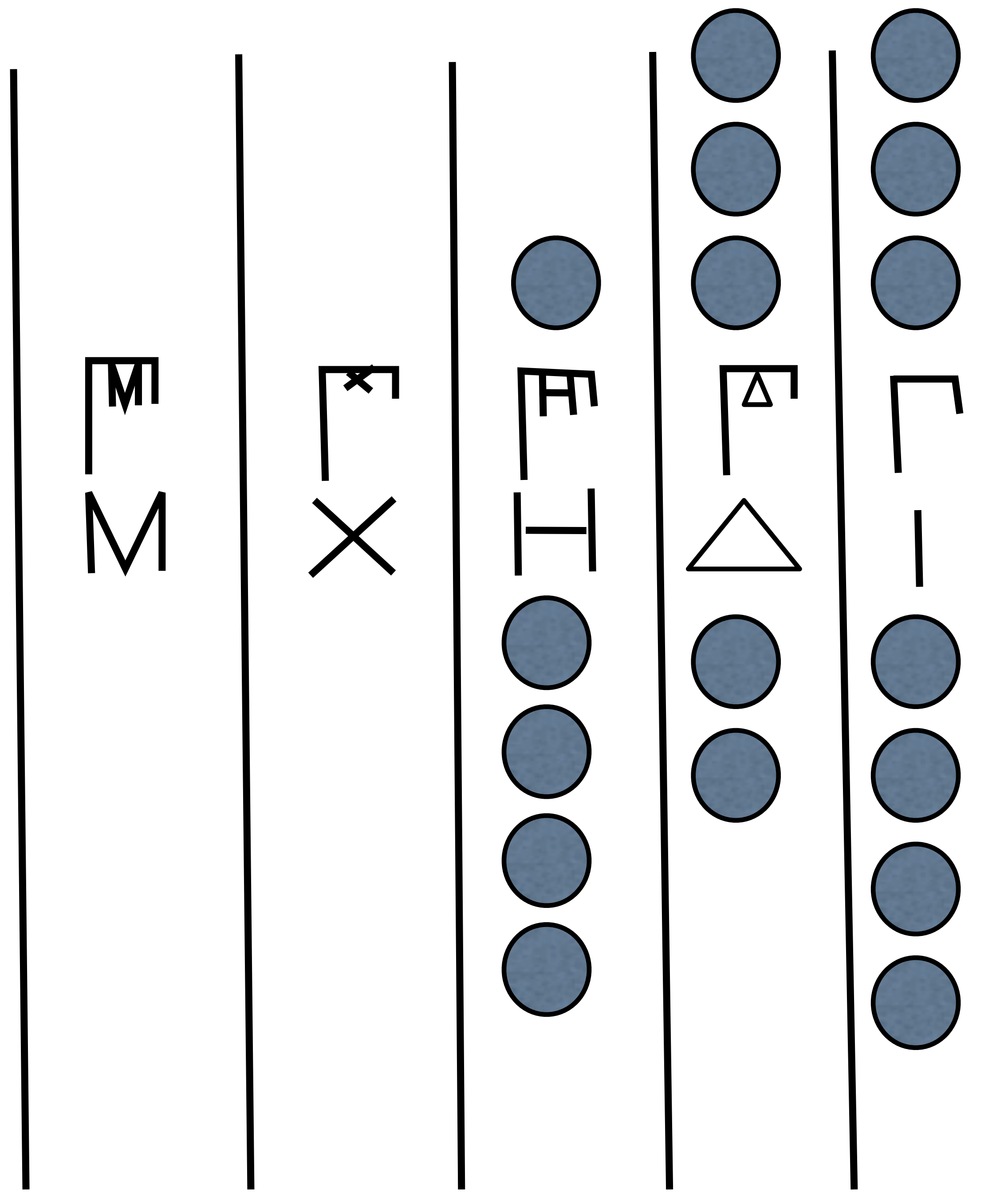
4760 - 3671

1

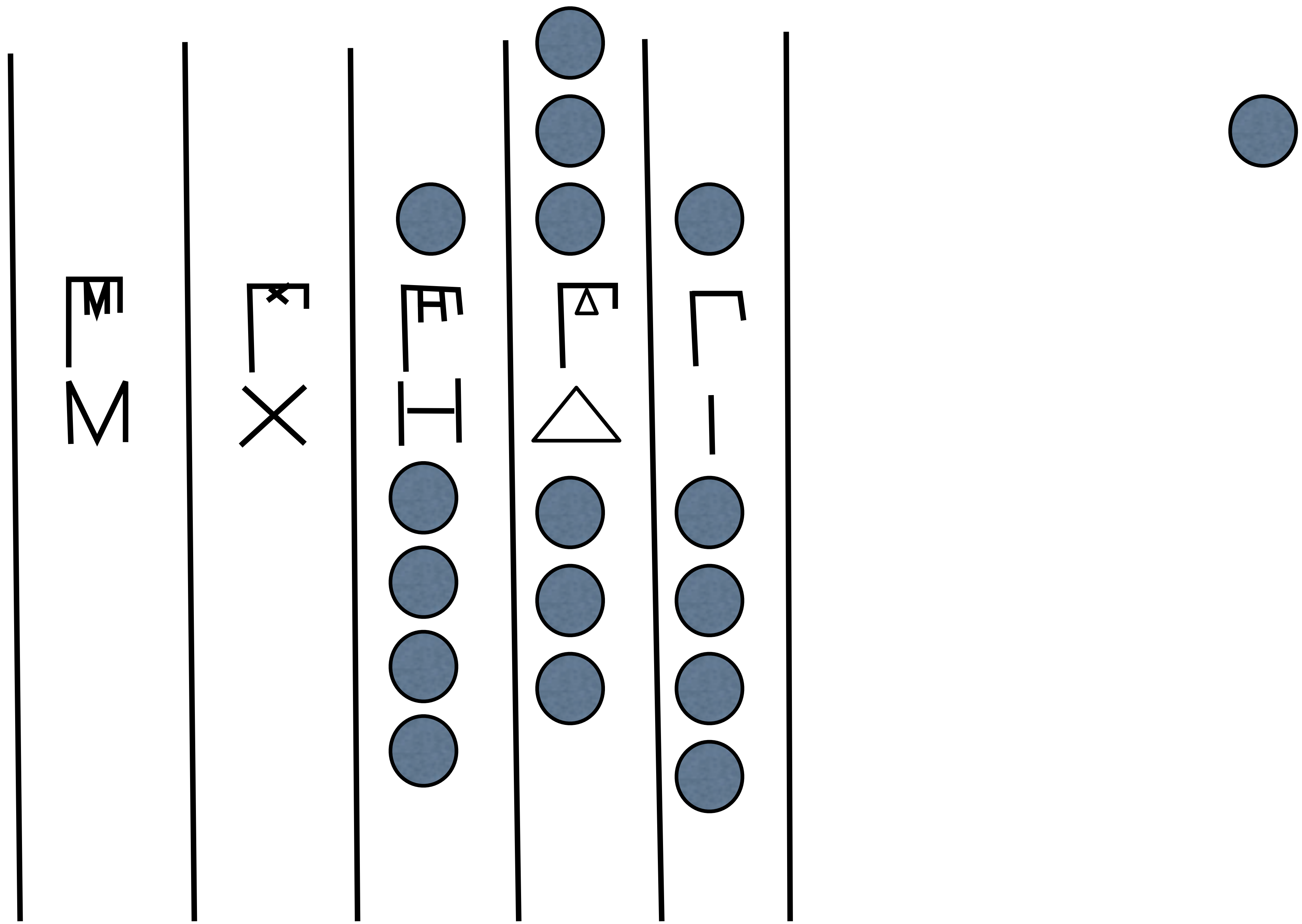


4760 - 3671

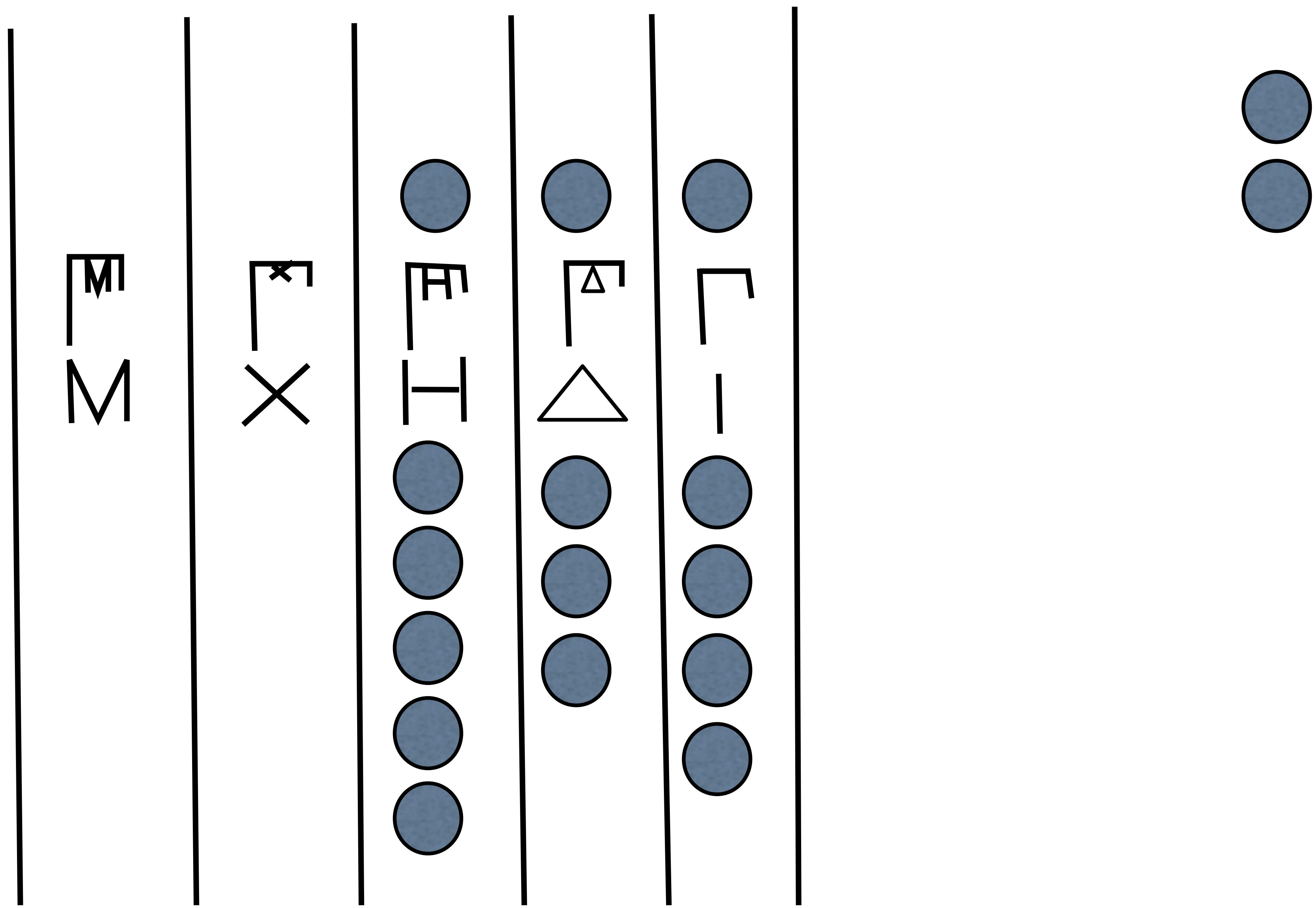
Agora temos de aplicar as regras de redução



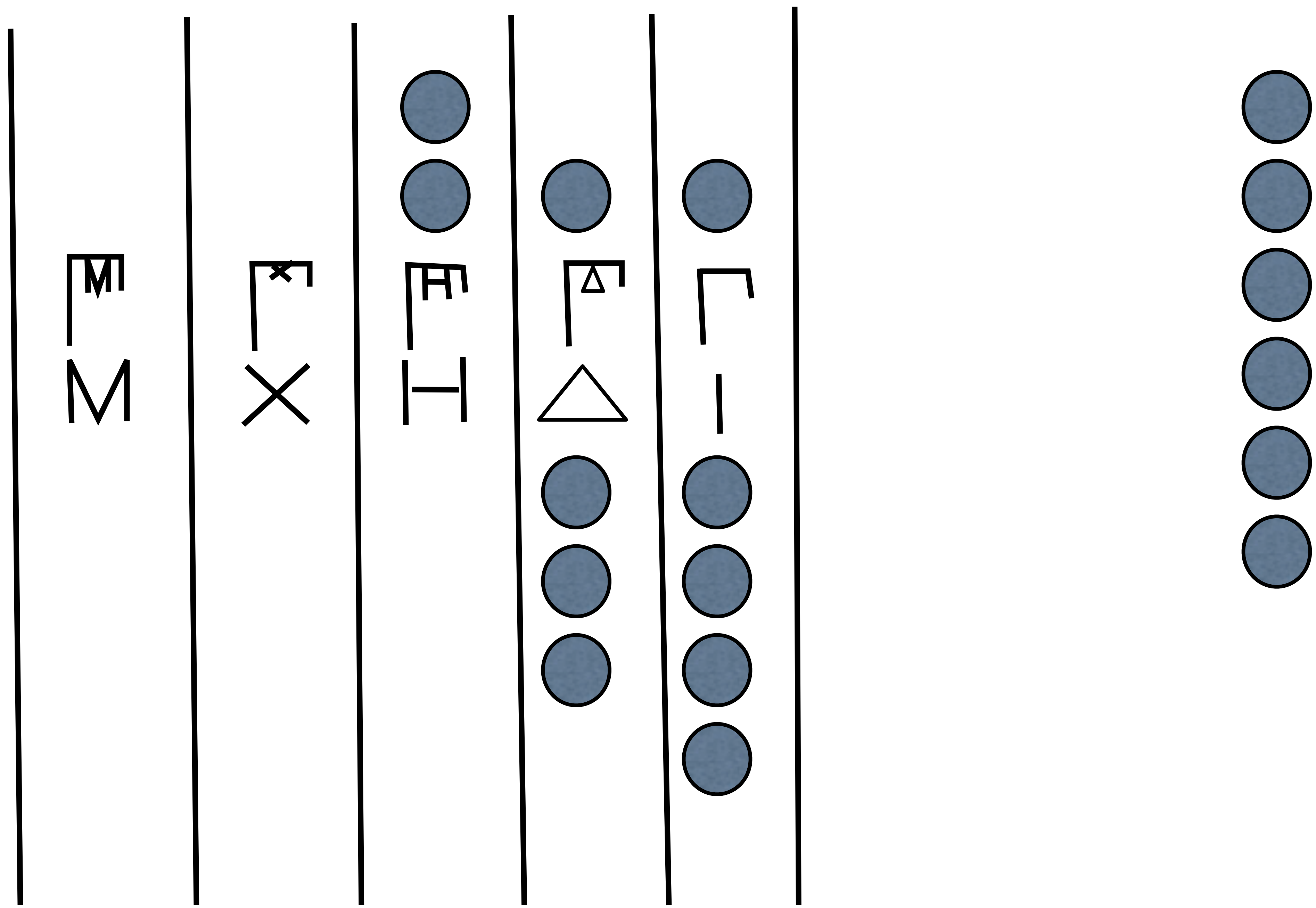
4760 - 3671



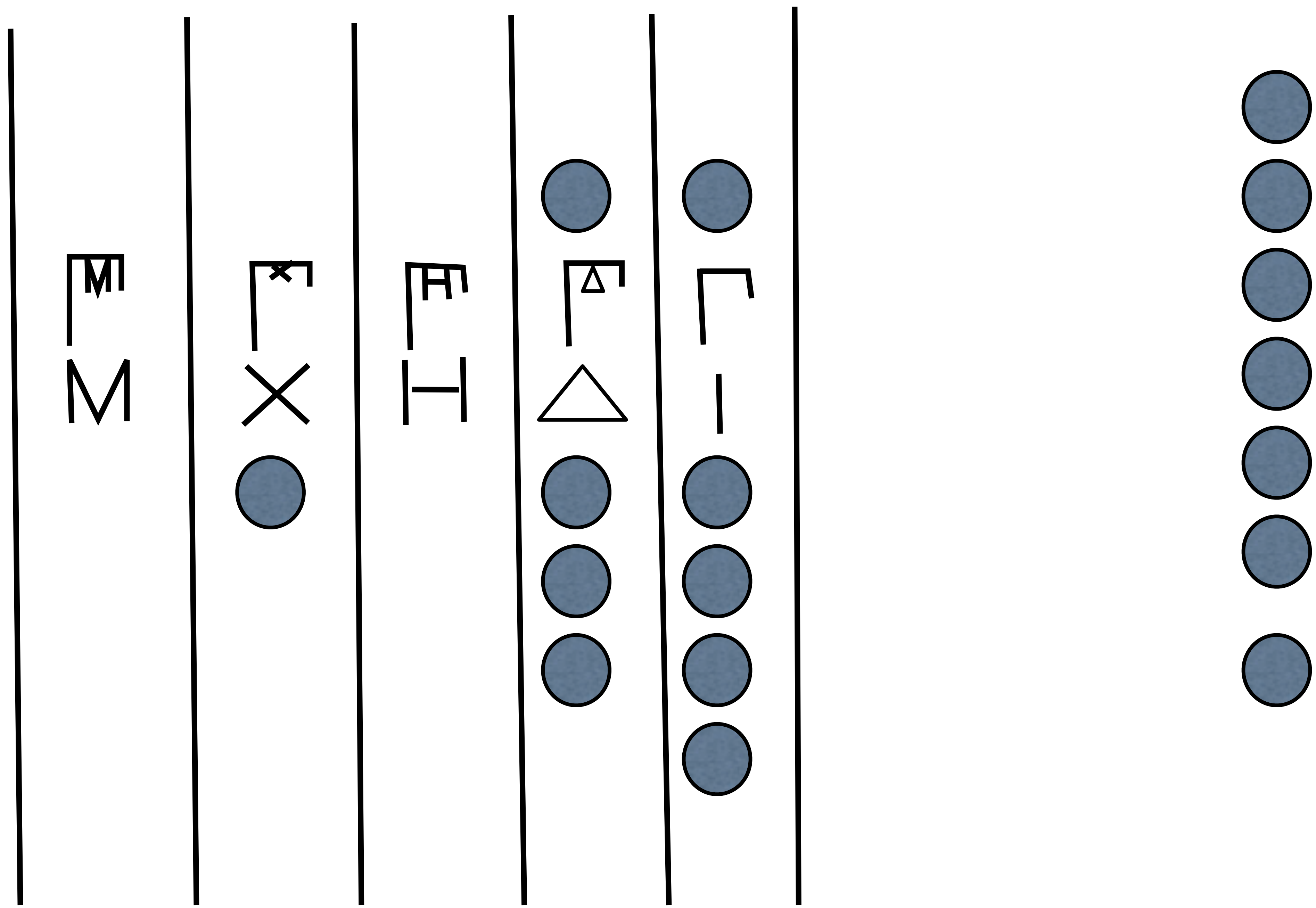
4760 - 3671



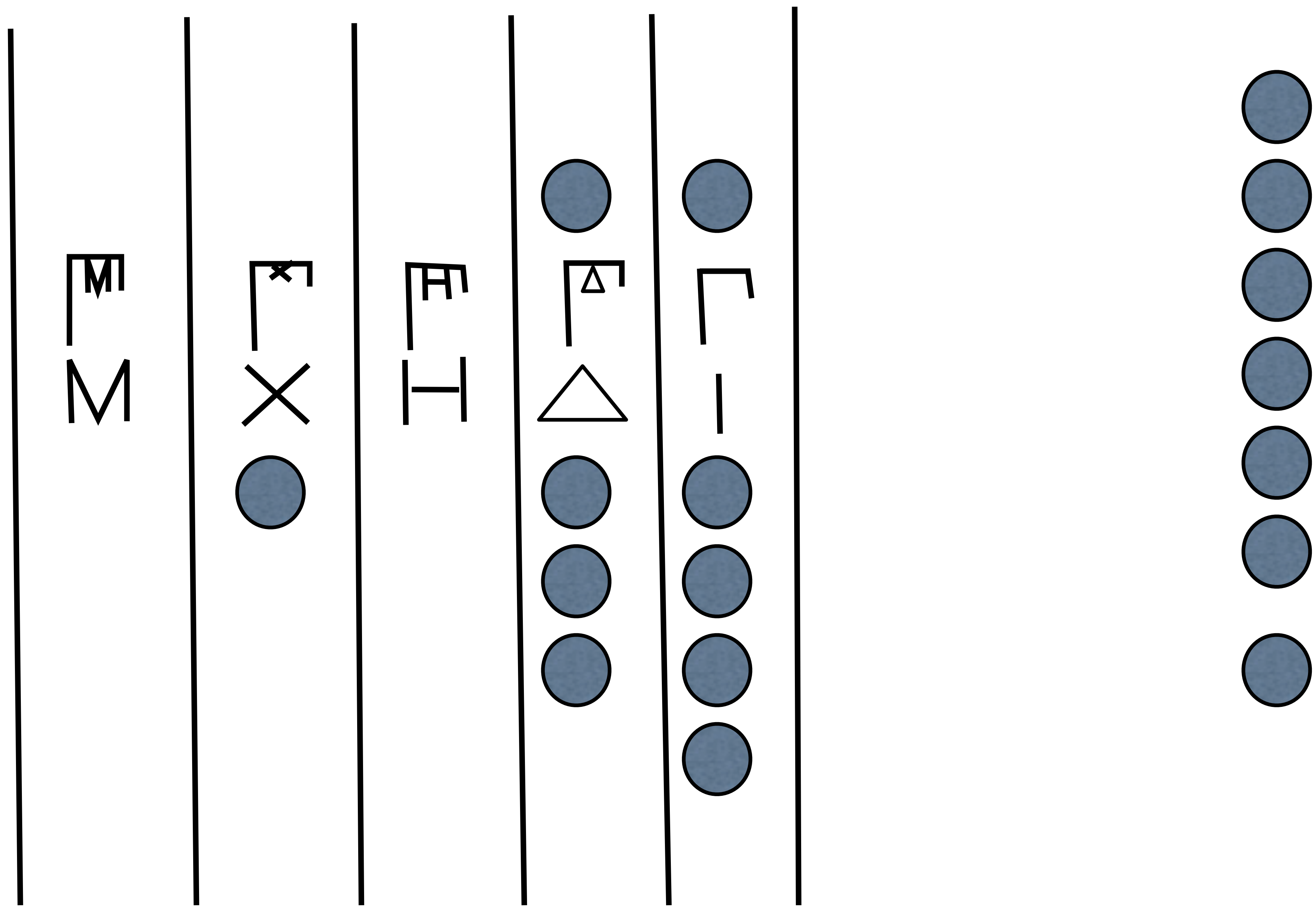
4760 - 3671



4760 - 3671



4760 - 3671 = 1089



A multiplicação pode ser implementada como adição iterada.

Os factores deviam ser registados algures e seria natural usar tabuadas. O ábaco permitiria então somar os produtos parciais.
Para efectuar 123x37 teríamos de somar 100x37, 20x37 e 3x37.

Estes ábacos não são úteis para as multiplicações (deixemos de parte as divisões!)

Roma

Roman Numeral Table							
1	I	**14**	XIV	**27**	XXVII	**150**	CL
2	II	**15**	XV	**28**	XXVIII	**200**	CC
3	III	**16**	XVI	**29**	XXIX	**300**	CCC
4	IV	**17**	XVII	**30**	XXX	**400**	CD
5	V	**18**	XVIII	**31**	XXXI	**500**	D
6	VI	**19**	XIX	**40**	XL	**600**	DC
7	VII	**20**	XX	**50**	L	**700**	DCC
8	VIII	**21**	XXI	**60**	LX	**800**	DCCC
9	IX	**22**	XXII	**70**	LXX	**900**	CM
10	X	**23**	XXIII	**80**	LXXX	**1000**	M
11	XI	**24**	XXIV	**90**	XC	**1600**	MDC
12	XII	**25**	XXV	**100**	C	**1700**	MDCC
13	XIII	**26**	XXVI	**101**	CI	**1900**	MCM

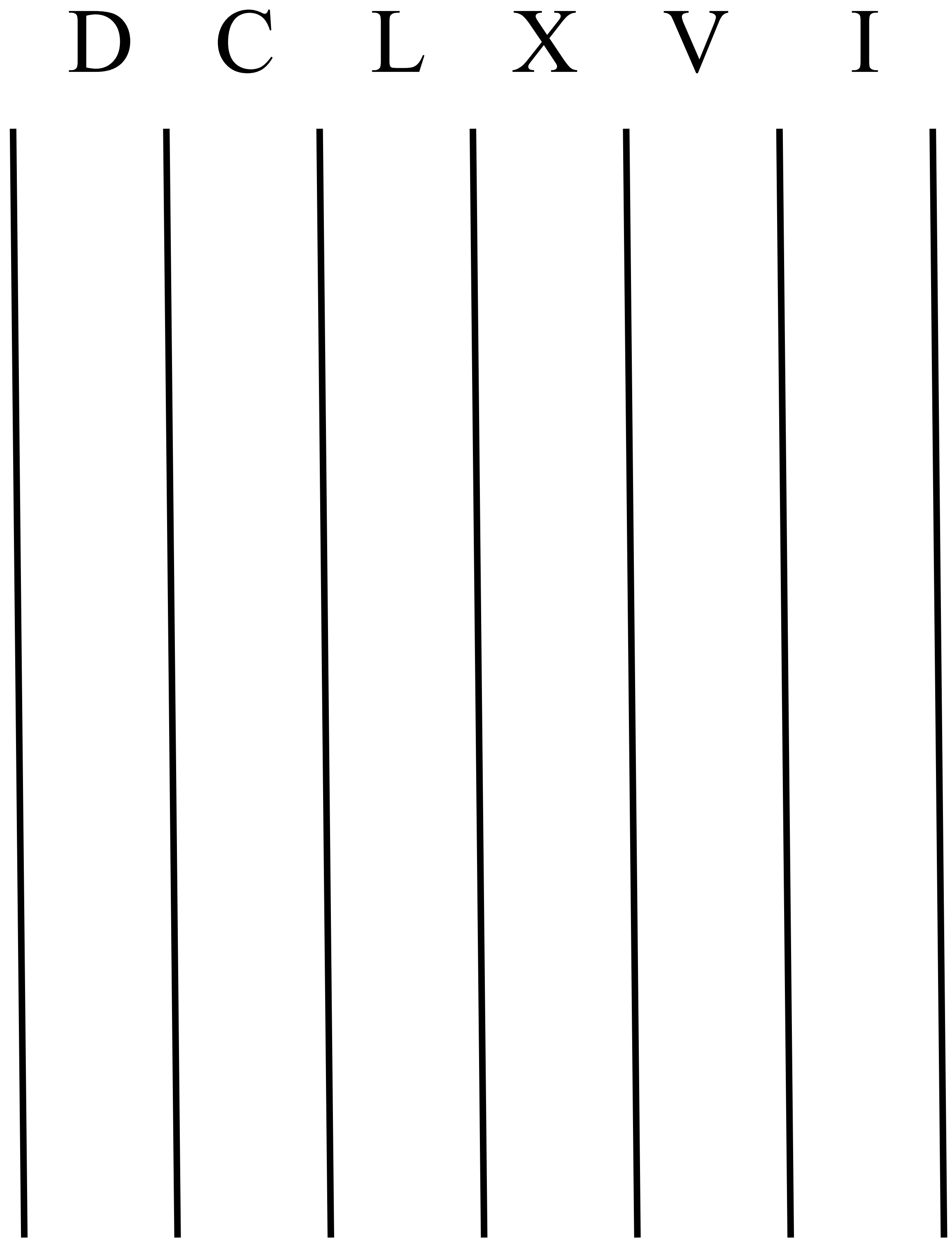
MathATube.com

Temos o mesmo tipo de ábacos

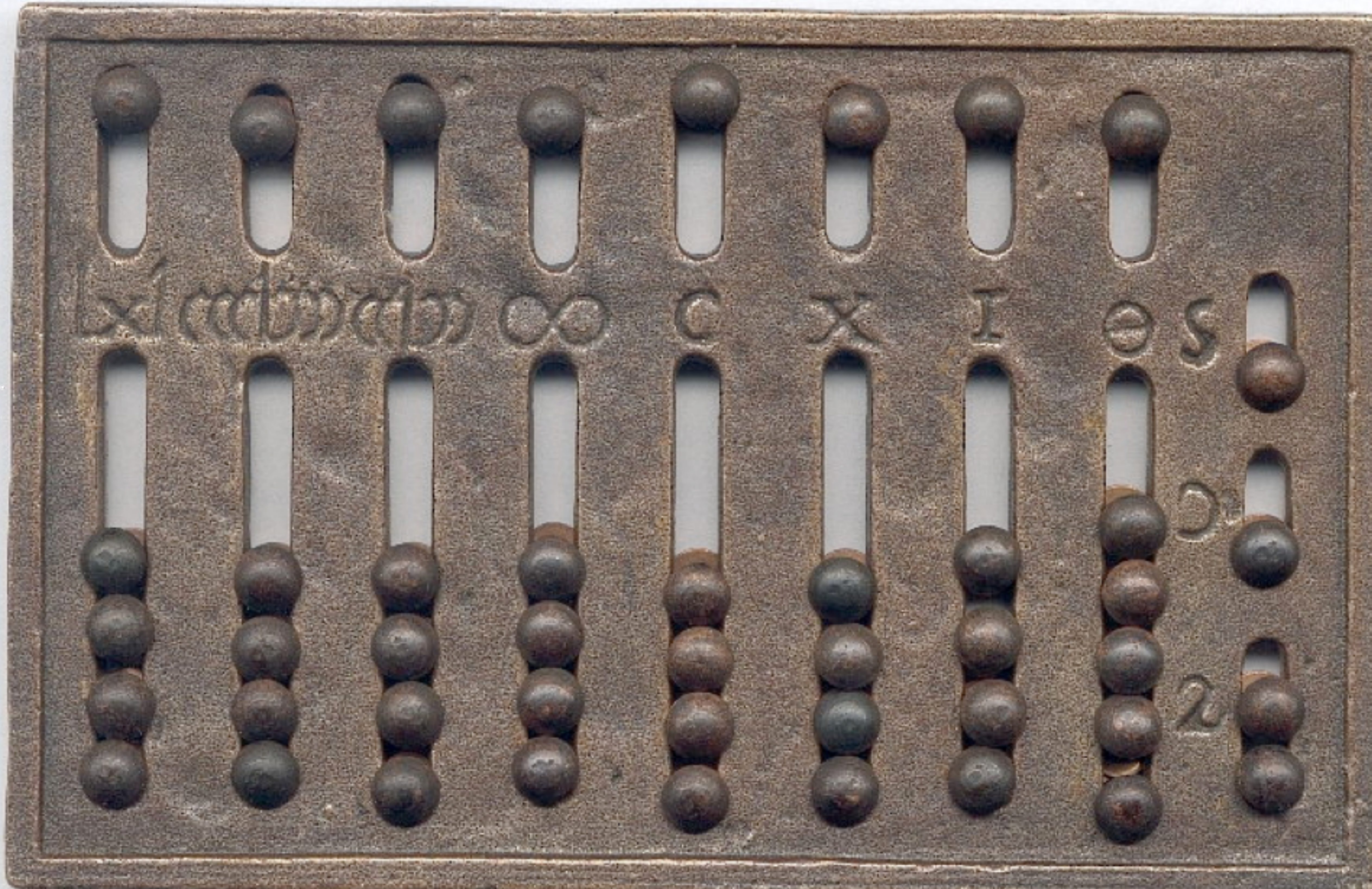
Colunas alternadas

Colunas decimais

Mas também **ábacos portáteis**


D C L X V I

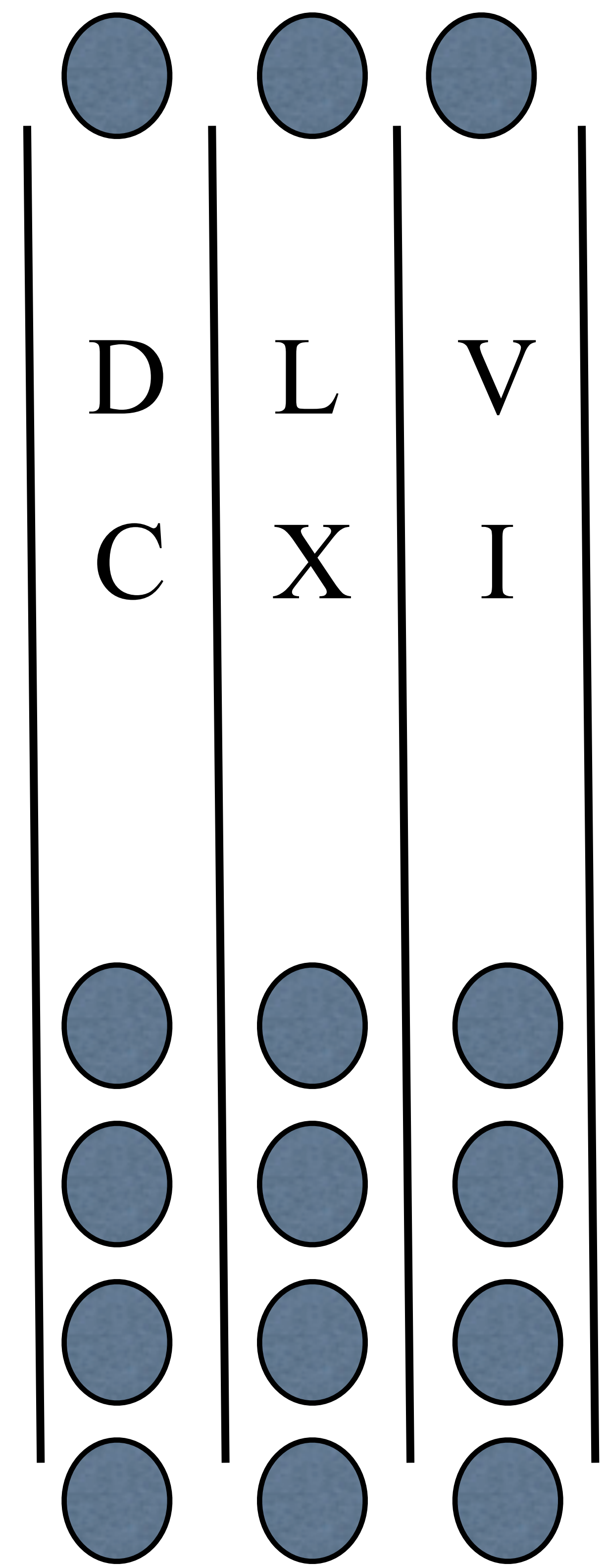
D	L	V
C	X	I



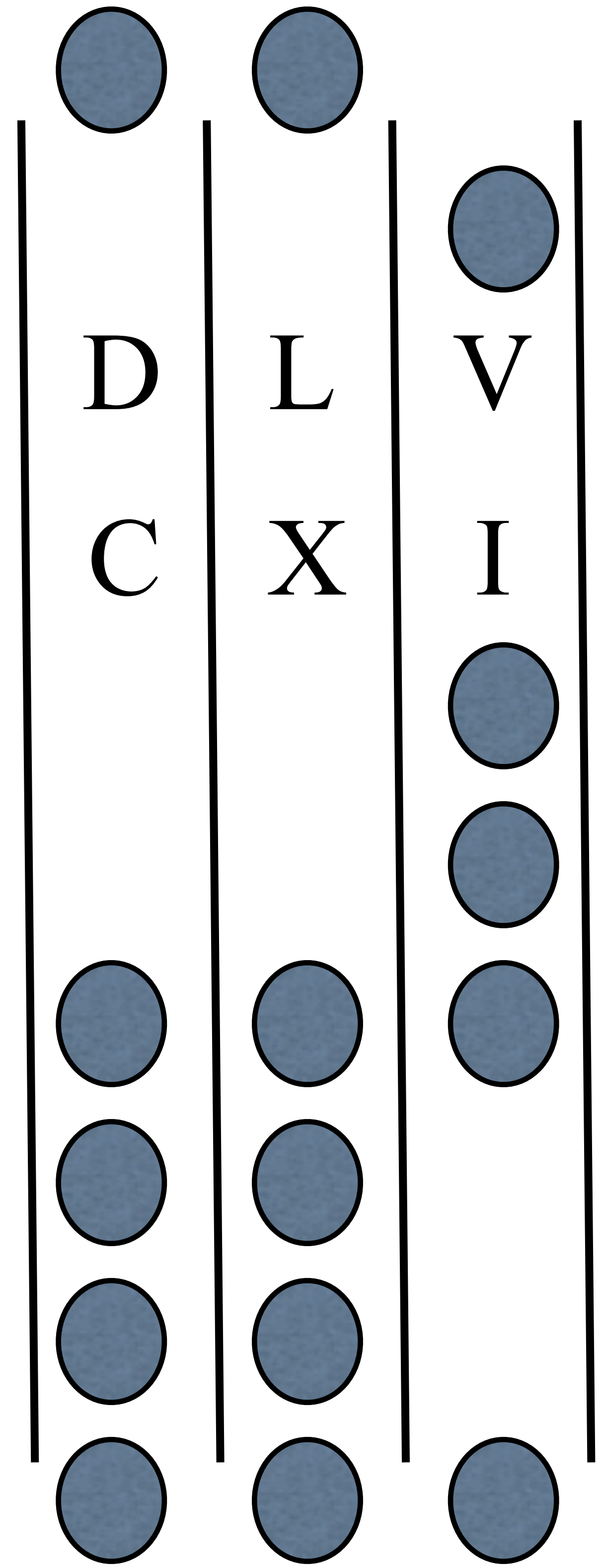
O facto de o número de peças em cada coluna ser fixo torna as operações mais difíceis

Nas somas devemos saber como “transportar”.

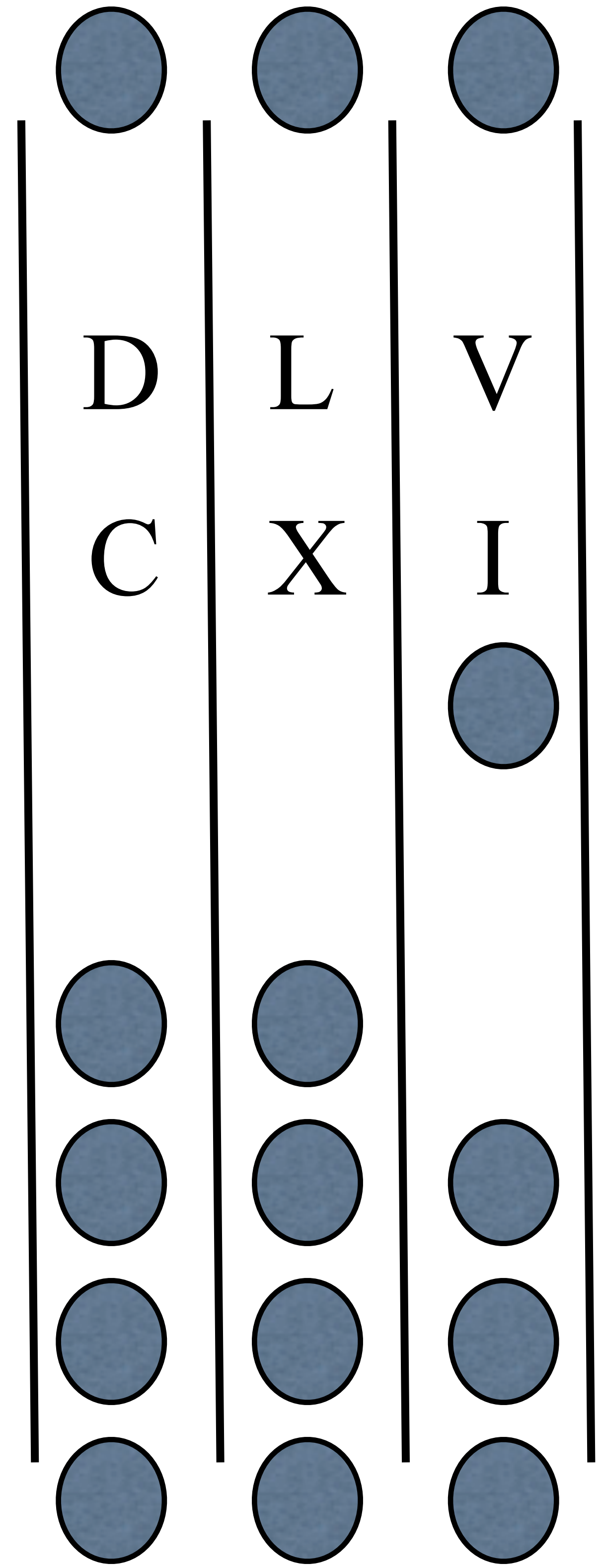
Nas subtrações, como as anti-reduções são limitadas, temos de ser engenhosos


D L V
C X I

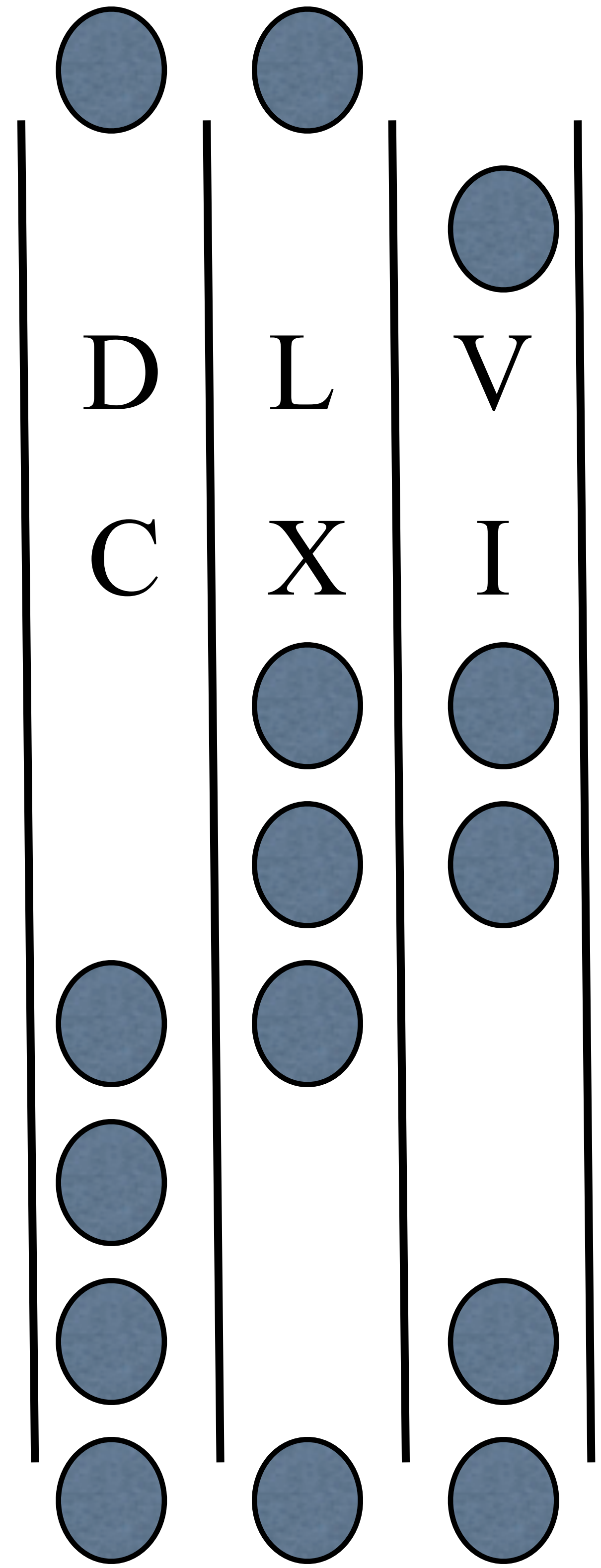
8 - 7



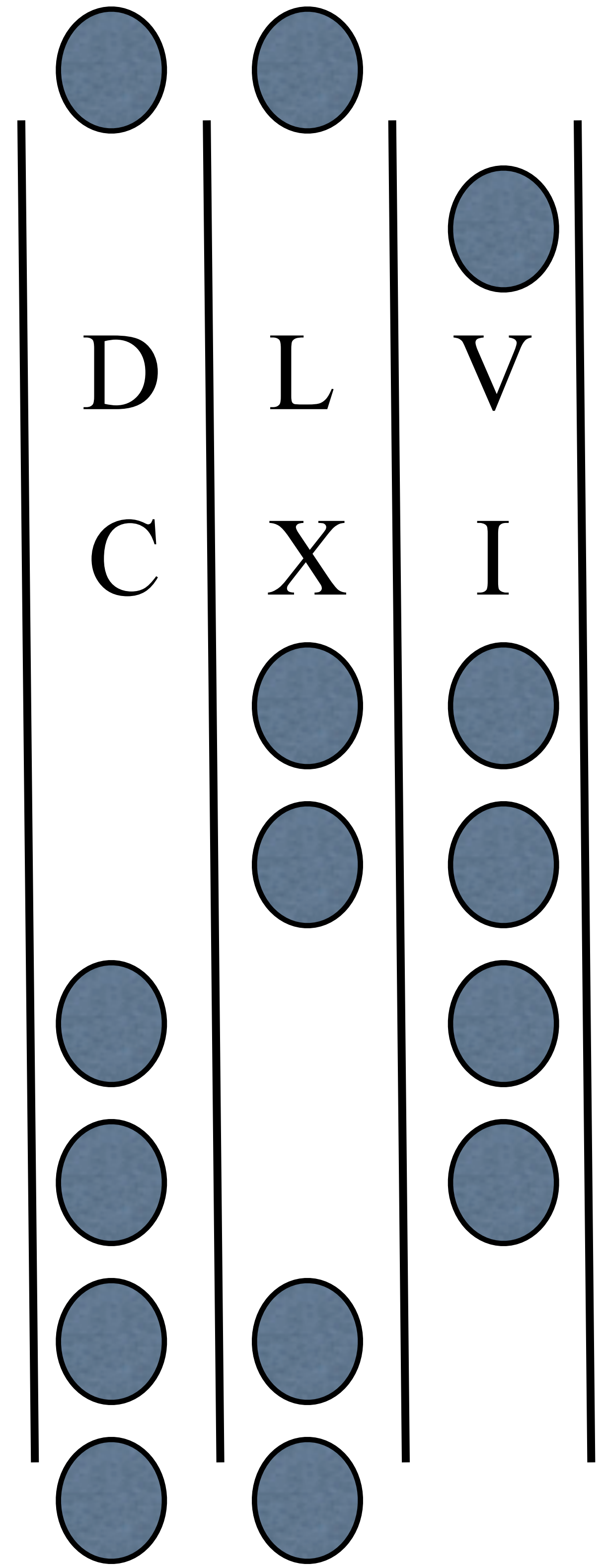
$8 - 7 = 1$



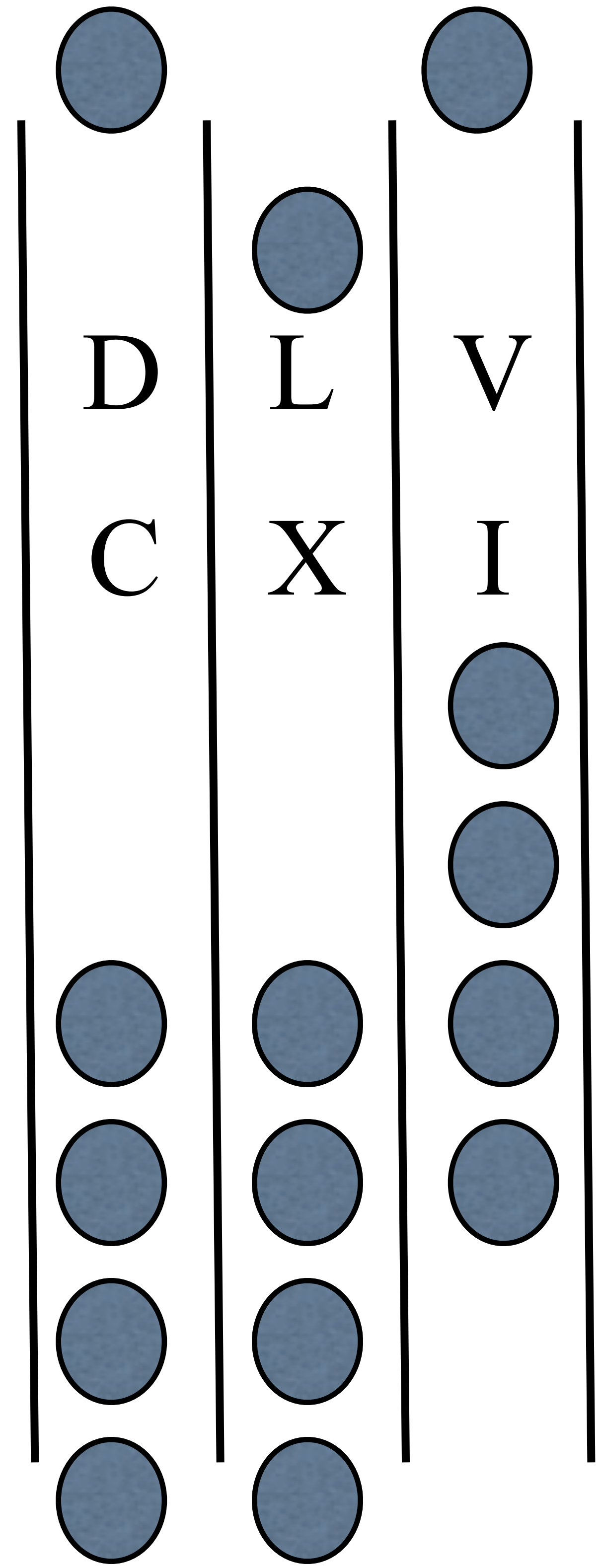
37 - 8



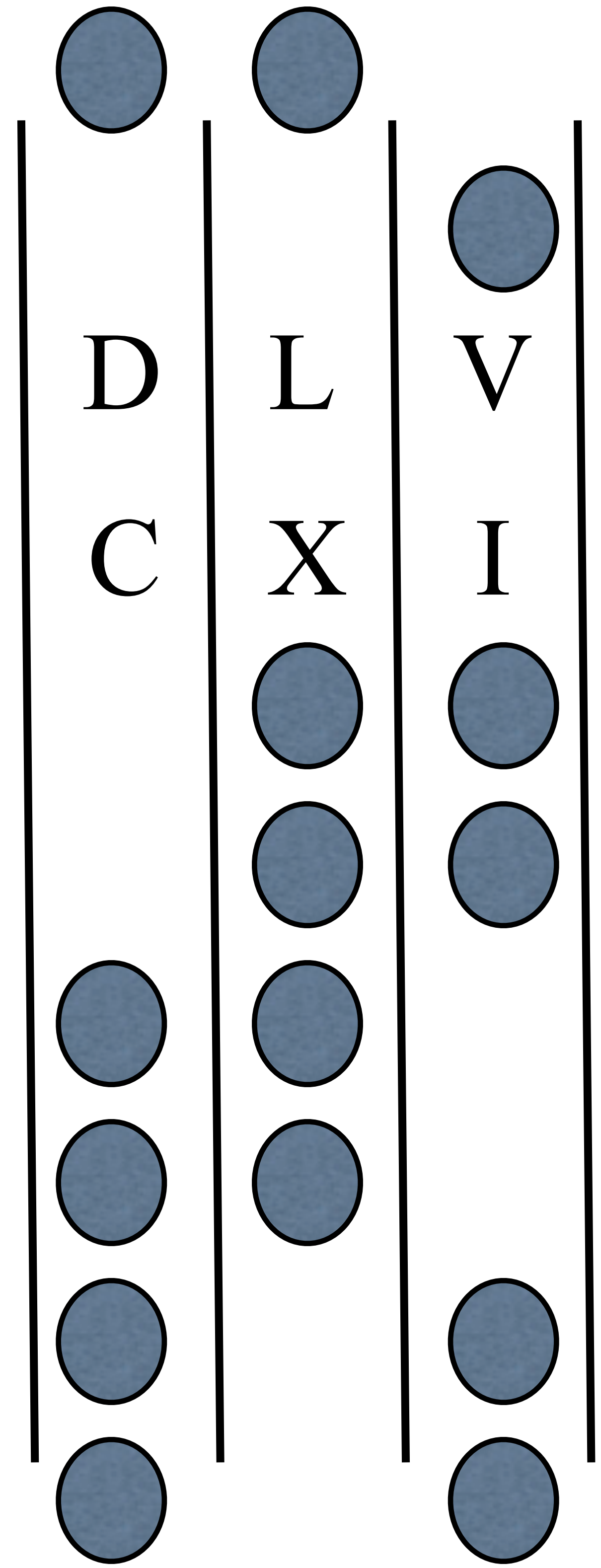
$$37 - 8 =$$
$$37 - 10 + 2$$



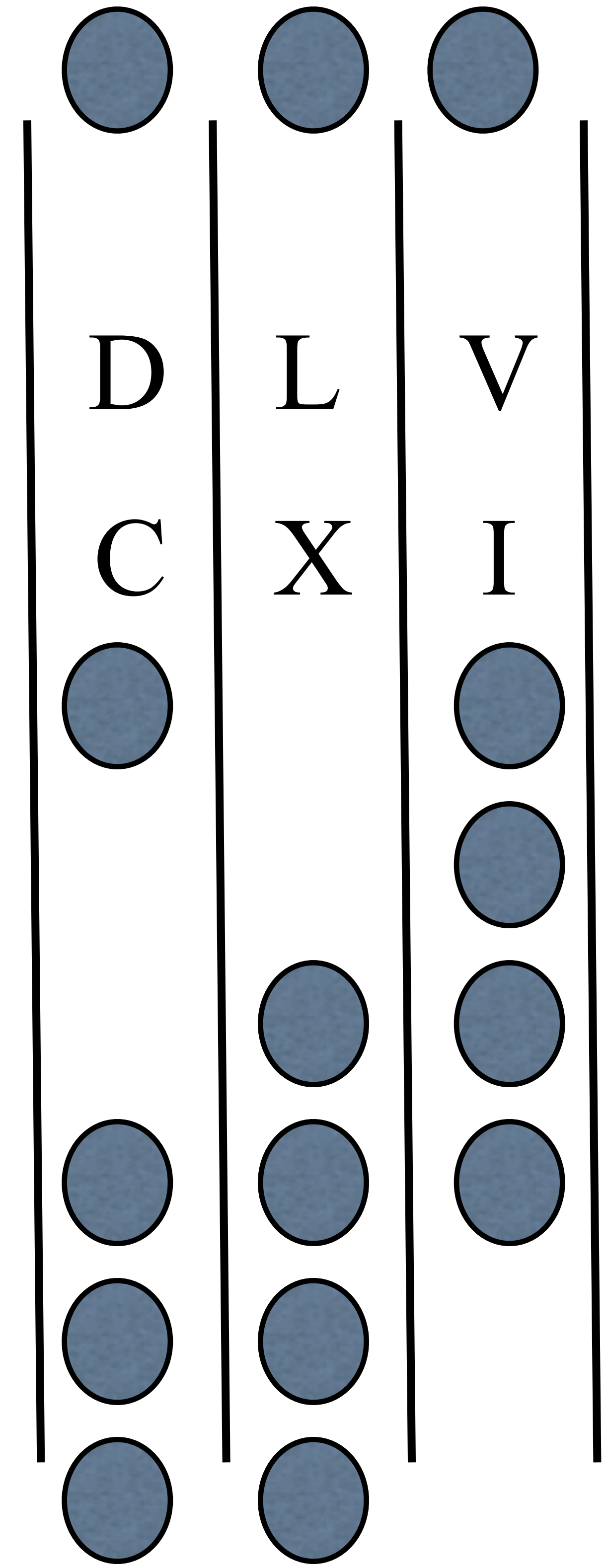
54 - 7



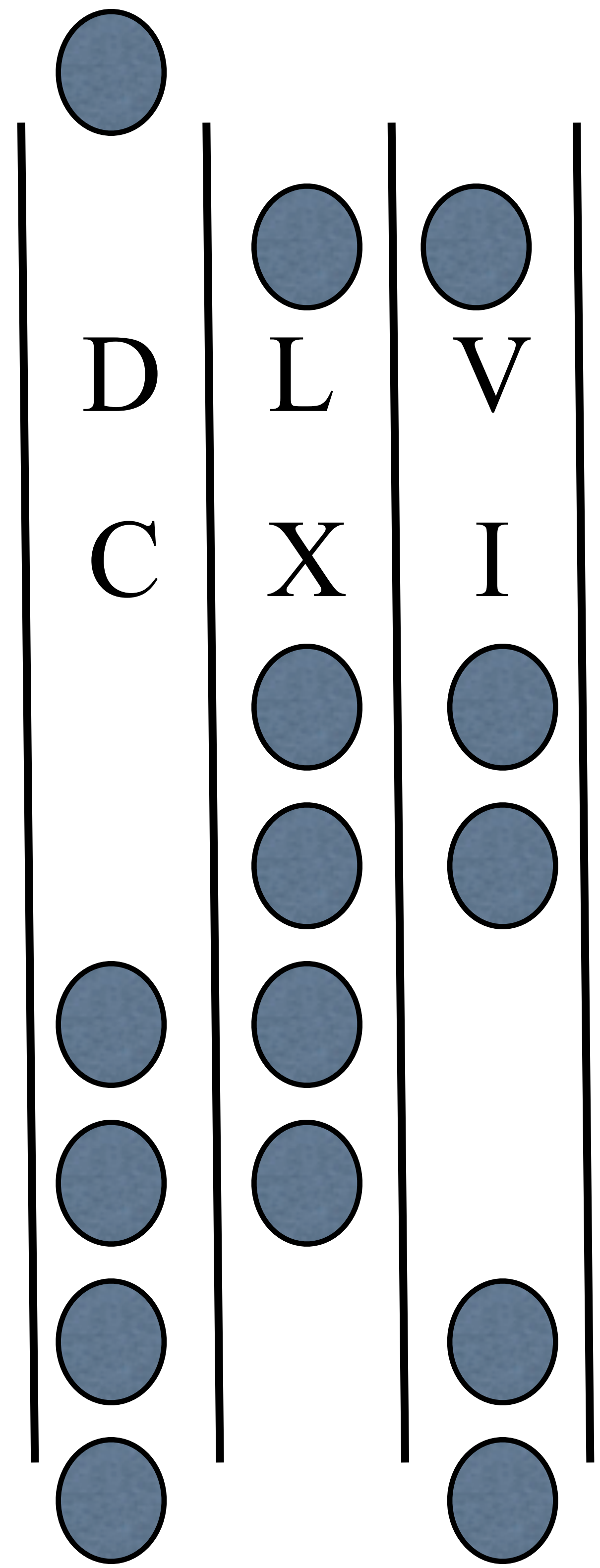
$$54 - 7 =$$
$$54 - 50 + 40 + 5 - 2$$



104 - 7



$$104 - 7 =$$
$$104 - 100 + 90 + 5 - 2$$



As multiplicações e as divisões eram ainda mais difíceis do que nos ábacos vulgares

Gerbert

13

87

4 019

400 520

539

100 065

Fig. 241. – Le principe de représentation des nombres entiers au moyen des apices *sur l'abaque perfectionné de Gerbert et ses disciples (sur cet abaque, comportant 27 colonnes réunies de trois en trois, les* apices *prenaient une valeur de position variant selon la colonne où ils étaient disposés ; de plus, l'absence d'unités d'un certain rang y était signifiée en laissant vide la colonne correspondante).*

(Apices - Limoges avant 1030)

As peças estão marcadas com numerais indo-árabes

Na representação de um número cada coluna pode conter, no máximo, uma peça

Os numerais destinam-se a ser lidos.

A fonte principal é Bernelin's *Liber Abaci* (999-1003).

Richer (991-998) escreveu umas linhas sobre o ábaco.

Gerbert descreve algumas regras de operação, muito confusas, numa carta de 980.

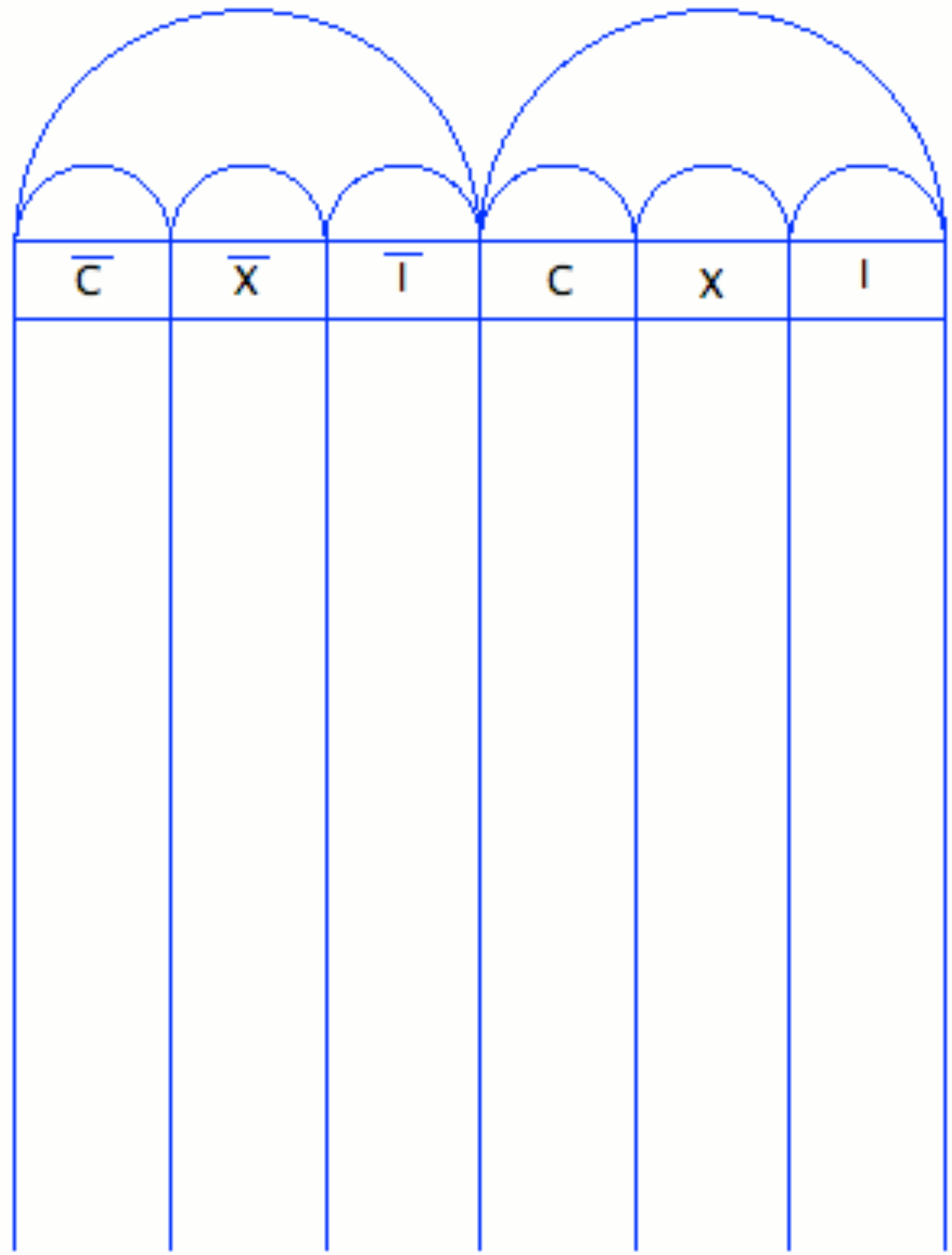
L’unité qui, ne progressant a partir d’aucun autre, est seule à posseder le principe naturel de tous les nombres [...] Comme l’unité est le principe dans la centaine, ansi le millier aussi parera être à un observateur attentif, d’une certaine façon, le principe des centaines de mille.

[...]

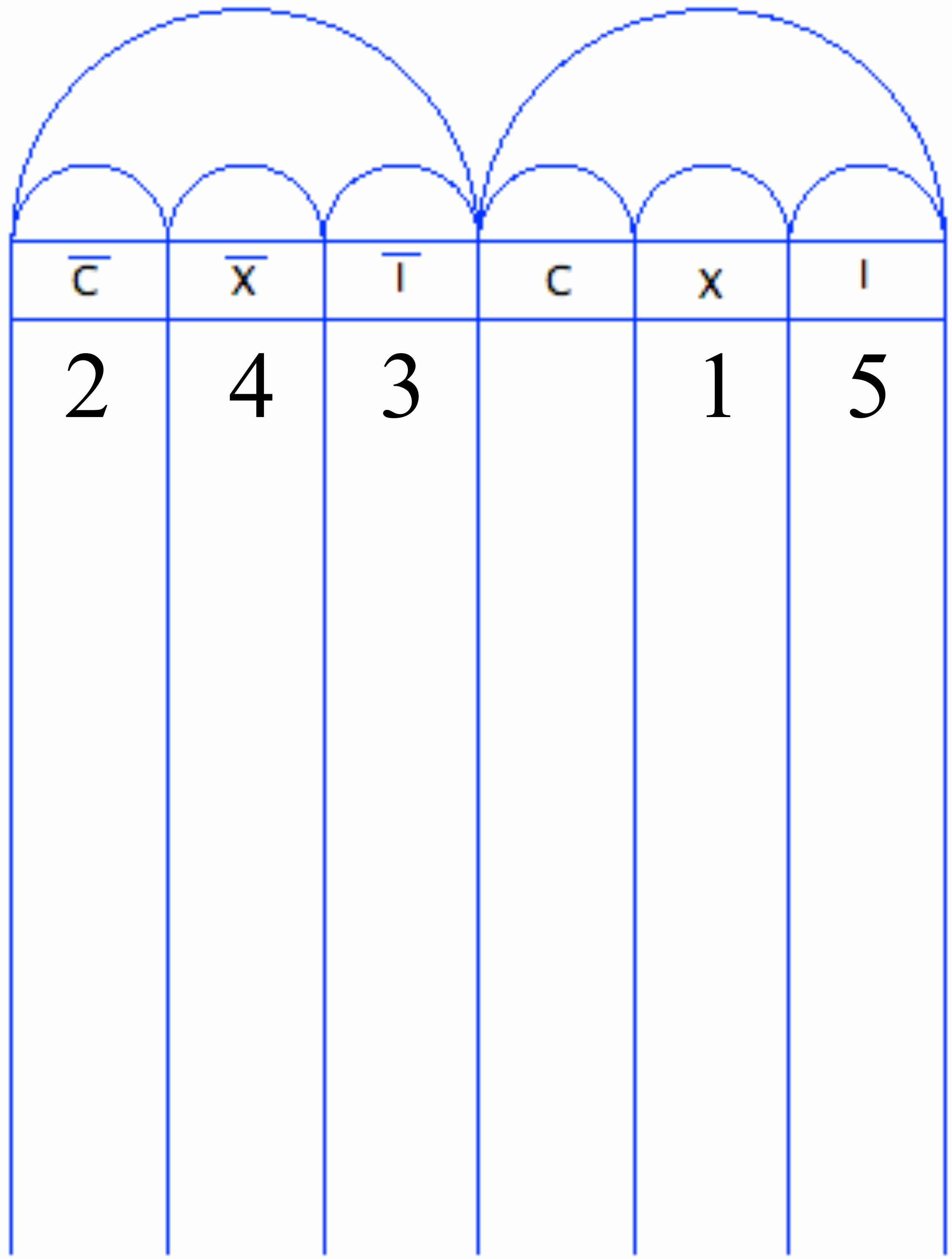
la dizaine se développe à partir de la multiplication de la première unité, ansi la muliplication de cette seconde unité fait surgir la troisième unité, c’est-à-dire la centaine. Et alors, d’une certaine façon, on revient à la première unité...

L’unité, qui est dite le premier nombre, est ansi figurée ..., soit par la lettre grecque alpha...

Tout nombre, multiplié par une unité, placera le doigt (digitum) dans la même colonne que l’unité et l’article (articulum) dans la seconde. Tout nombre multiplié par une dizaine placera le doigt dans la seconde colonne, et l’article dans la triosième....


$\overline{C}$
$\overline{X}$
$\overline{I}$
C
X
I

243 015



Vamos usar os nossos algarismos para representar os de Gerbert.

O problema recreativo de Bernelin: 12 quartos, 12 carpetes, 12 homens, 12 mulheres, 12 crianças. Quantas crianças?

$$12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$$

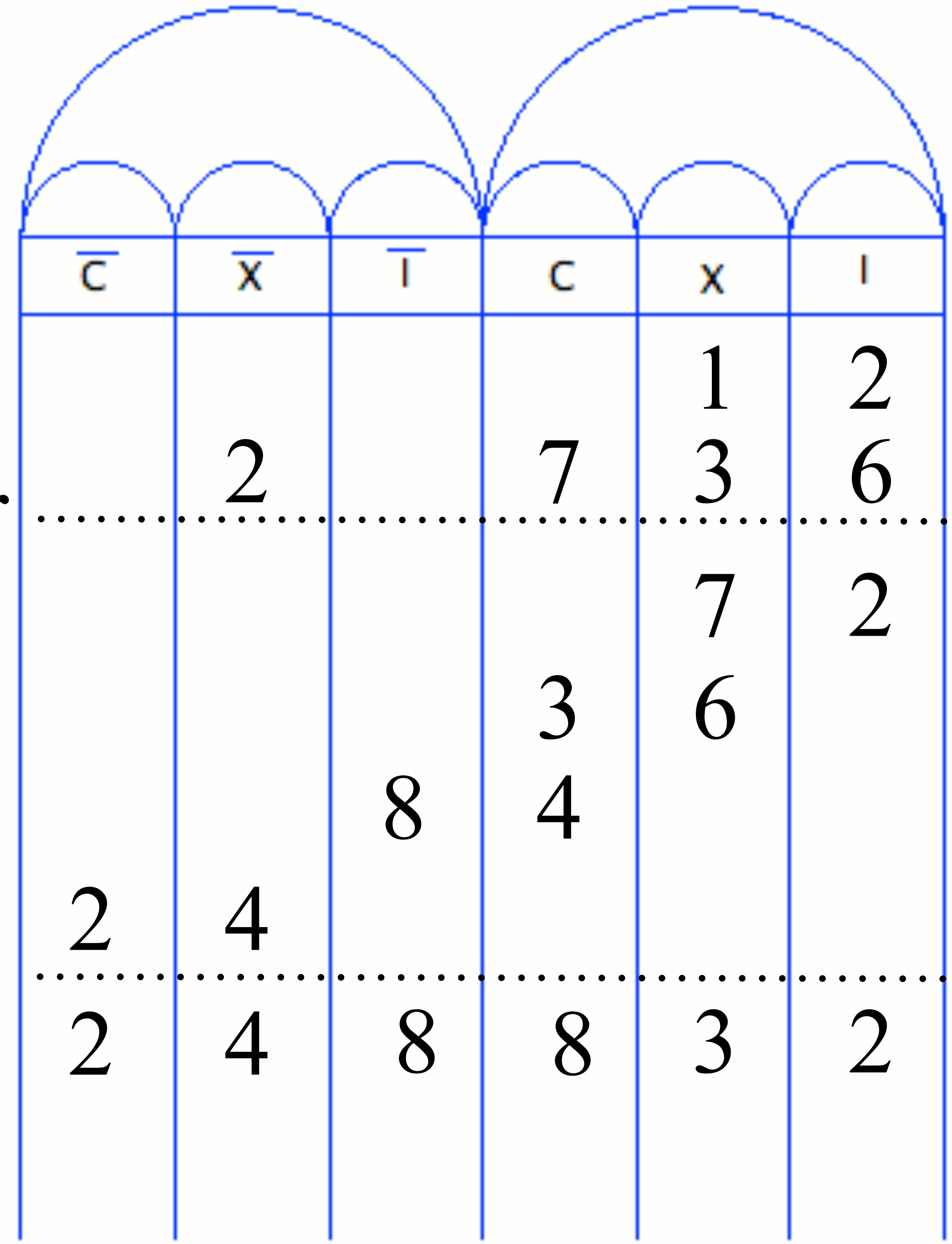
$$12 \times 20\,736$$

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
				1	2
	2		7	3	6

Parece a nossa forma de calcular...

Isto é novo e estranho para quem estava habituado a usar os ábacos de peças neutras.

Queme estivesse familiarizado com os trabalhos de Al-Kwarizmi usaria papel e lápis...



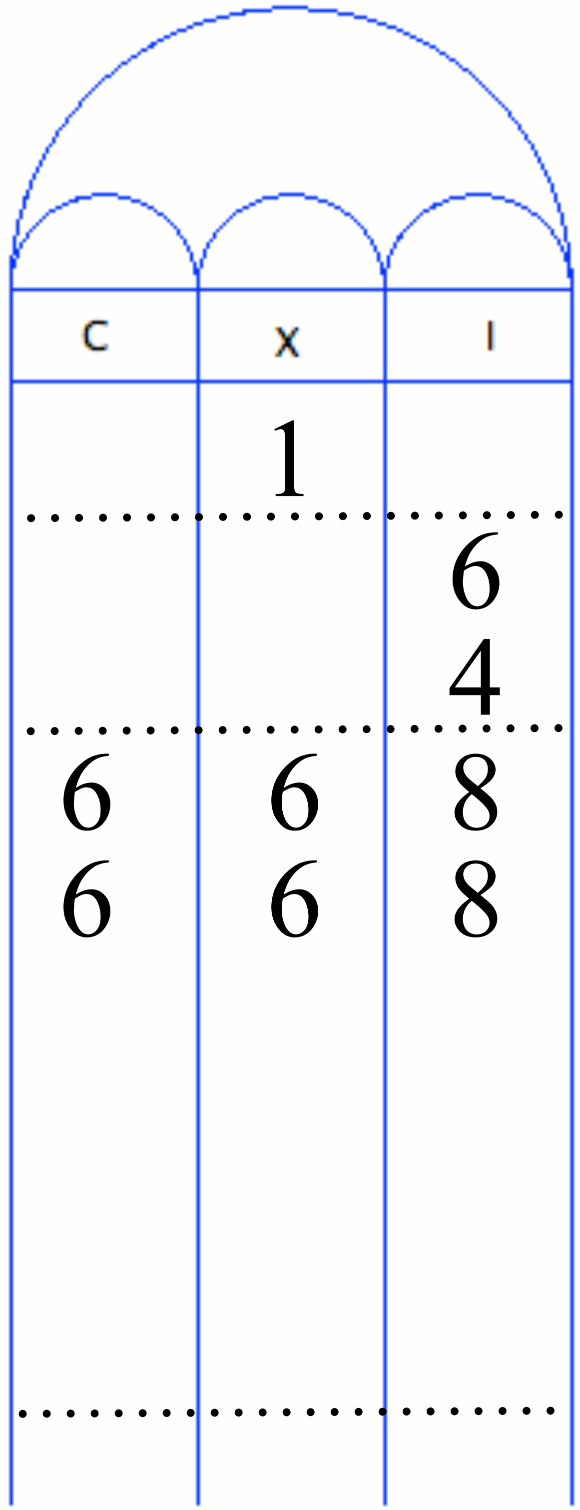
Este método deve-se a Gerbert

Divisio ferrea

Bernelin dá o exemplo 668 : 6

O truque: usar um divisor auxiliar, aqui 10, para tornar a conta mais fácil

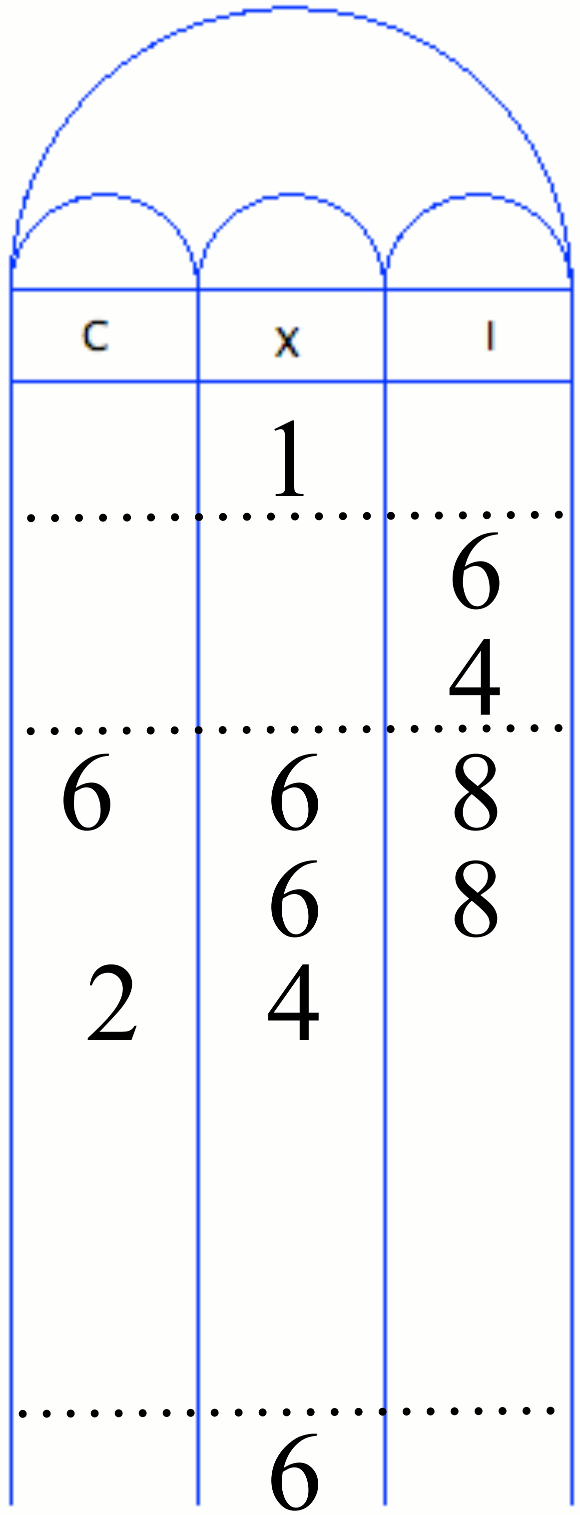
Depois corrige-se o erro cometido...



Divisio ferrea

Divida-se 600 por 10

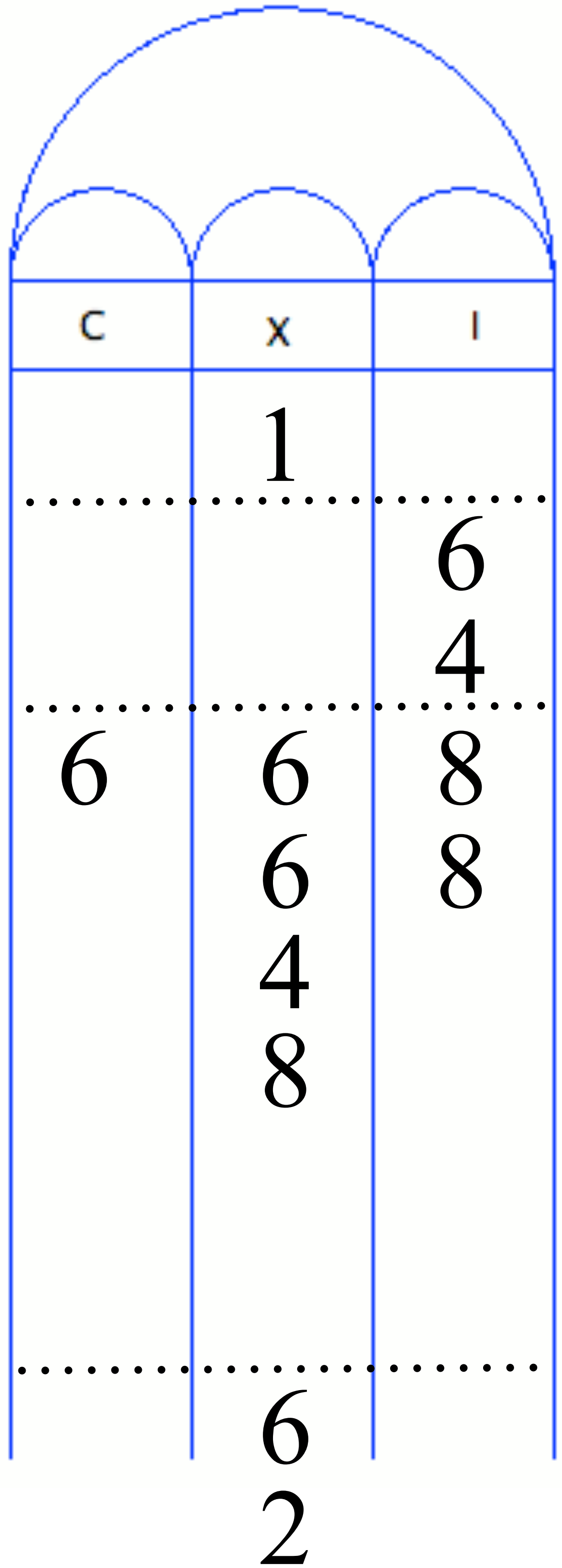
Multiplique-se 60 por 4 - a diferença - e some-se a 68



Divisio ferrea

Divida-se 200 por 10

Multiplique-se 20 por 4 e some-se a 68+40

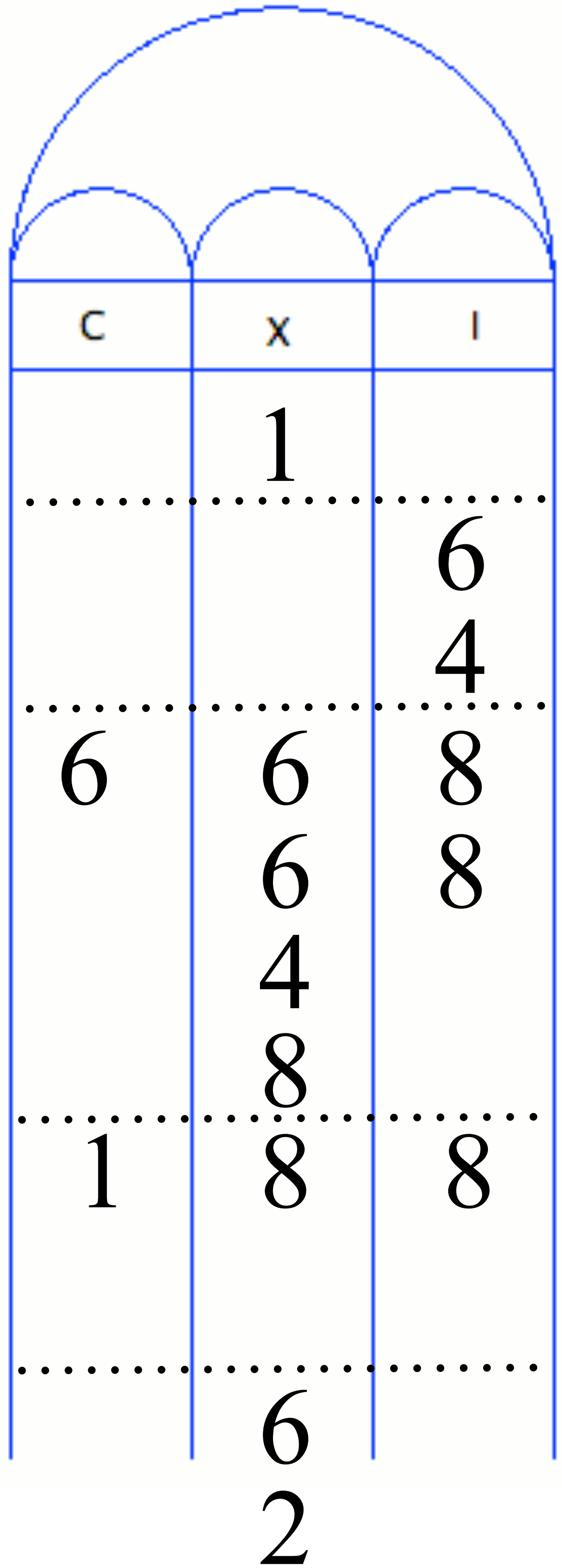


Divisio ferrea

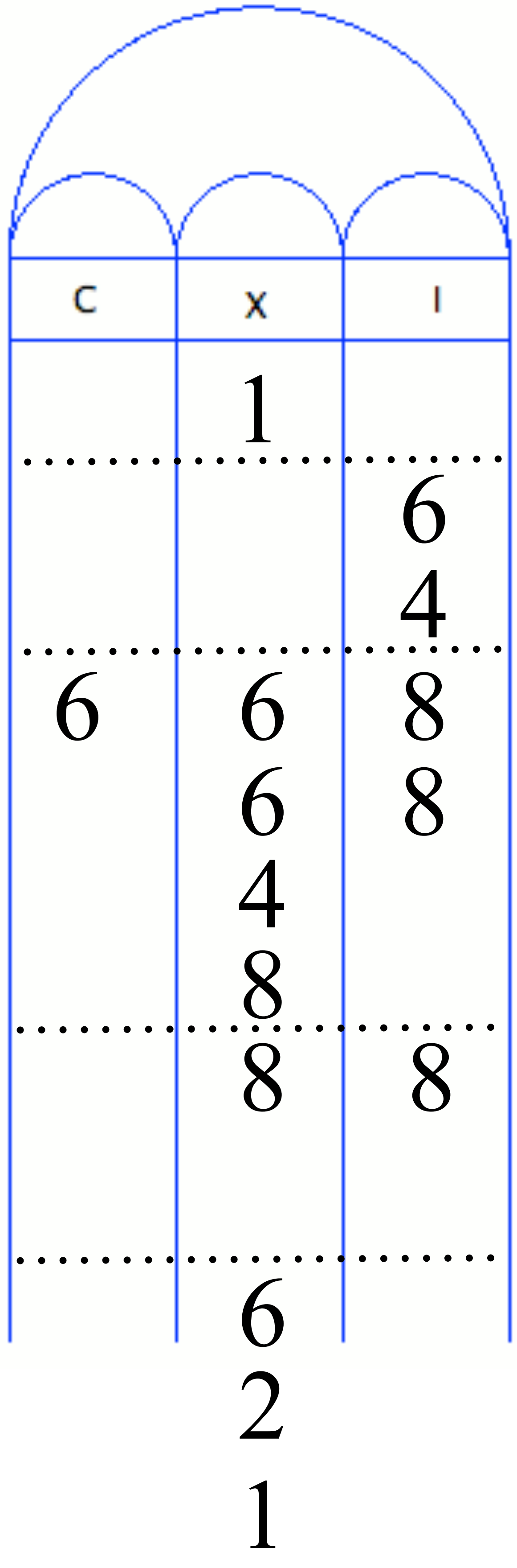
Verifiquemos a situação actual...

O nosso dividendo é agora 188, temos um quociente de 60+20. Continuemos...

Dividimos100 por 10...

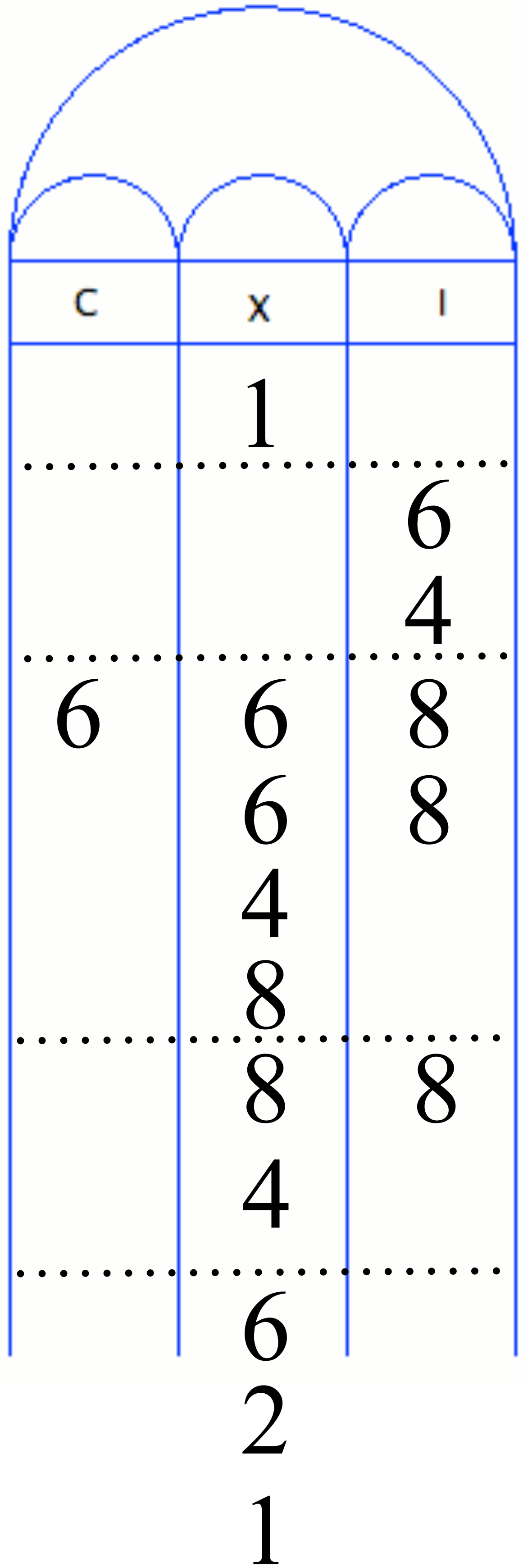


Divisio ferrea



Dividimos100 por 10...

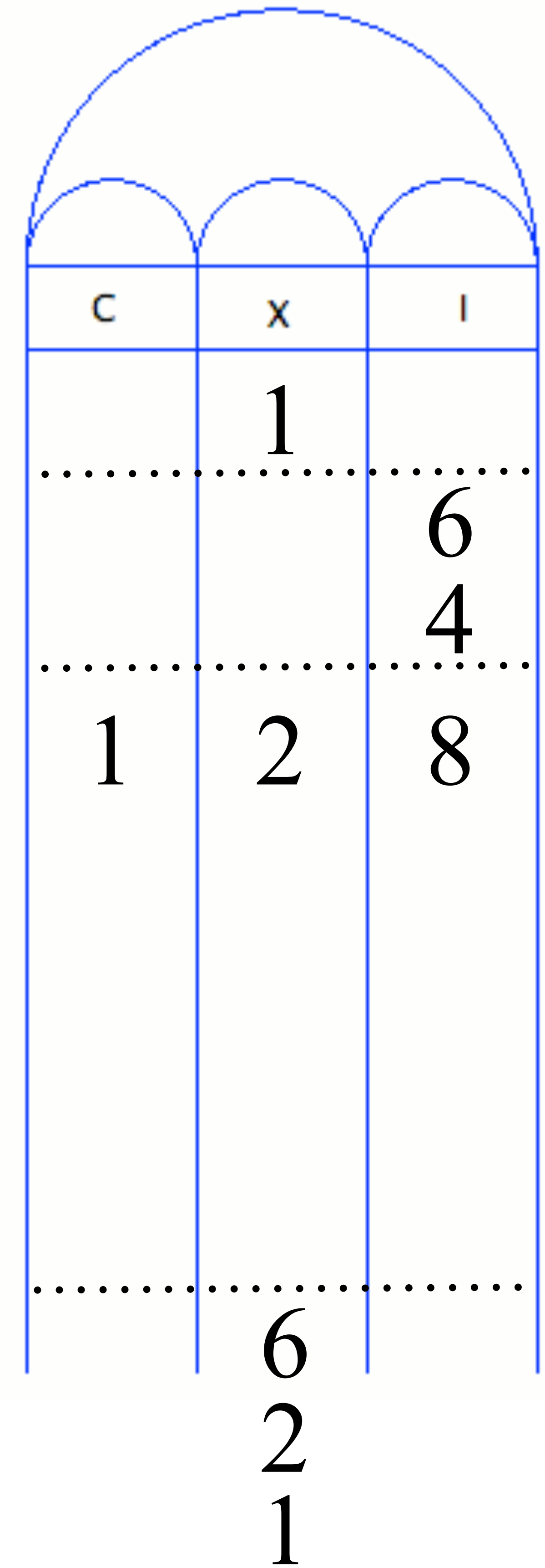
Divisio ferrea



e corrigimos

Divisio ferrea

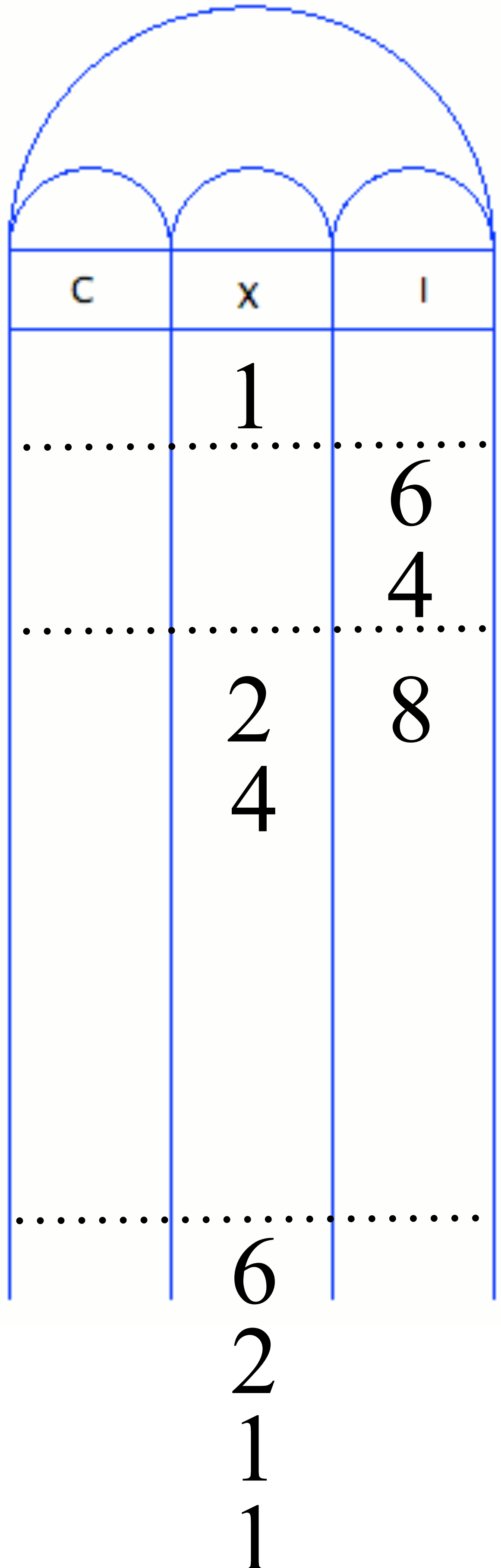
Verificando...



Divisio ferrea

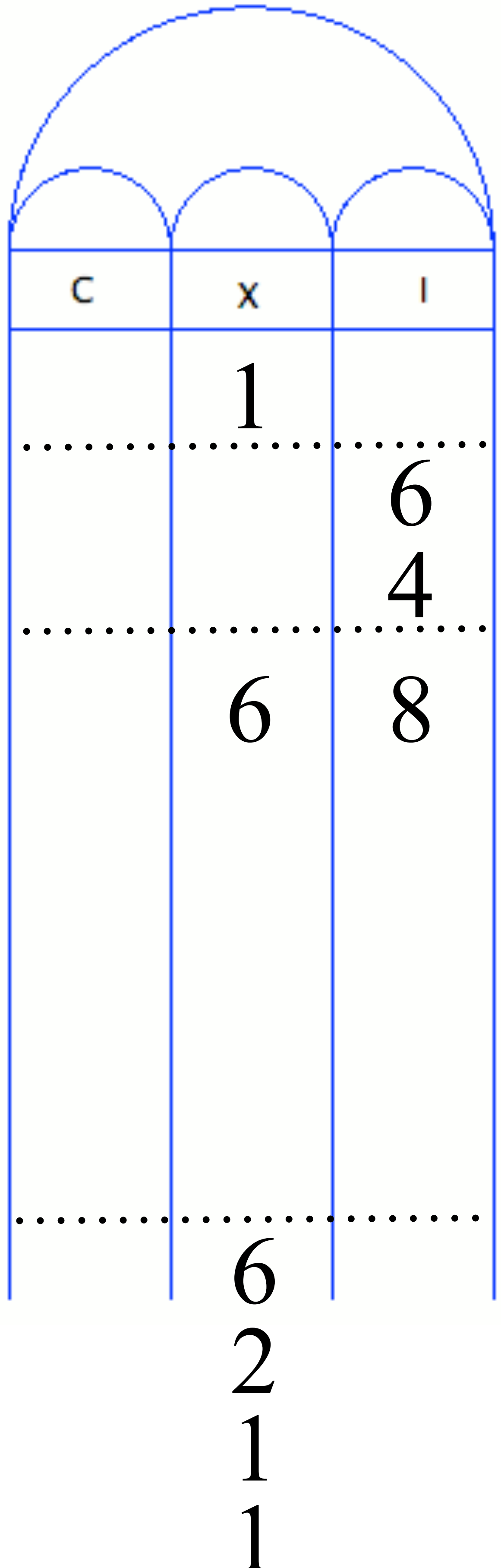
Dividimos100 por 10

e somamos 10x4 ao quociente, para corrigir



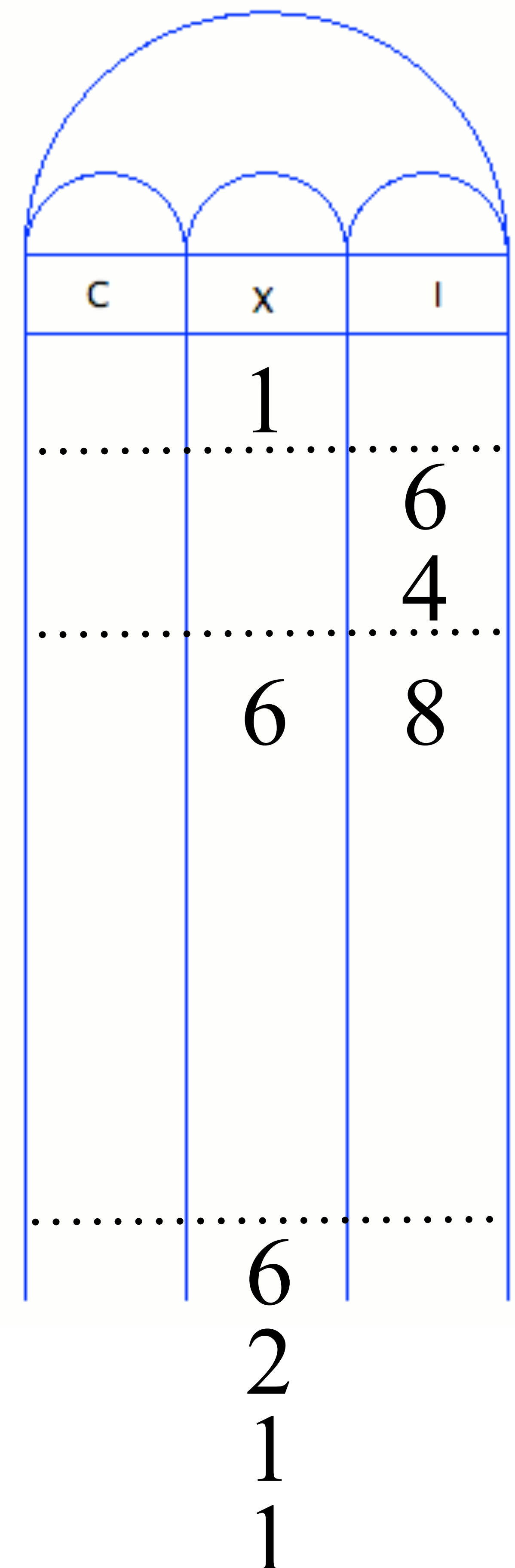
Divisio ferrea

Verificando...



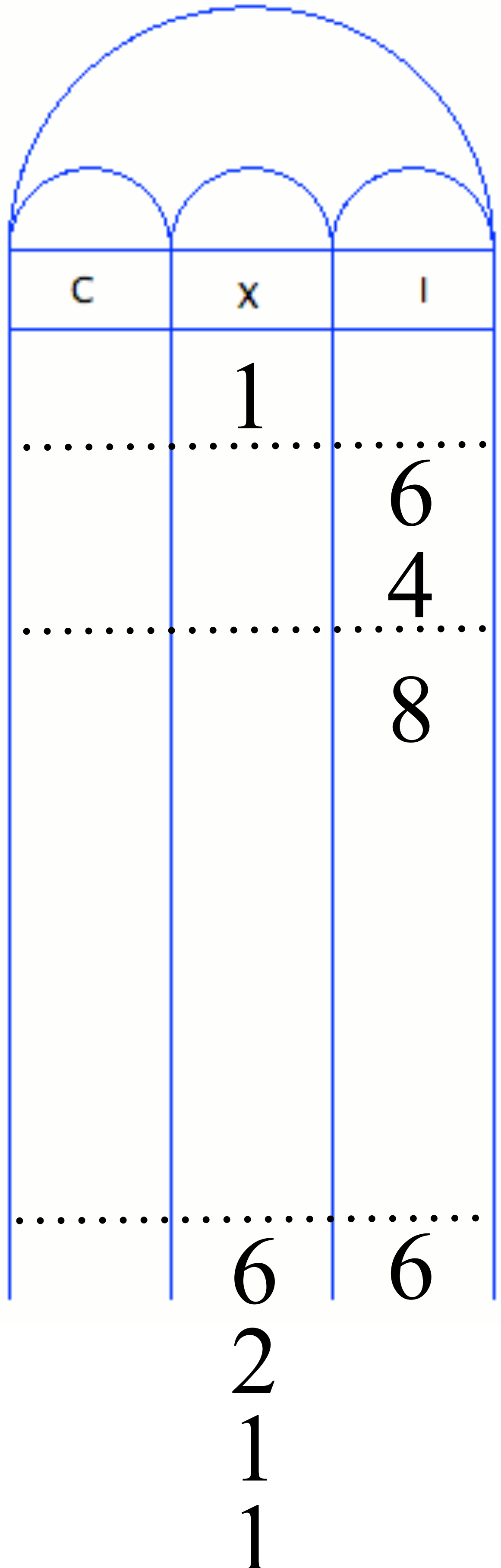
Divisio ferrea

Dividimos 60 por 10



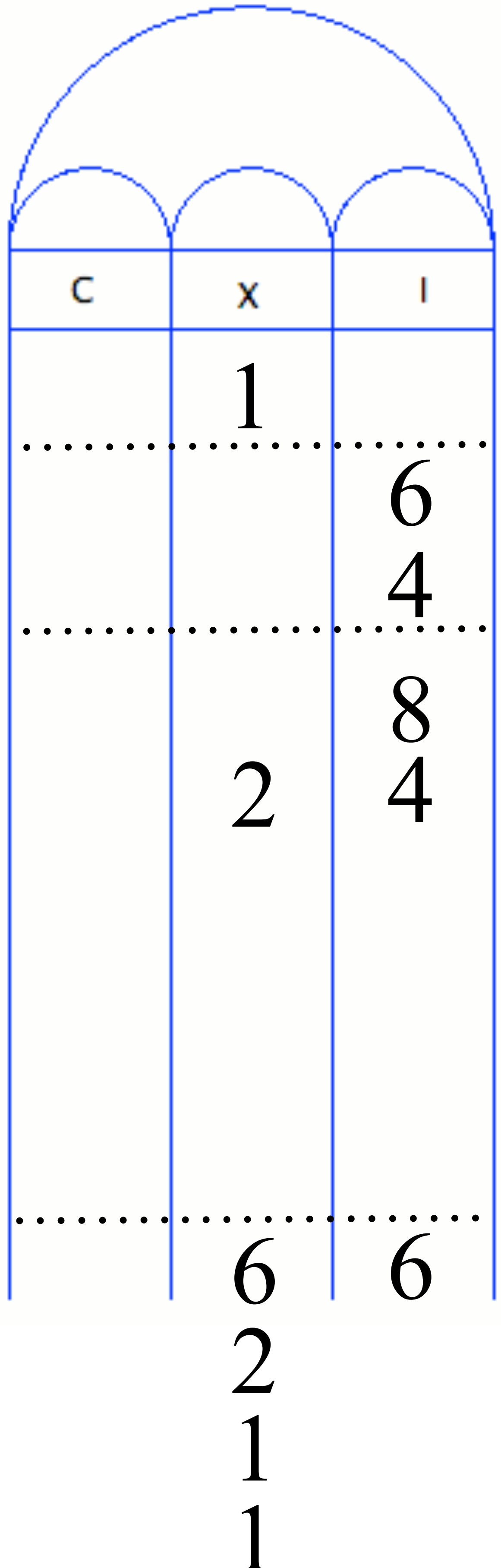
Divisio ferrea

Multiplicamos 4 por 6 e somamos a 8



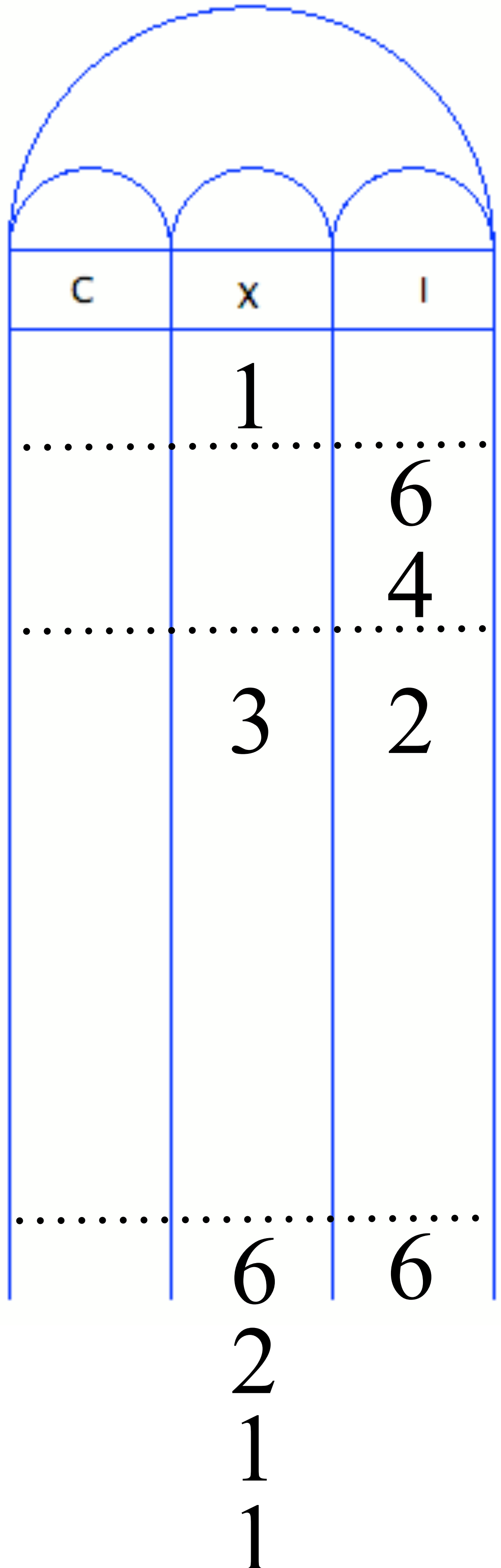
Divisio ferrea

Multiplicamos 4 por 6 e somamos a 8



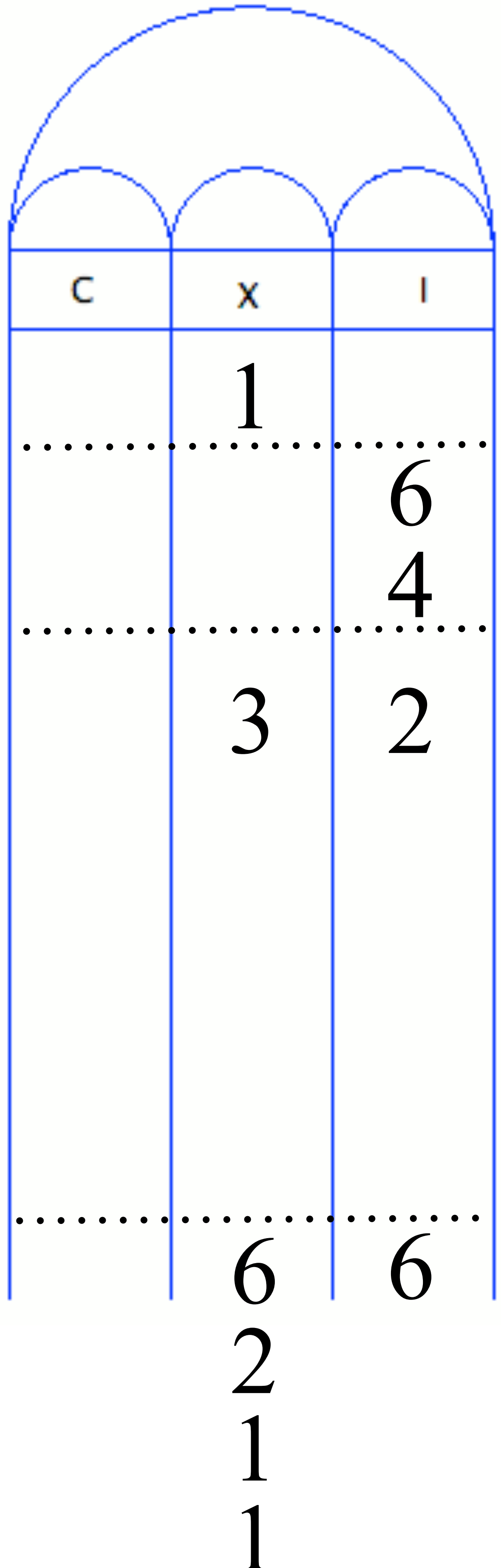
Divisio ferrea

Verificando...



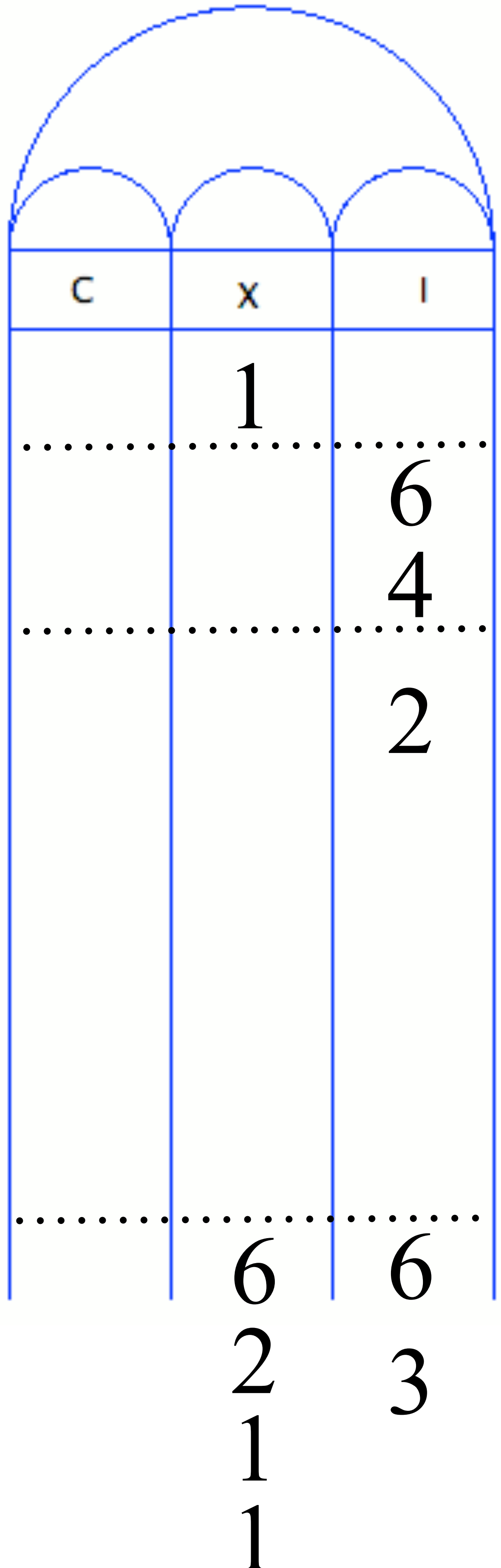
Divisio ferrea

Dividimos 30 por 10



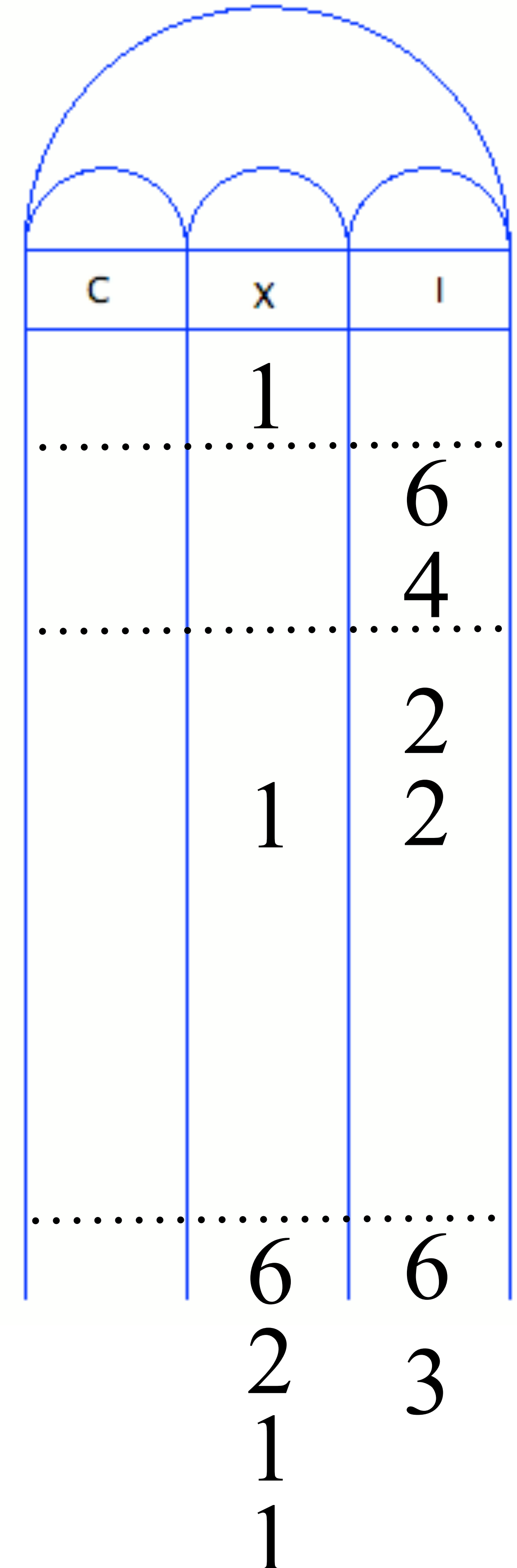
Divisio ferrea

corrigimos somando ao quaociente 4x3



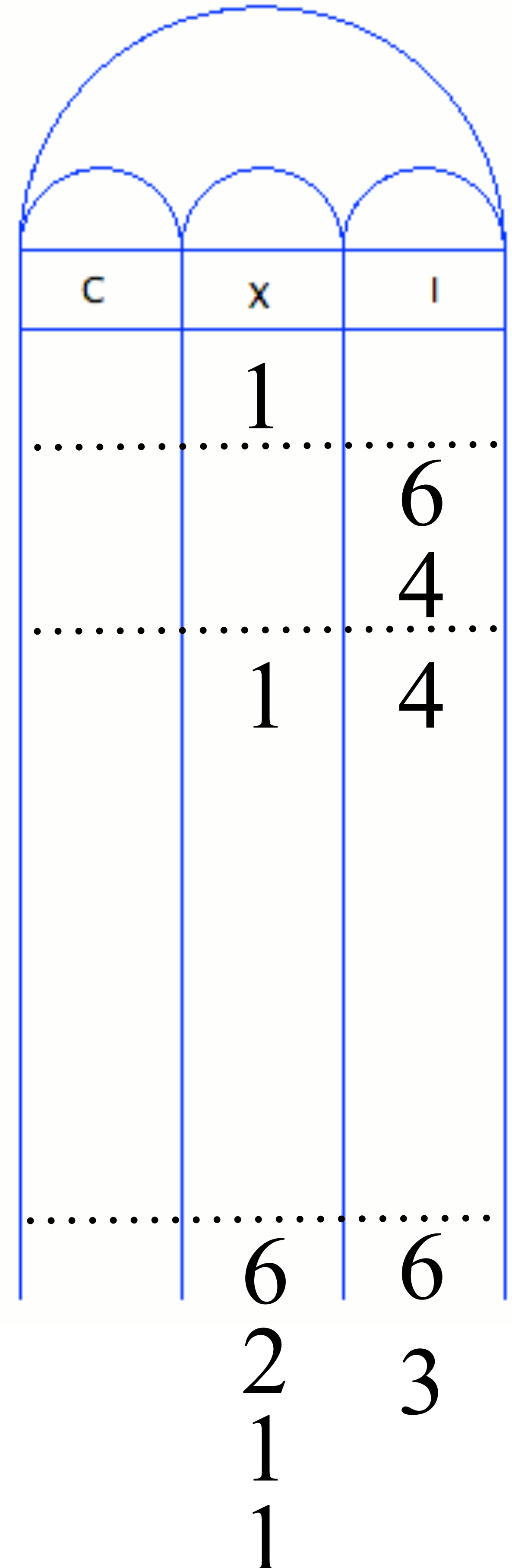
Divisio ferrea

corrigimos somando ao quaociente 4x3



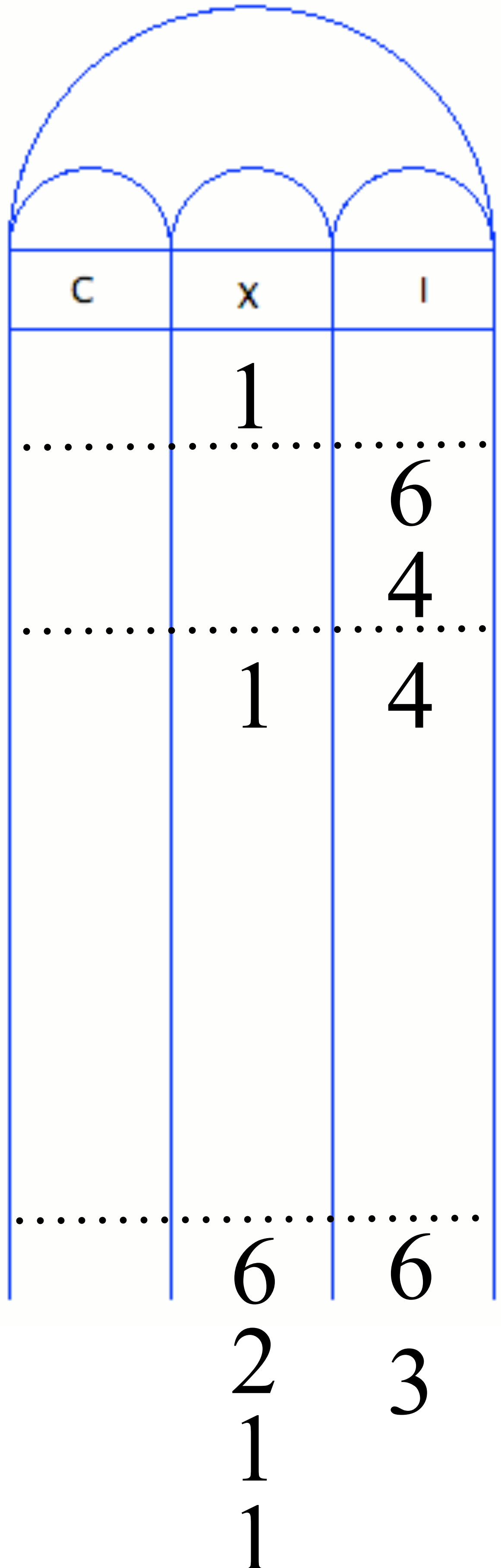
Divisio ferrea

Verificando...



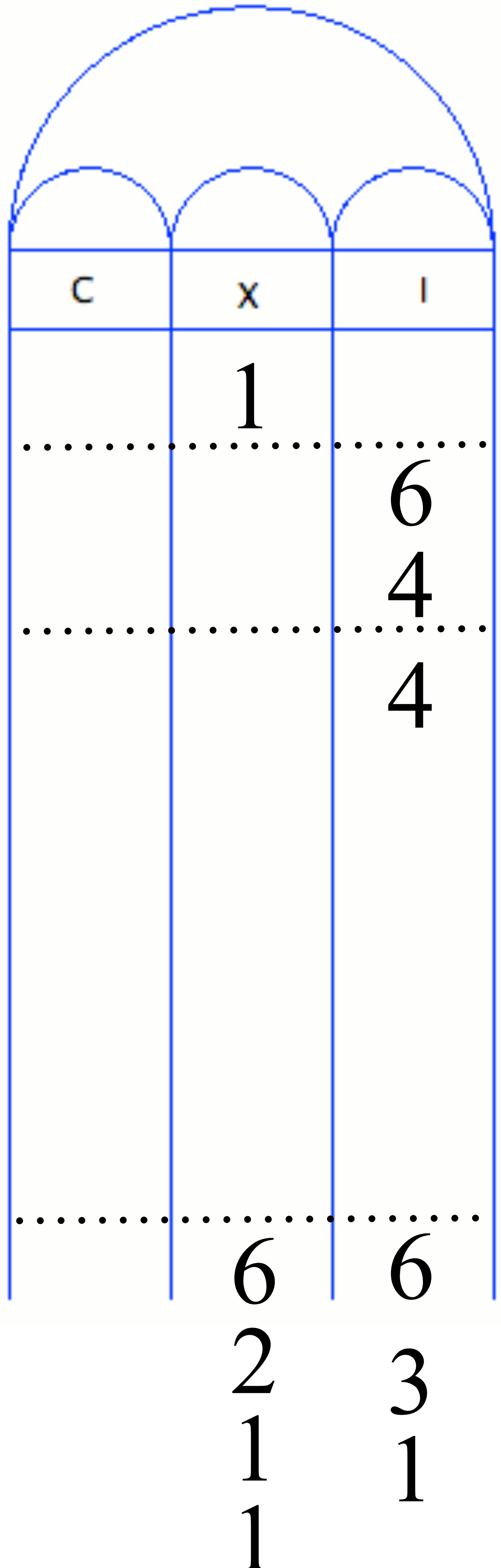
Divisio ferrea

Dividir 10 por 10



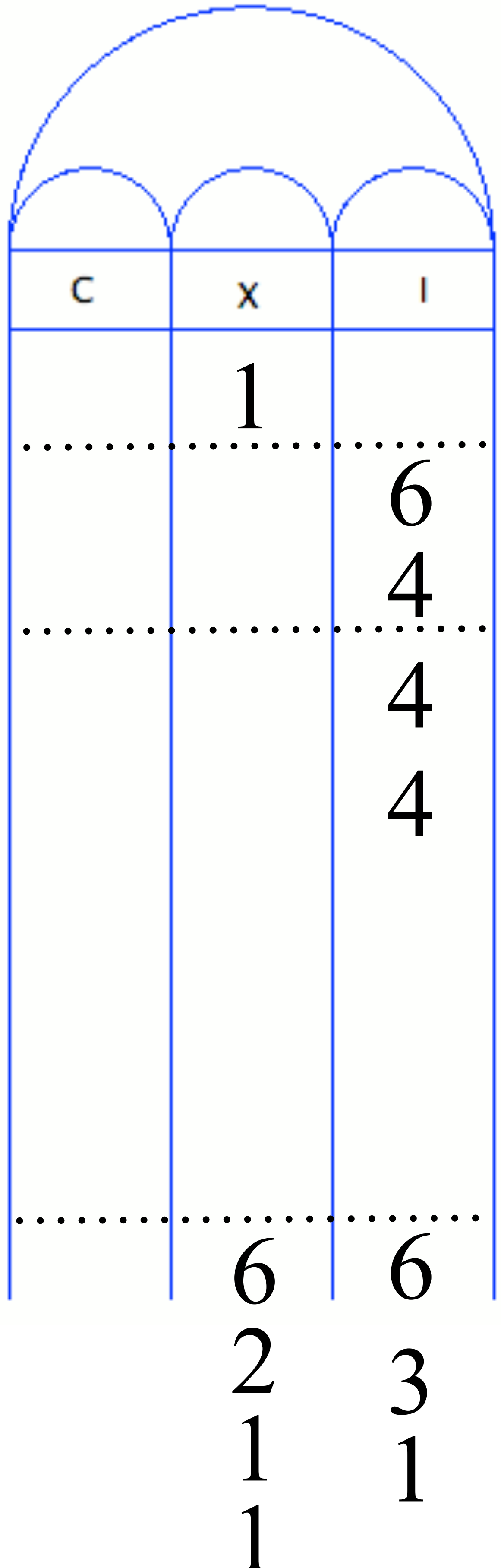
Divisio ferrea

Somar 4x1



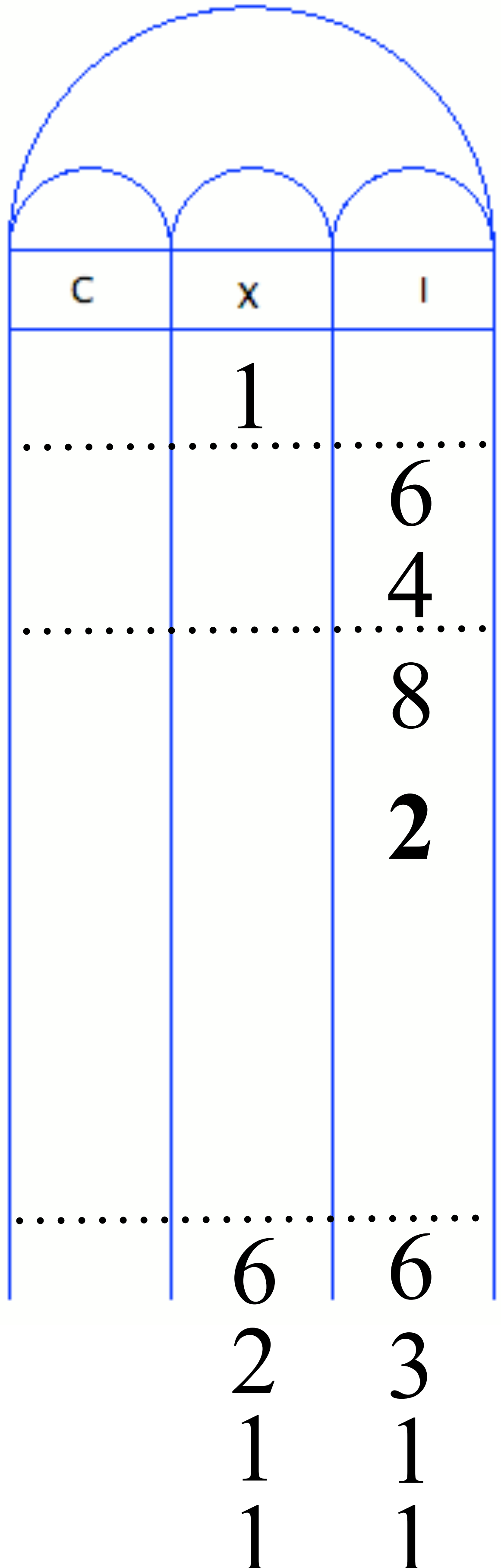
Divisio ferrea

Verificar



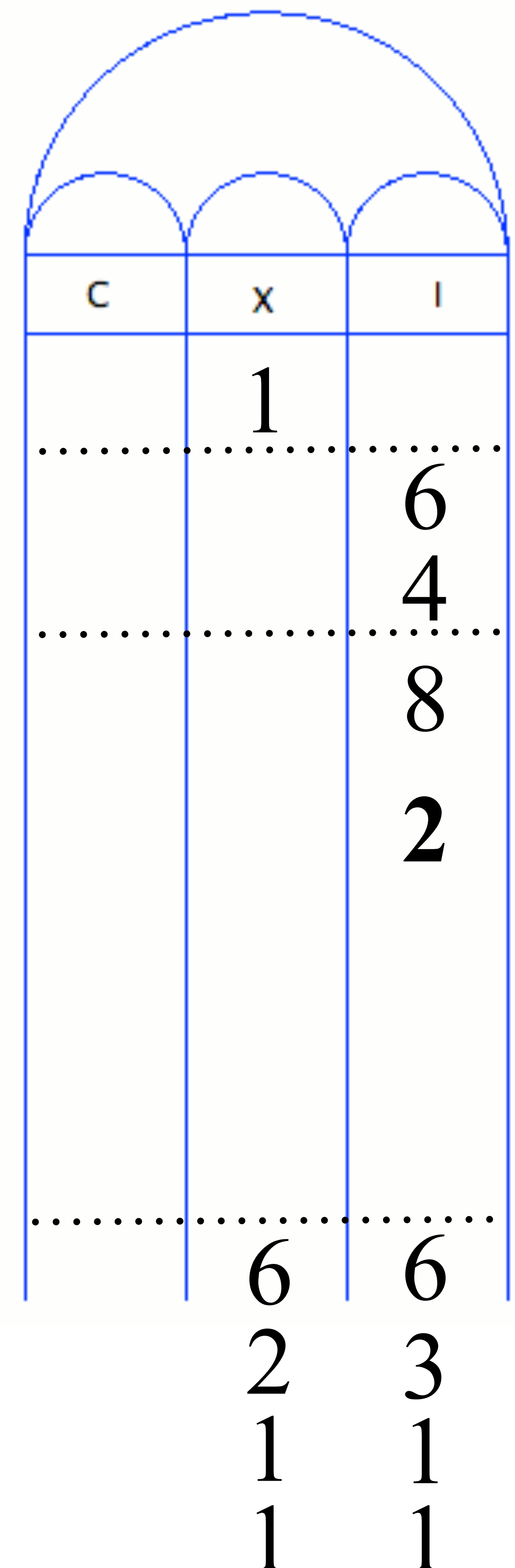
Divisio ferrea

Não podemos dividir 8 por 10.
Dividimos por 6 e terminamos.



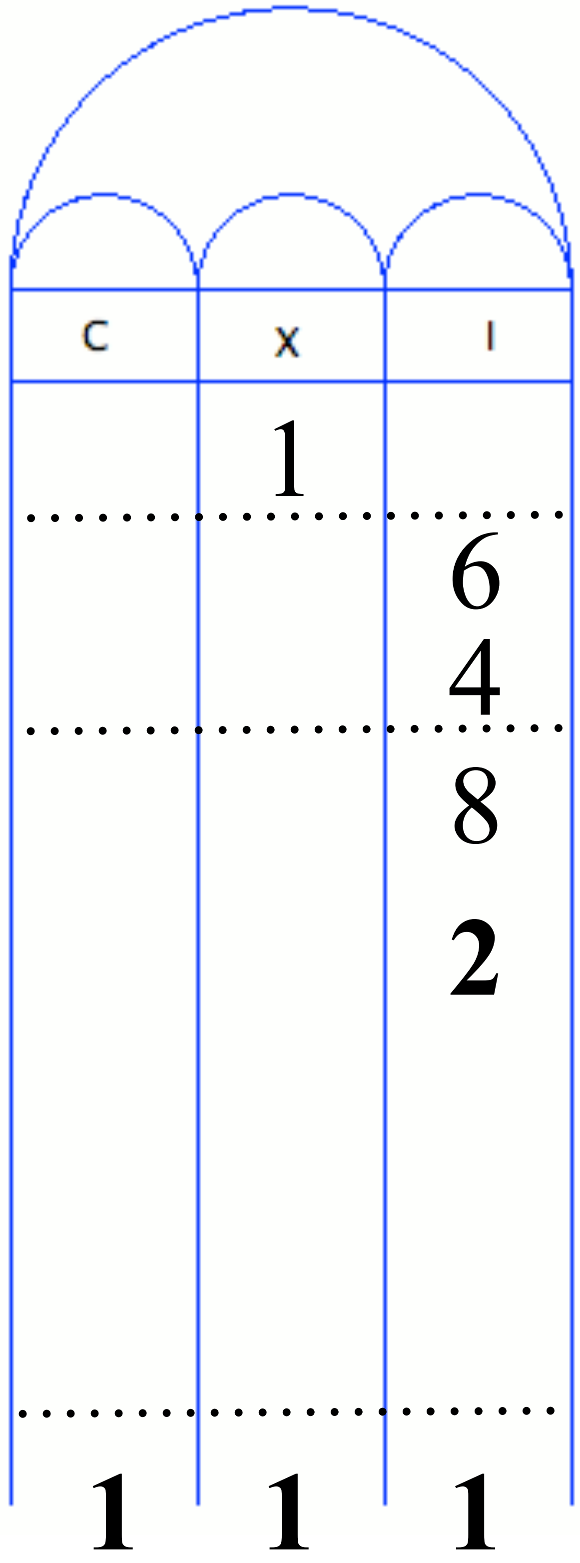
Divisio ferrea

Somar 60+20+10+10+6+3+1+1
e temos o resultado: 111. Resto 2.



Divisio ferrea

Somar: 60+20+10+10+6+3+1+1
e temos o resultado: 111. Resto 2.



Este método prescinde de subtracções e tentativas. Uma vez escolhido o divisor auxiliar, tudo é automático.

Uma boa escolha do divisor auxiliar simplifica as contas e induz regras simples (dividir por 10 corresponde a mover uma peça do dividendo para o quociente, etc)

Não há menções à *Divisio Ferrea* anteriores a Bernelin. Gerbert adaptou algum procedimento dos ábacos antigos, ou inventou este método.

Por que funciona:

Ao dividir $\boldsymbol{d}$ por $\boldsymbol{b}$ obtemos

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{r}$$

que equivale a

$$\boldsymbol{d} + \boldsymbol{q} \times \boldsymbol{z} = \boldsymbol{q} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{z}) + \boldsymbol{r}$$

portanto é importante escolher **z** de forma a que **b** + **z** seja “simpático”.

“Simpático” significa uma potência de 10, ou um dígito multiplicado por uma potência de 10 (estes números só têm um dígito aqui).

77068 : 6807

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
		7			
		6	8		7
			1	9	3
	7	7		6	8
	7	7		6	8

77068 : 6807

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{i}$	c	x	i
		7			
		6	8		7
			1	9	3
	7	7		6	8
		7		6	8
		1	9	3	
		8	9	9	8
				1	

77068 : 6807

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{I}$	c	x	I
		7			
		6	8		7
			1	9	3
	7	7		6	8
		7		6	8
		1	9	3	
		1	9	9	8
			1	9	3
				1	1

77068 : 6807

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{I}$	c	x	I
		7			
		6	8		7
			1	9	3
	7	7		6	8
		2	1	9	1
				1	1

77068 =
11 x 6807 + 2191

986022 : 507041

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
9					
5		7		4	1
3	9	2	9	5	9
9	8	6			2
9	8	6			2

986022 : 507041

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
9					
5 3	 9	7 2	 9	4 5	1 9
9	8	6			2
 3 **4**	8 9 **7**	6 2 **8**	 9 **9**	 5 **8**	2 9 **1**
					1

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{\mathrm{i}}$	c	x	i
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
		6	1	2	1

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{\imath}$	c	x	i
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
		2	1	2	1
			5	6	
		2	6	8	1
				1	

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
		2	6	8	1
				1	

6121 : 344

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
		2	6	8	1
				1	6

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{l}$	c	x	l
			4		
			3	4 5	4 6
		6	1	2	1
			2	8	1
				1	6

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
			2	8	1
			3	3	6
				1	6

6121 : 344

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
			2	8	1
			3	3	6
			6	1	7
				1	6

6121 : 344

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
			6	1	7
				1	6

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
			4		
			3	4 5	4 6
		6	1	2	1
			6	1	7
				1	6
					1

6121 : 344

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{ı}$	c	x	ı
			4		
			3	4	4
				5	6
		6	1	2	1
			2	1	7
				5	6
			2	6	3
				1	6
					1

6121 : 344

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
			4		
			3	4 5	4 6
		6	1	2	1
			2 **2**	1 5 **6**	7 6 **3**
				1	**7**

Gerbert usava Astrolábio,
Esfera Armilar,
Tubos de observação astronómica,
Ábaco novo.

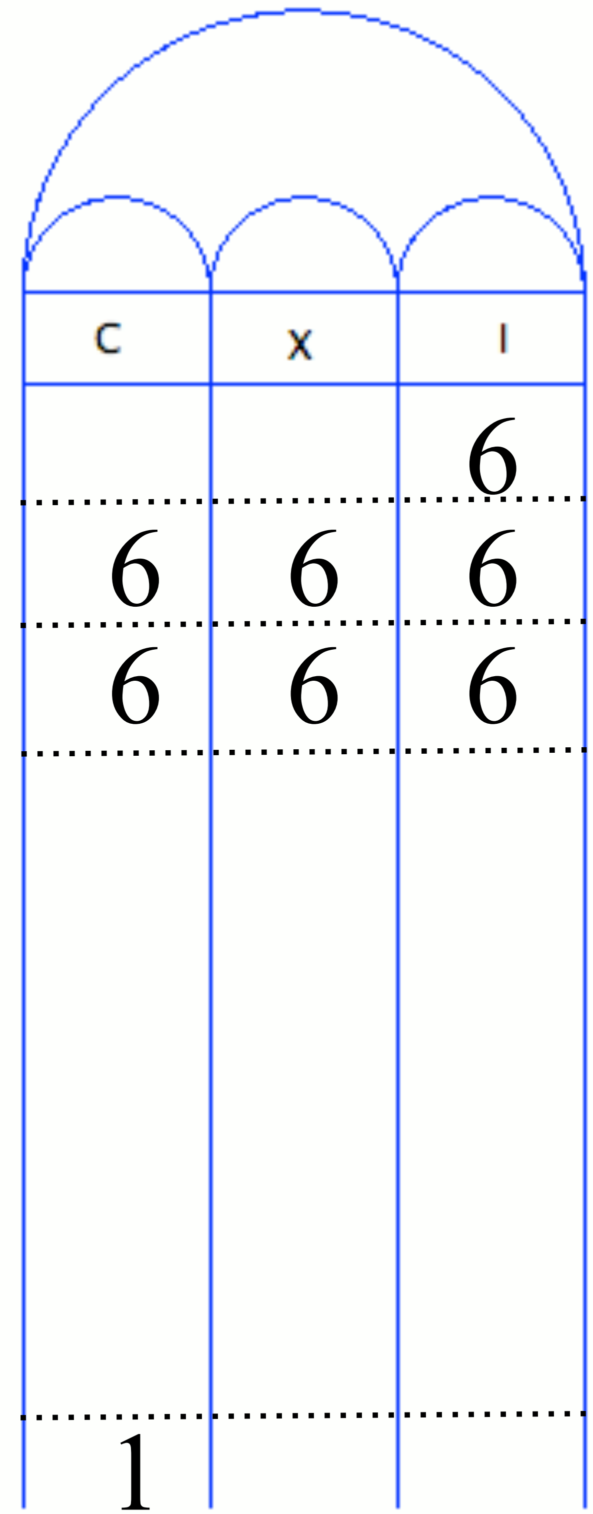
Homem cultíssimo, grande professor, homem de ciência.

Os seus adversários acusaram-no de ter feito um pacto com o Diabo para obter tal sabedoria... A lenda sobreviveu vários séculos.

Divisio aurea

666 : 6

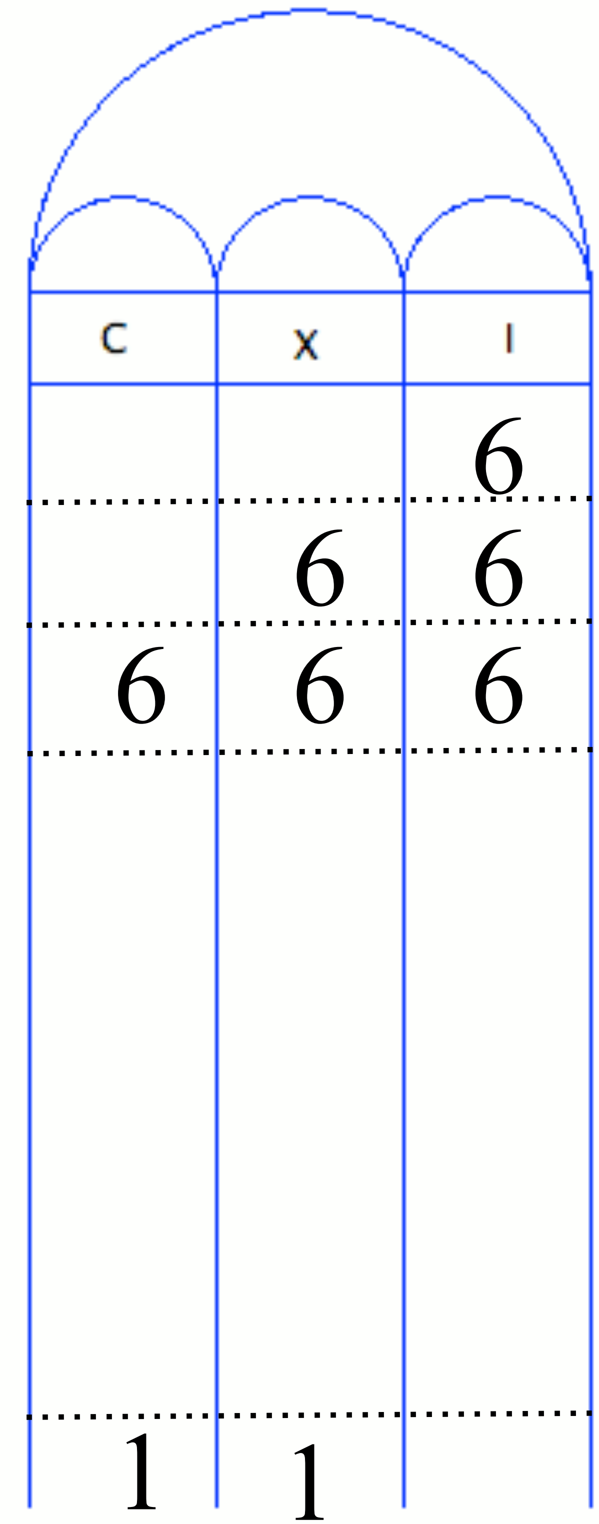
Quantos 6s em 6?...



Divisio aurea

666 : 6

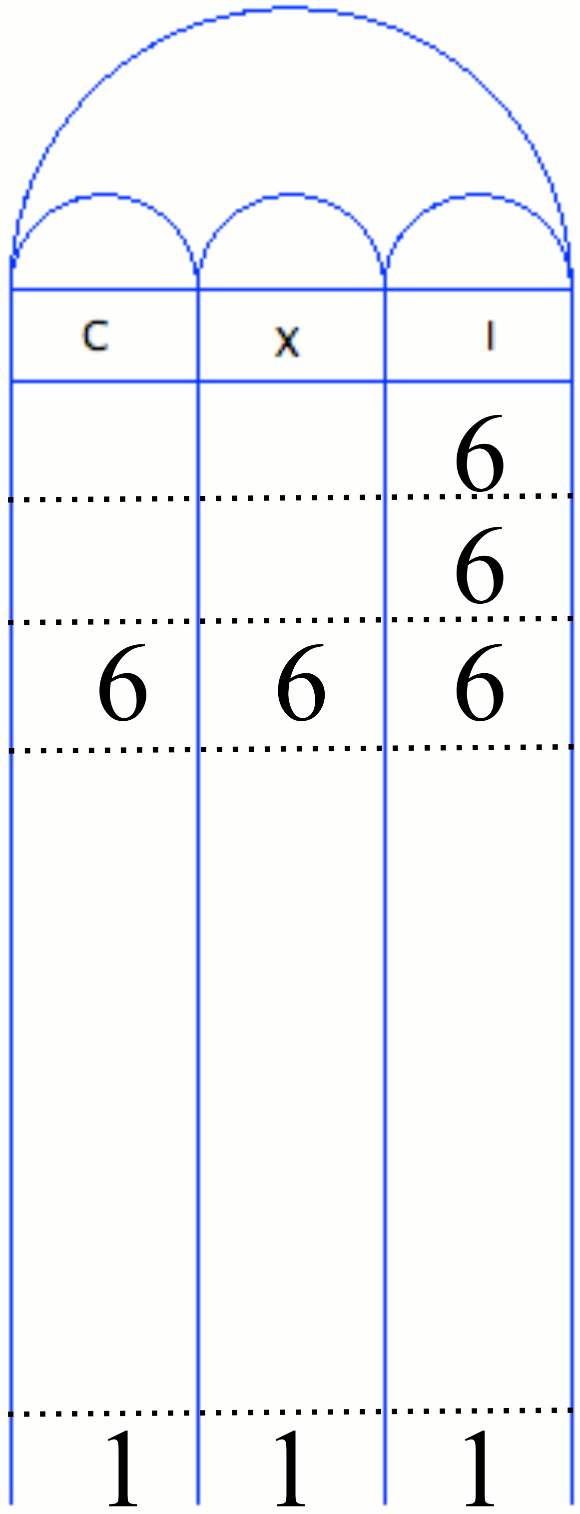
Quantos 6s em 6?...



Divisio aurea

666 : 6

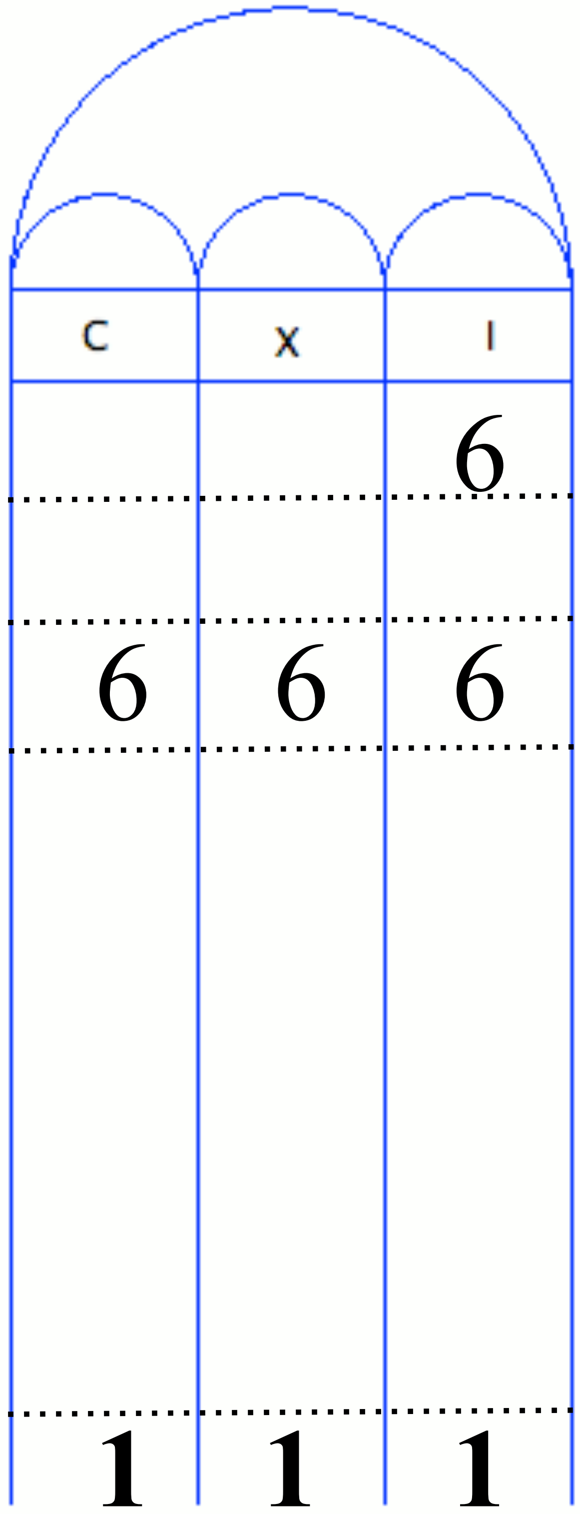
Quantos 6s em 6?...



Divisio aurea

666 : 6

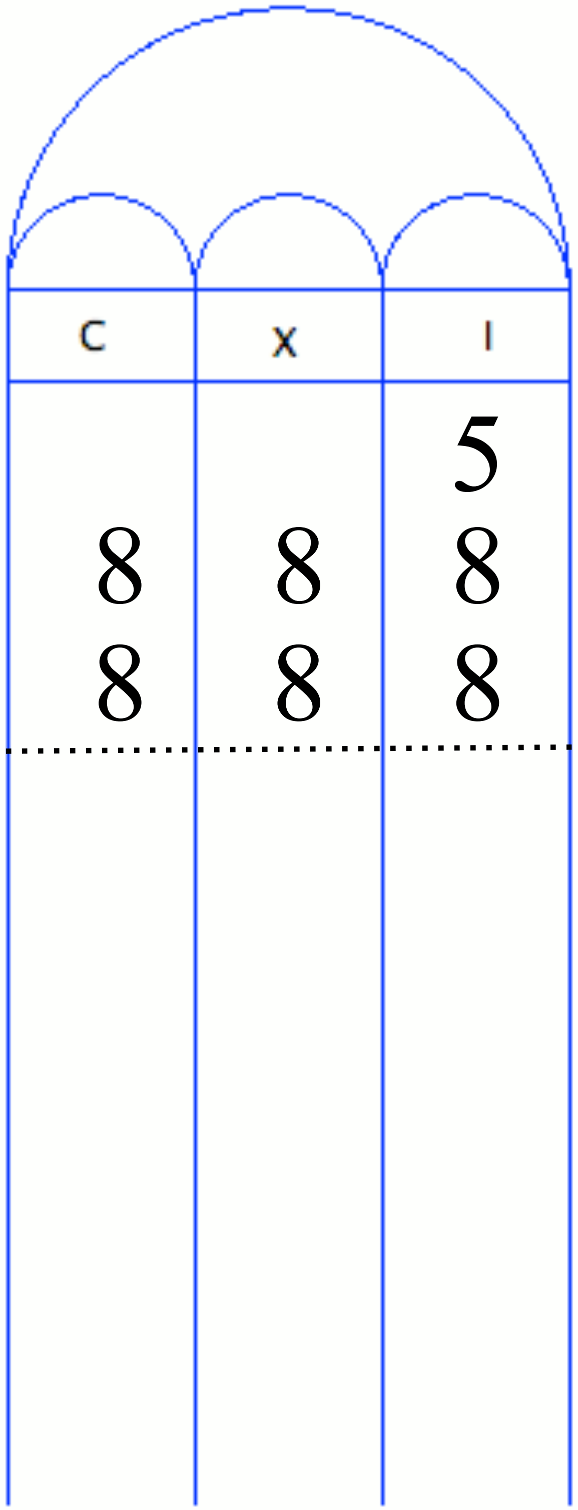
666 = 111 x 6



Divisio aurea

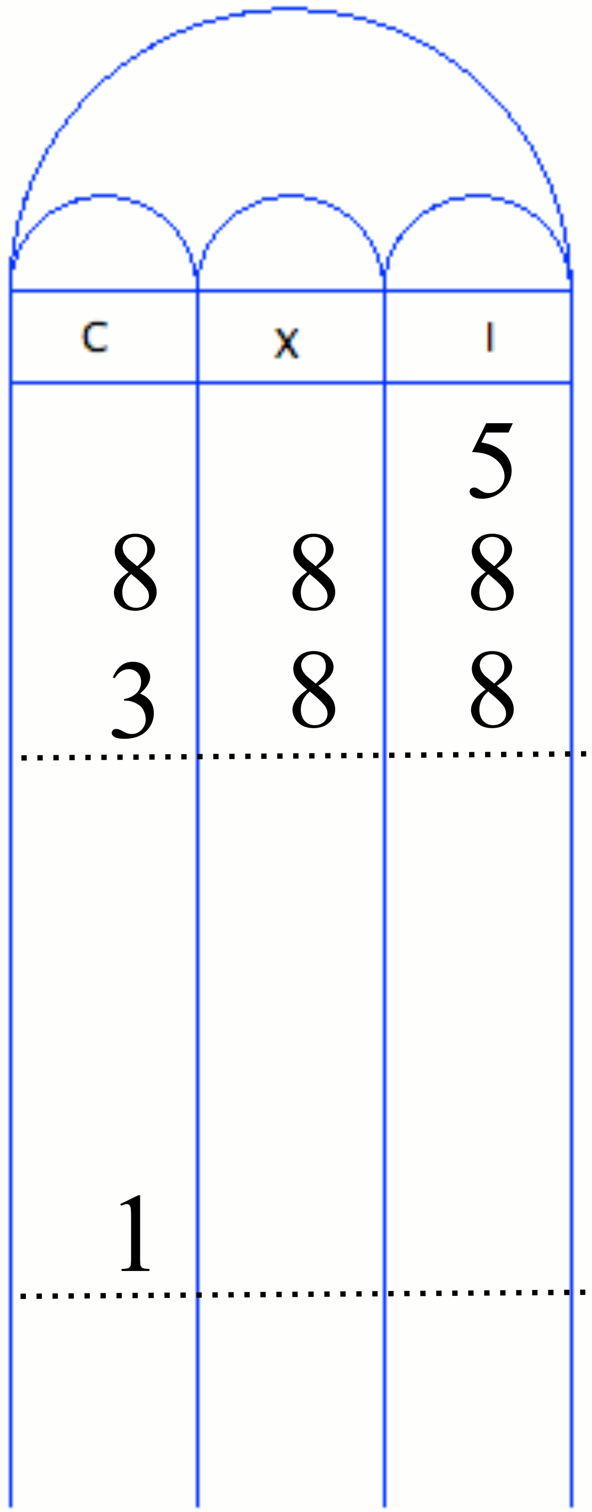
888 : 5

Quantos 5s em 8?...



Divisio aurea

888 : 5

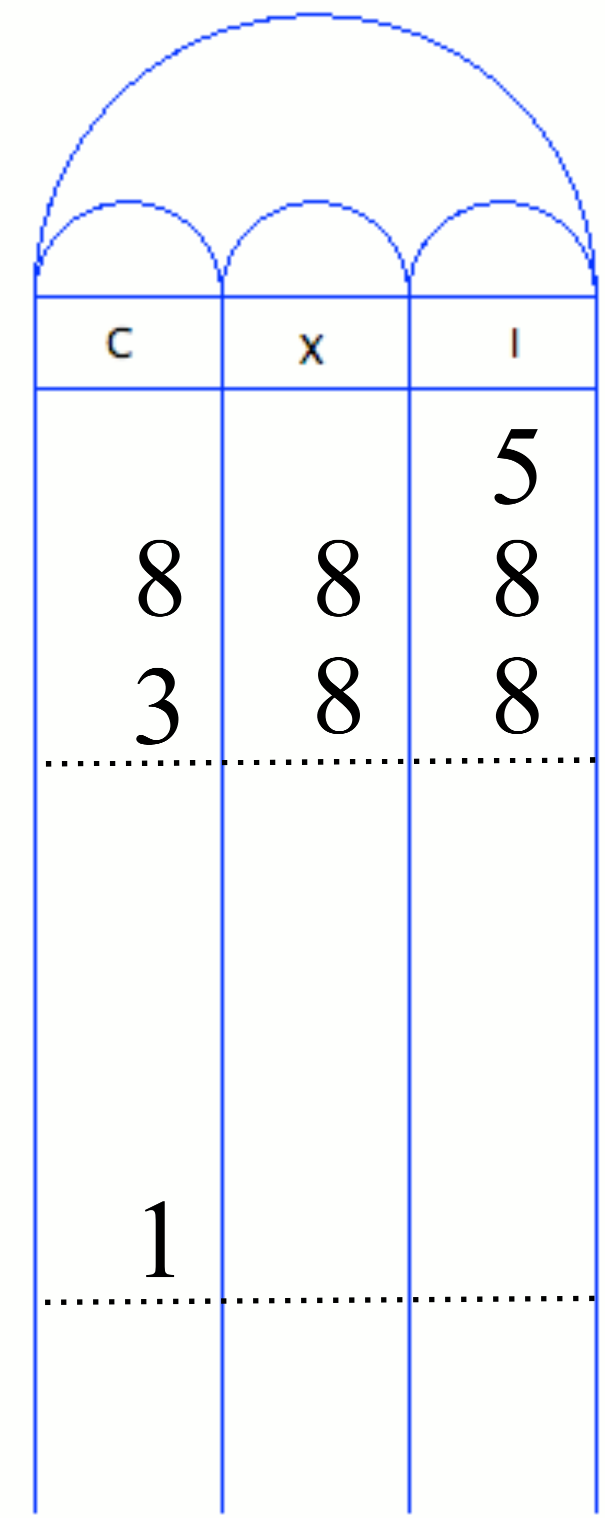


Quantos 5s em 8?...
1, com resto 3

Divisio aurea

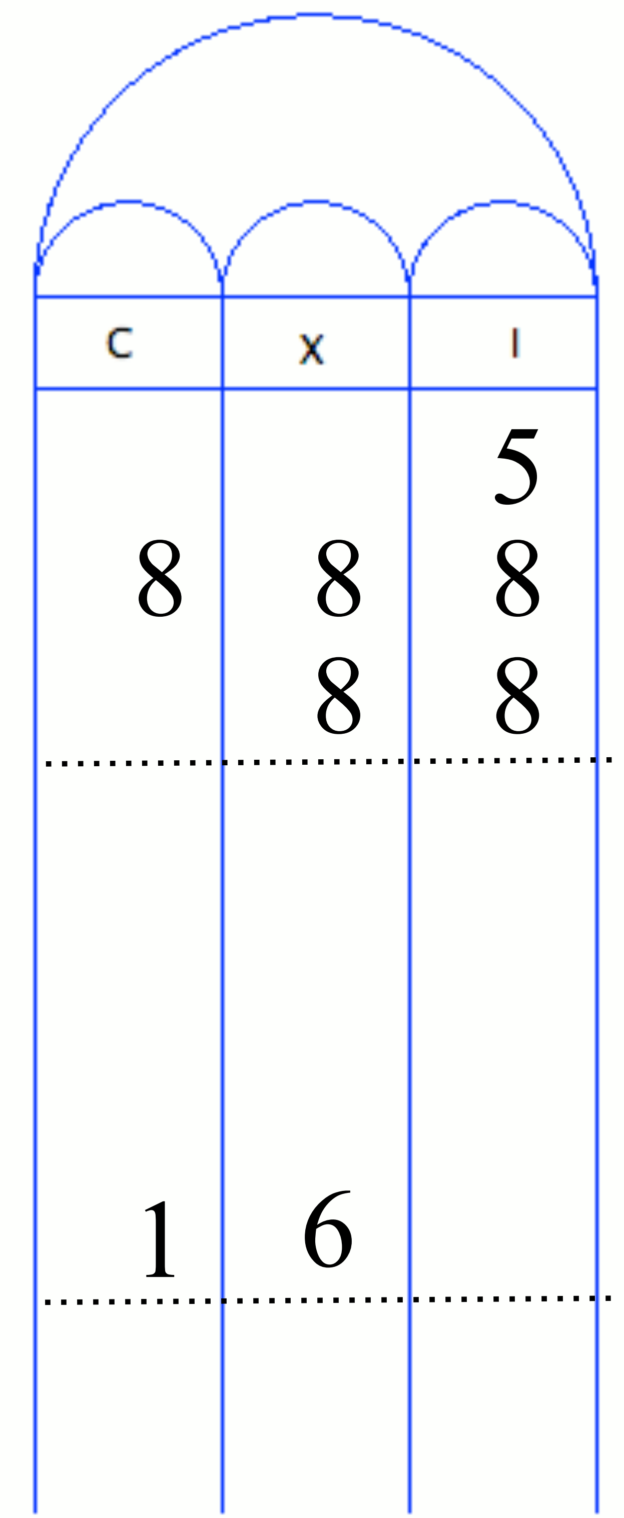
888 : 5

Quantos 5s in 3?... 6 (na coluna central, de acordo com as regras)



Divisio aurea

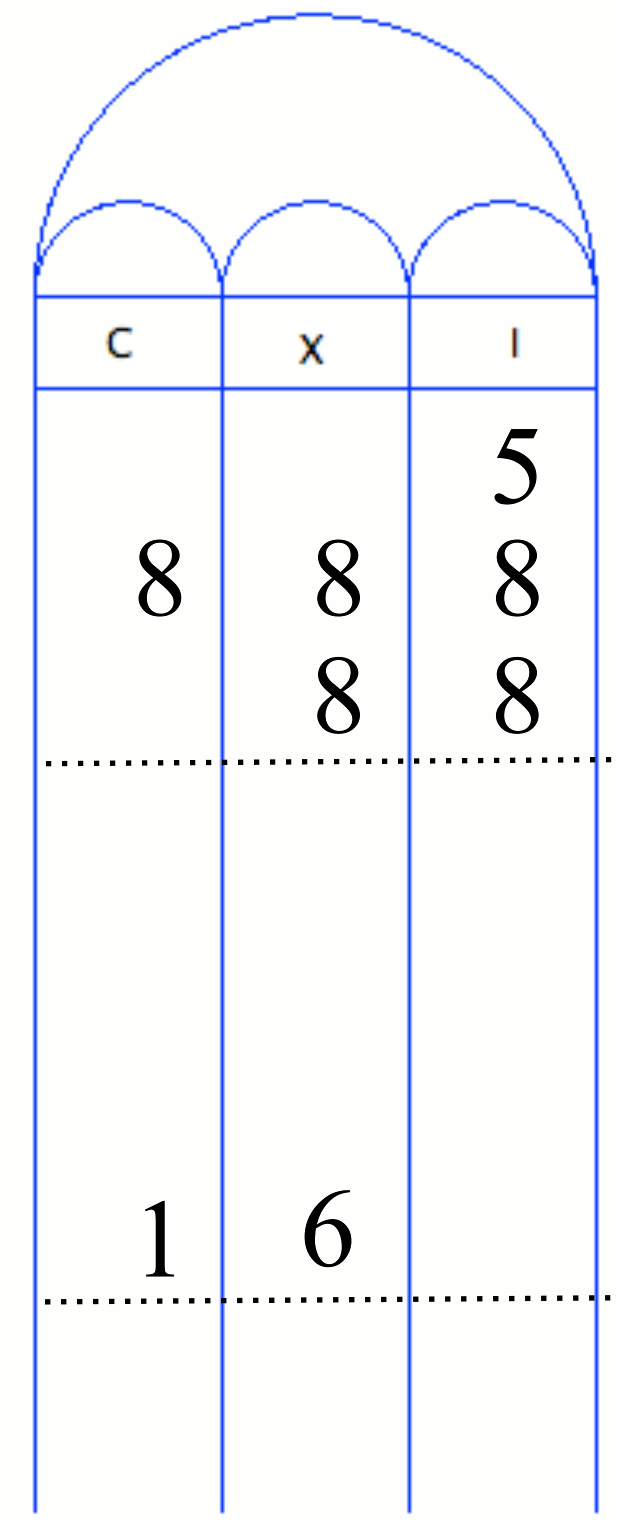
888 : 5



Divisio aurea

888 : 5

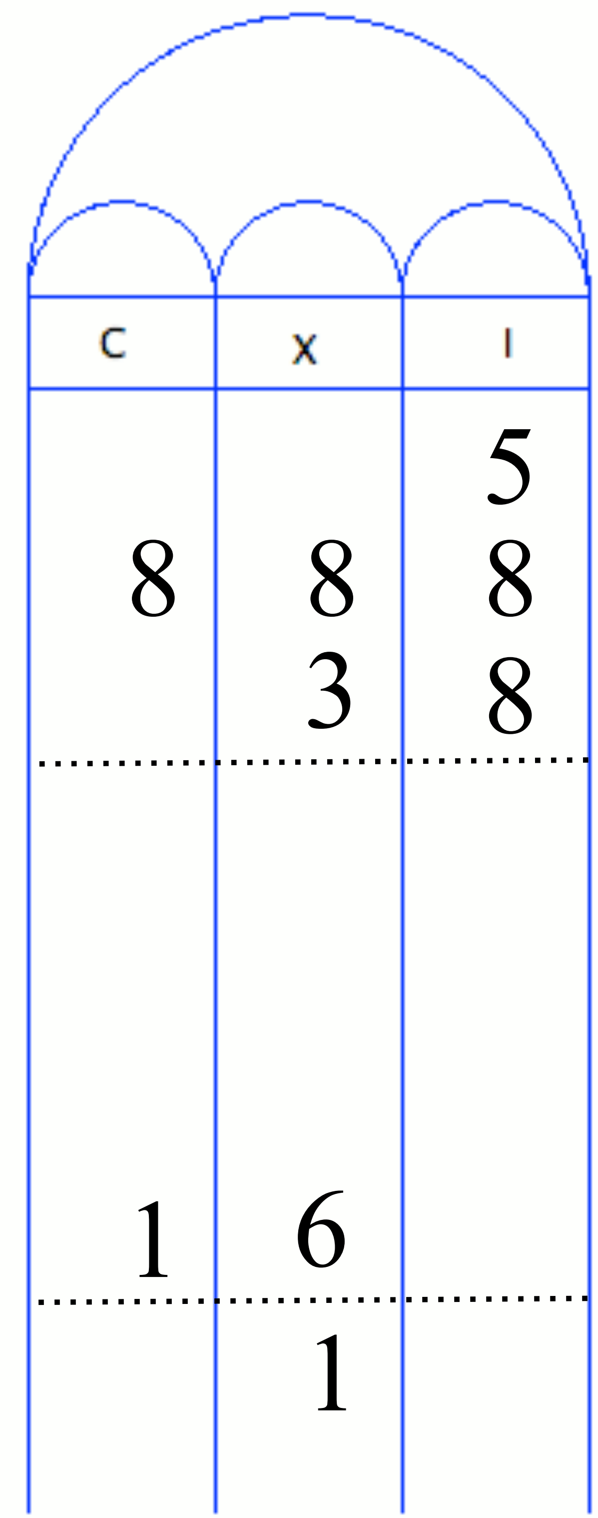
Quantos 5s em 8?...



Divisio aurea

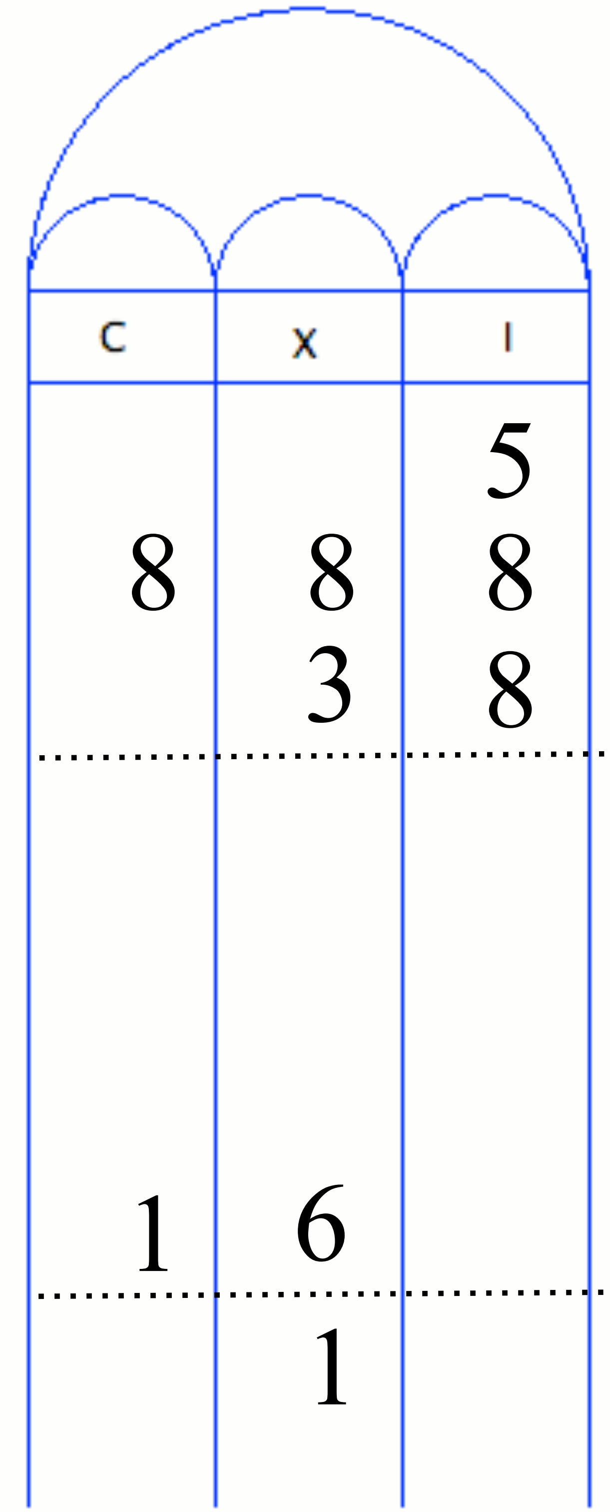
888 : 5

quantos 5s in 8?...
1, com resto 3



Divisio aurea

888 : 5

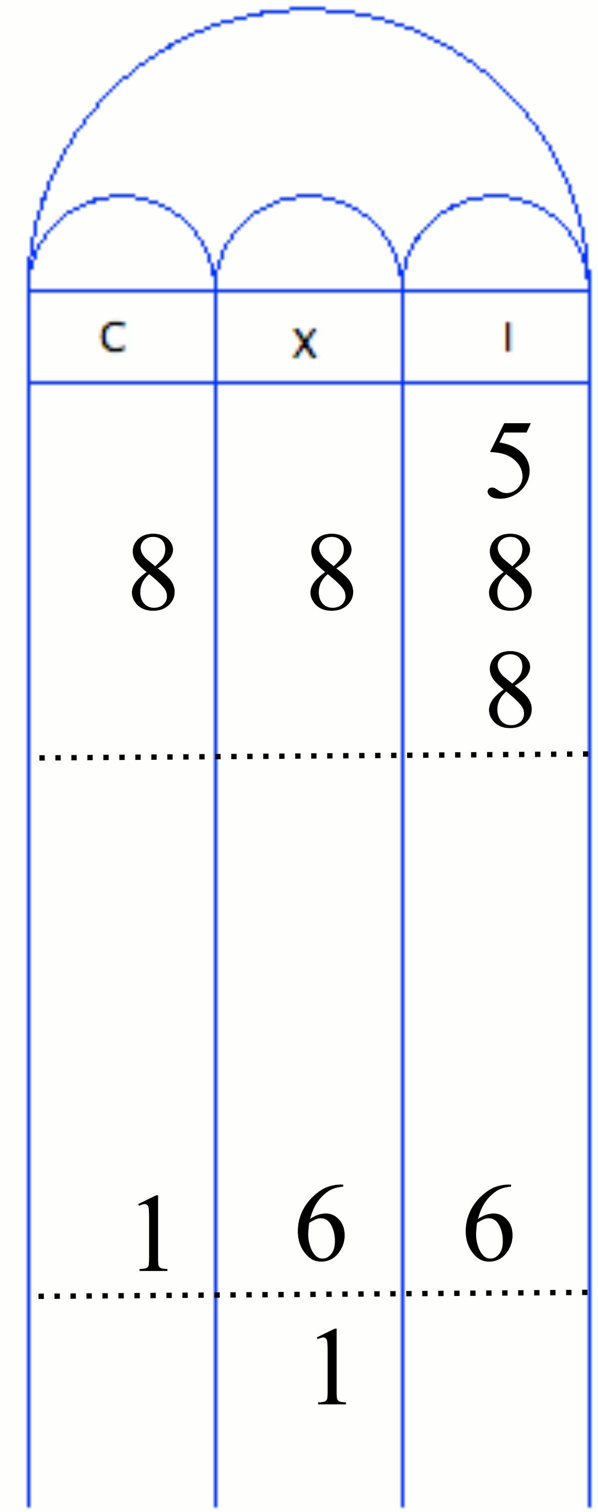


Quantos 5s in 3?...

Divisio aurea

888 : 5

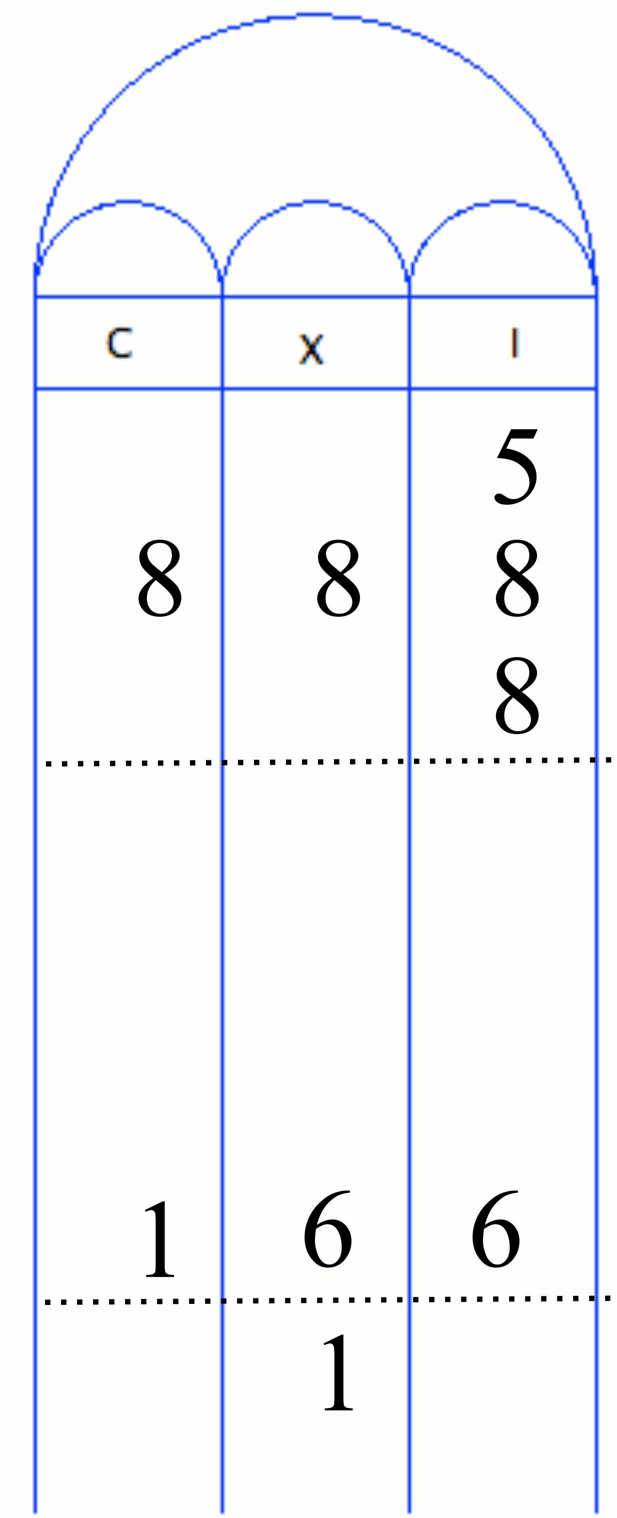
Quantos 5s em 3?...
6 na coluna da direita



Divisio aurea

888 : 5

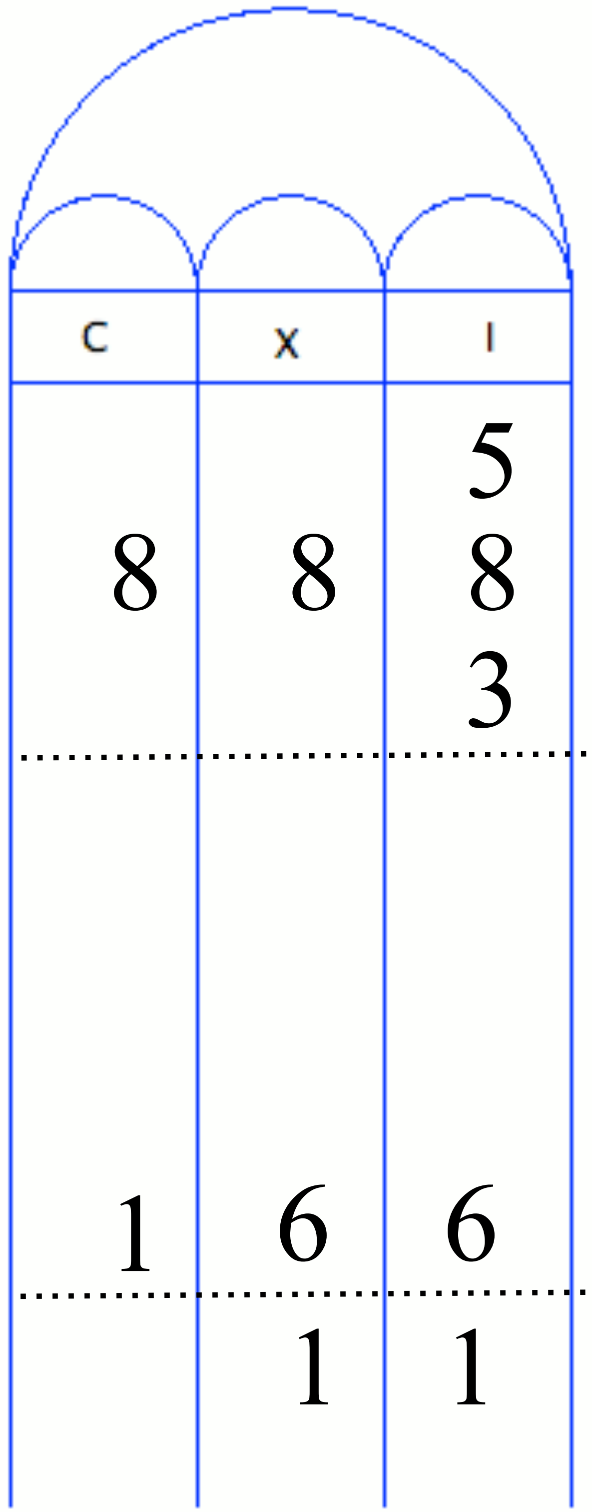
Quantos 5s em 8?...



Divisio aurea

888 : 5

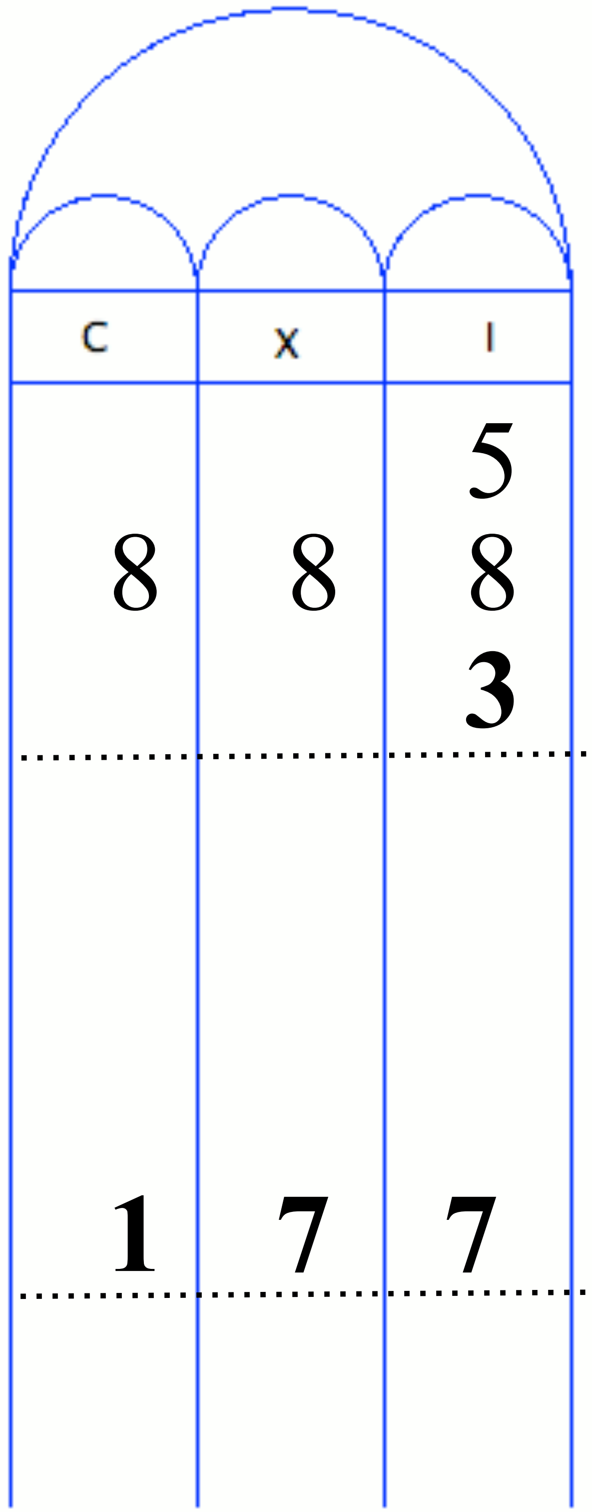
Quantos 5s in 8?...
1 com resto 3



Divisio aurea

888 : 5

Arrumando...



Bernelin descreve as operações usando numerais romanos (3 na coluna central é *xxx*).

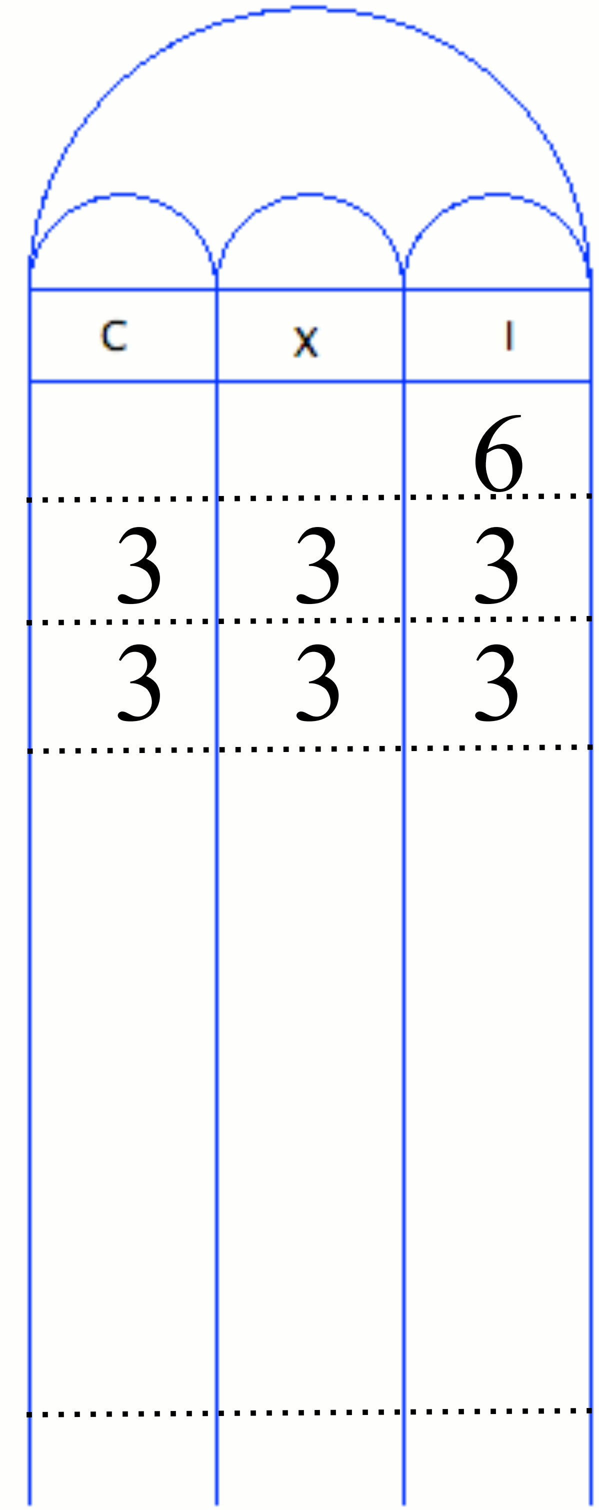
Ao referir-se a 38 diz algo como *o 3 na coluna central e o 8 na coluna da direita*.

Nunca transparece que tenha alguma ideia do sistema decimal posicional.

Divisio aurea

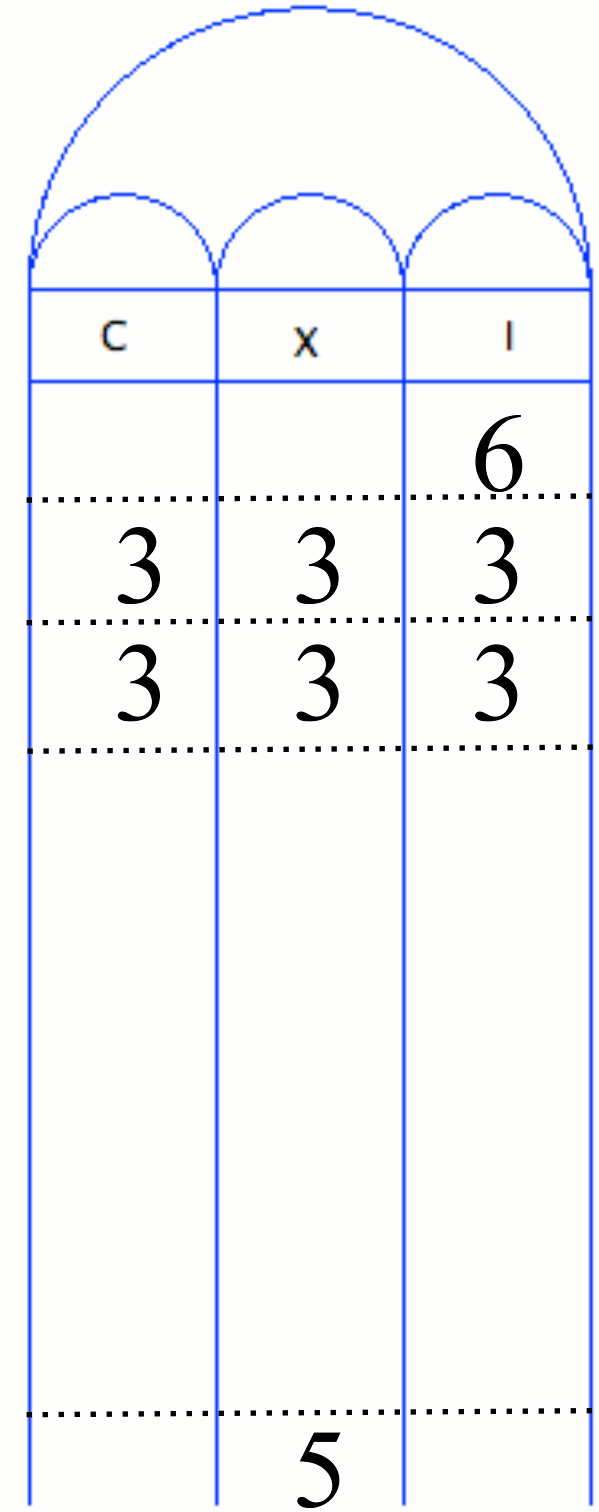
333 : 6

Quantos 6s em 3?...



Divisio aurea

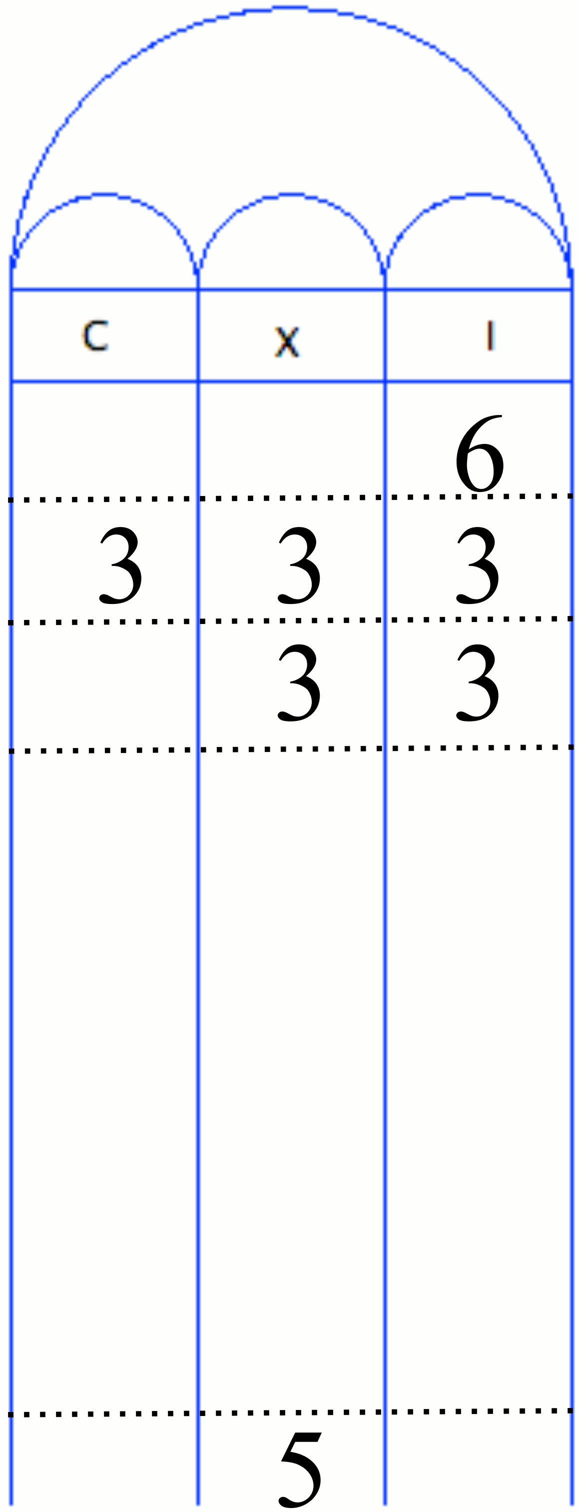
333 : 6



Divisio aurea

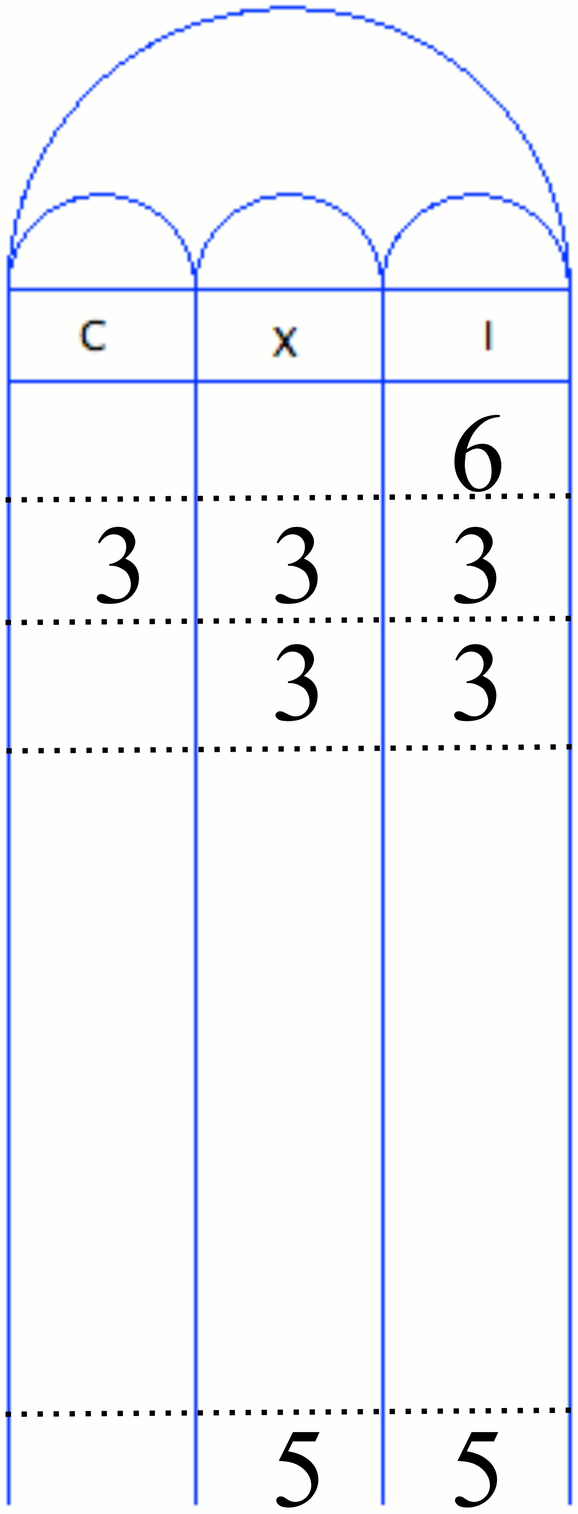
333 : 6

Quantos 6s em 3?...



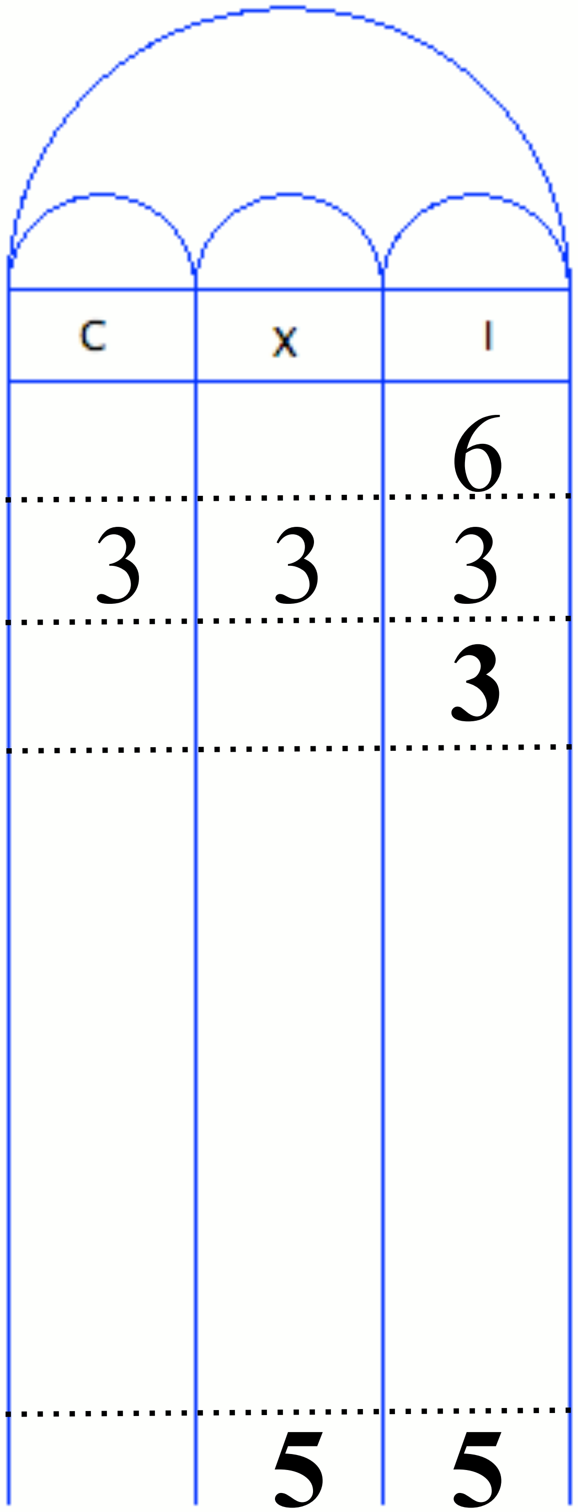
Divisio aurea

333 : 6



Divisio aurea

$333 = 6 \text{ x } 55 + 3$



1098 : 20

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{i}$	c	x	i
				2	
		1		9	8
		1		9	8

1098 : 20

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
				2	
		1		9	8
				9	8
				5	

1098 : 20

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
				2	
		1		9	8
				9	8
				5	4

1098 : 20

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{\imath}$	c	x	i
				2	
		1		9	8
				1	8
				5	4

1098 =
20 x 54 + 18

908046 : 9604

$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{I}}$	C	X	I
		9	6		4
9		8		4	6
9		8		4	6

Quantos 9s em 90?...

908046 : 9604

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{I}$	c	x	I
		9	6		4
9		8		4	6
9		8		4	6
8	1				
				9	

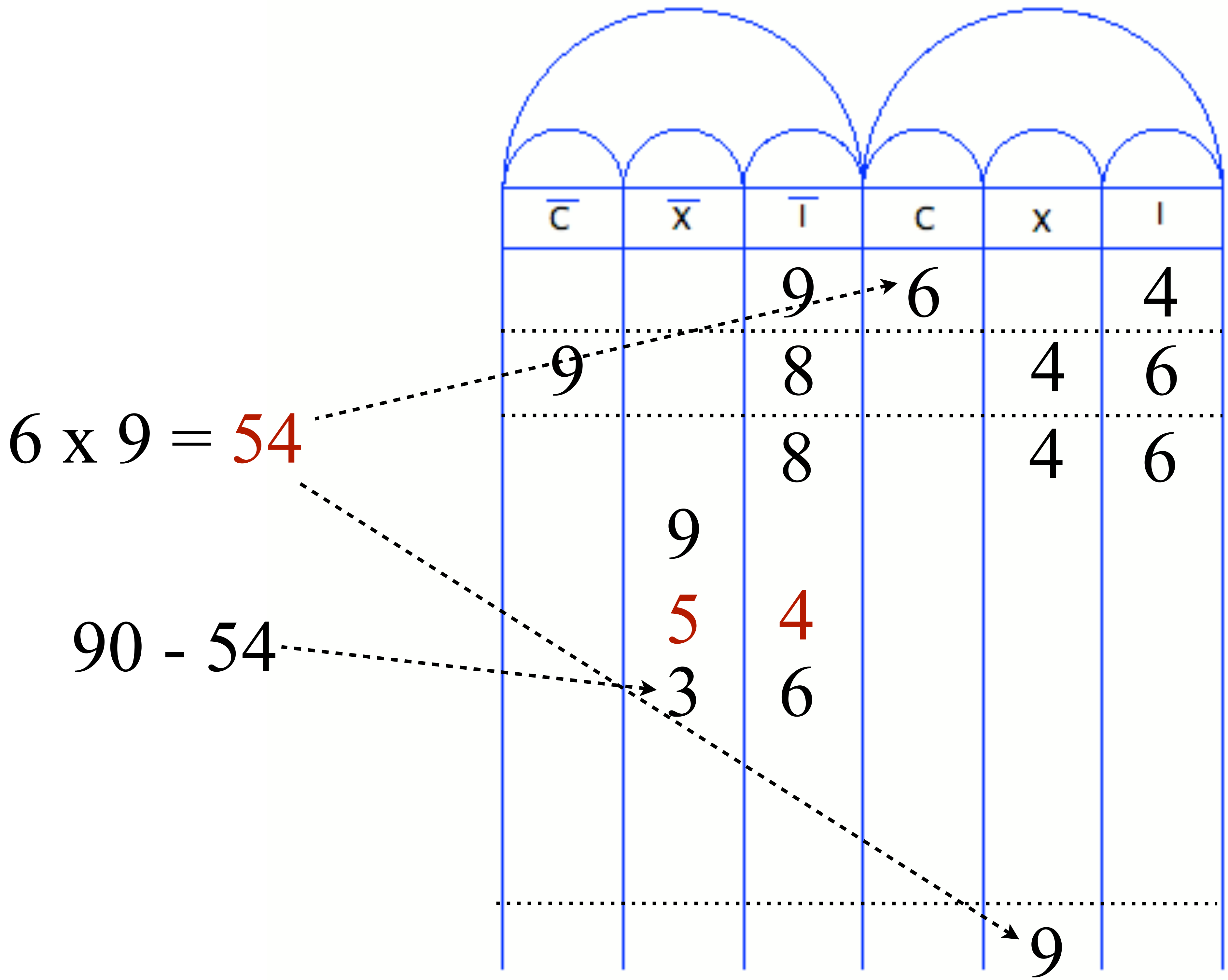
908046 : 9604

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{\imath}$	c	x	i
		9	6		4
9		8		4	6
	9	8		4	6
				9	

908046 : 9604

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{l}$	c	x	l
		9	6		4
9		8		4	6
		8		4	6
	9				
	5	4			
	3	6			
				9	

908046 : 9604



908046 : 9604

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{i}$	c	x	i
		9	6		4
9		8		4	6
		8		4	6
	3	6			
			3	6	
		5	6	4	
				9	

4 x 9 = 36

600 - 36 = 564

908046 : 9604

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{l}$	c	x	l
		9	6		4
9		8		4	6
		8		4	6
	3				
		5	6	4	
				9	

908046 : 9604

Organizando...

$\overline{\text{c}}$	$\overline{\text{x}}$	$\overline{\text{I}}$	c	x	I
		9	6		4
9		8		4	6
	4	3	6	8	6
				9	

908046 : 9604

Organizando...

$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{I}}$	C	X	I
		9	6		4
9		8		4	6
	4	3	6	8	6
				9	4

908046 : 9604

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{i}$	c	x	i
		9	6		4
9		8		4	6
	4	3	6	8	6
	3	6			
		7			
				9	4

908046 : 9604

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{\text{I}}$	c	x	I
		9	6		4
9		8		4	6
		7	6	8	6
		2	4		
				9	4

908046 : 9604

70 - 24 = 46

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
		9	6		4
9		8		4	6
		7	6	8	6
		2	4		
		4	6		
				9	4

908046 : 9604

$\overline{\text{c}}$	$\overline{\text{x}}$	$\overline{\text{I}}$	c	x	I
		9	6		4
9		8		4	6
		4	6	8	6
			6		
				1	6
				9	4

908046 : 9604

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{I}$	c	x	I
		9	6		4
9		8		4	6
		4	6	8	6
			6		
				1	6
				7	
				9	4

86 - 16 = 70

908046 : 9604

Organizando...

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
		9	6		4
9		8		4	6
		4	6	8	
			6		
		5	**2**	**7**	
				9	**4**

809331 : 60780

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{l}$	c	x	l
	6		7	8	
8		9	3	3	1
8		9	3	3	1

809331 : 60780

$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{I}}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
8		9	3	3	1

Quantos 6s em 8?...

809331 : 60780

$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
8		9	3	3	1
6					
				1	

809331 : 60780

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
2		9	3	3	1
		7			
				1	

809331 : 60780

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
2		2	3	3	1
			8		
				1	

809331 : 60780

$\overline{\text{c}}$	$\overline{\text{x}}$	$\overline{\text{i}}$	c	x	i
	6		7	8	
8		9	3	3	1
2		1	5	3	1
				1	3

809331 : 60780

$\overline{\mathrm{C}}$	$\overline{\mathrm{X}}$	$\overline{\mathrm{I}}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
2		1	5	3	1
1	8				
				1	3

809331 : 60780

$\bar{c}$	$\bar{x}$	$\bar{\imath}$	c	x	i
	6		7	8	
8		9	3	3	1
	2	1	5	3	1
		2	1		
				1	3

809331 : 60780

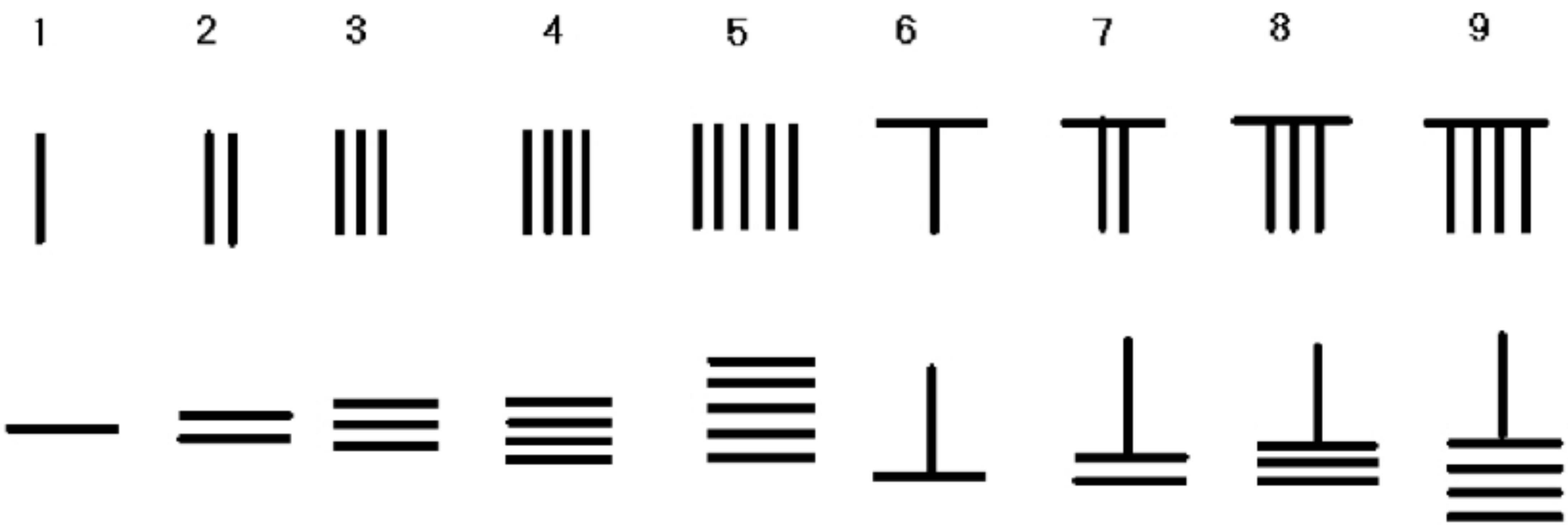
$\overline{C}$	$\overline{X}$	$\overline{I}$	C	X	I
	6		7	8	
8		9	3	3	1
	1	9	4	3	1
			2	4	
				1	3

809331 : 60780

$\overline{c}$	$\overline{x}$	$\overline{i}$	c	x	i
	6		7	8	
8		9	3	3	1
	1	**9**	**1**	**9**	**1**
				1	**3**

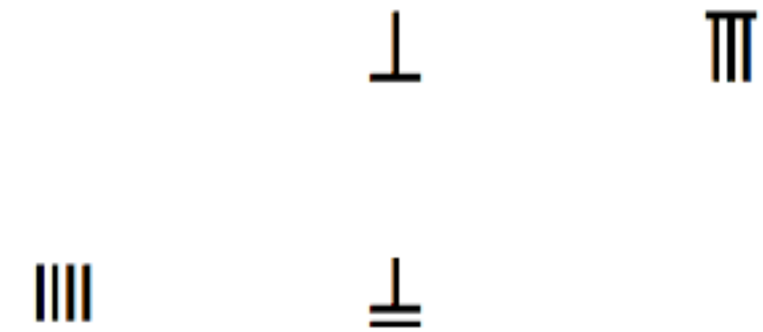
CHINA

Counting Rod System

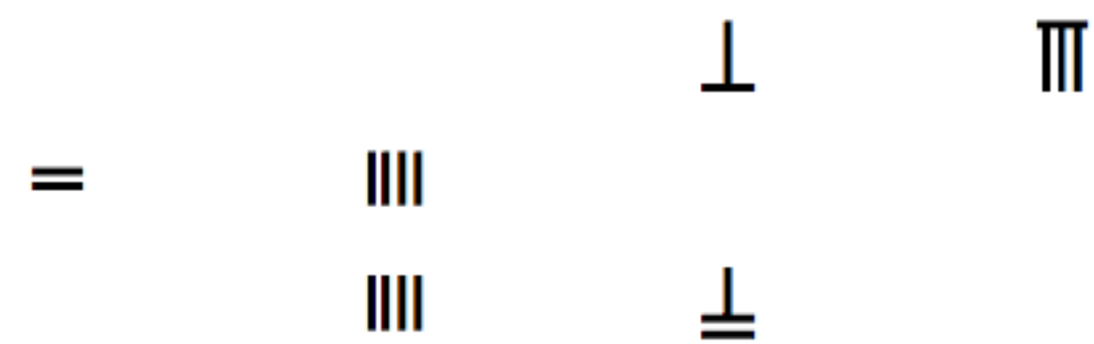


Multiplication with Counting Rods

1. Set up the two factors, in this case 68 and 47, such that the ones digit of the bottom is aligned with the tens digit of the top. Leave room in middle for calculations.

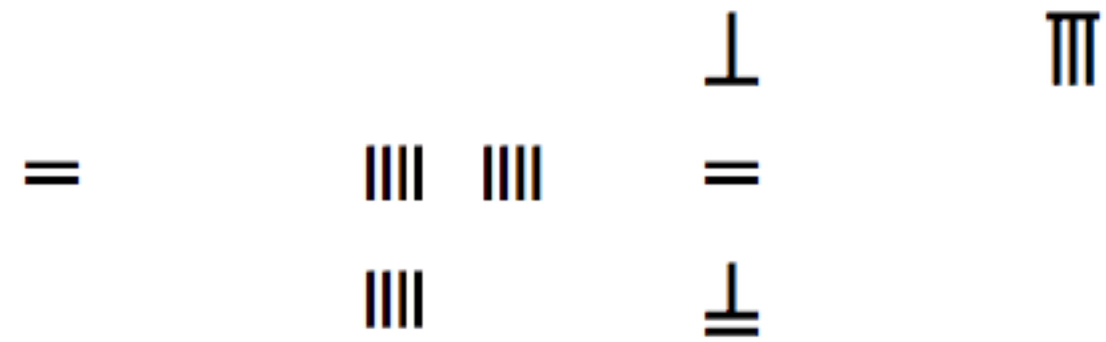


2. Multiply tens digit of top by tens digit of bottom, place in middle with ones over the bottom's tens digit.

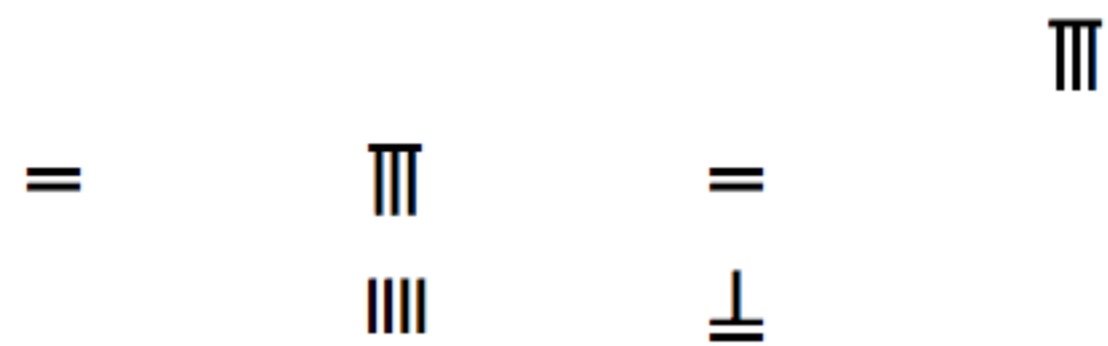


Multiplication with Counting Rods

3. Multiply one's digit on top by tens digit on bottom, and add to middle.

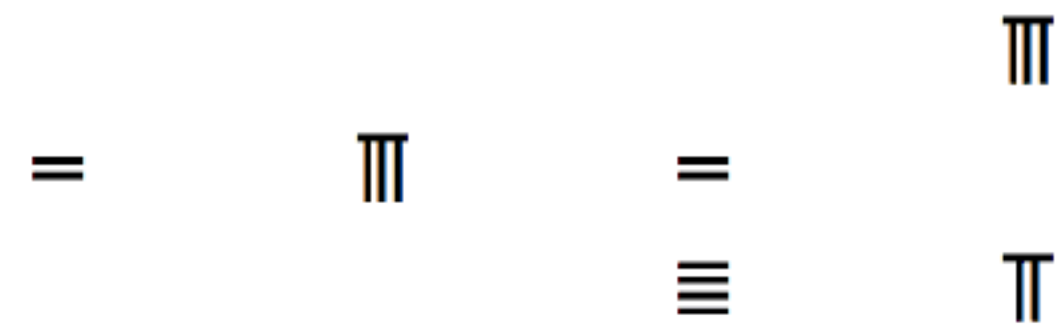


4. Since you've used the tens digit on top, erase it.

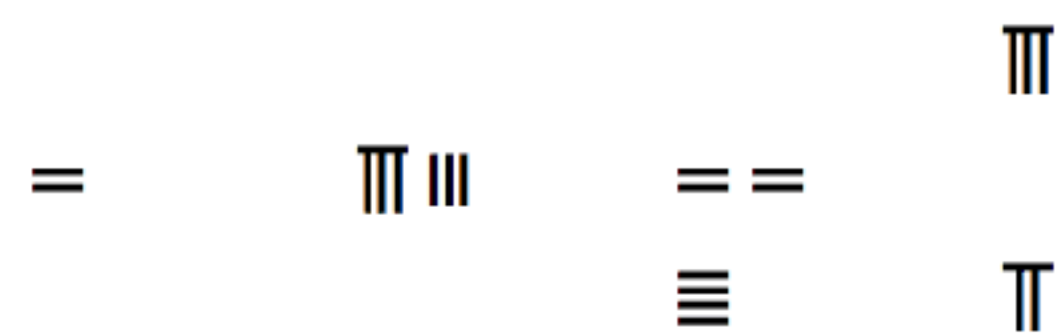


Multiplication with Counting Rods

5. Move bottom digits to the right one space.



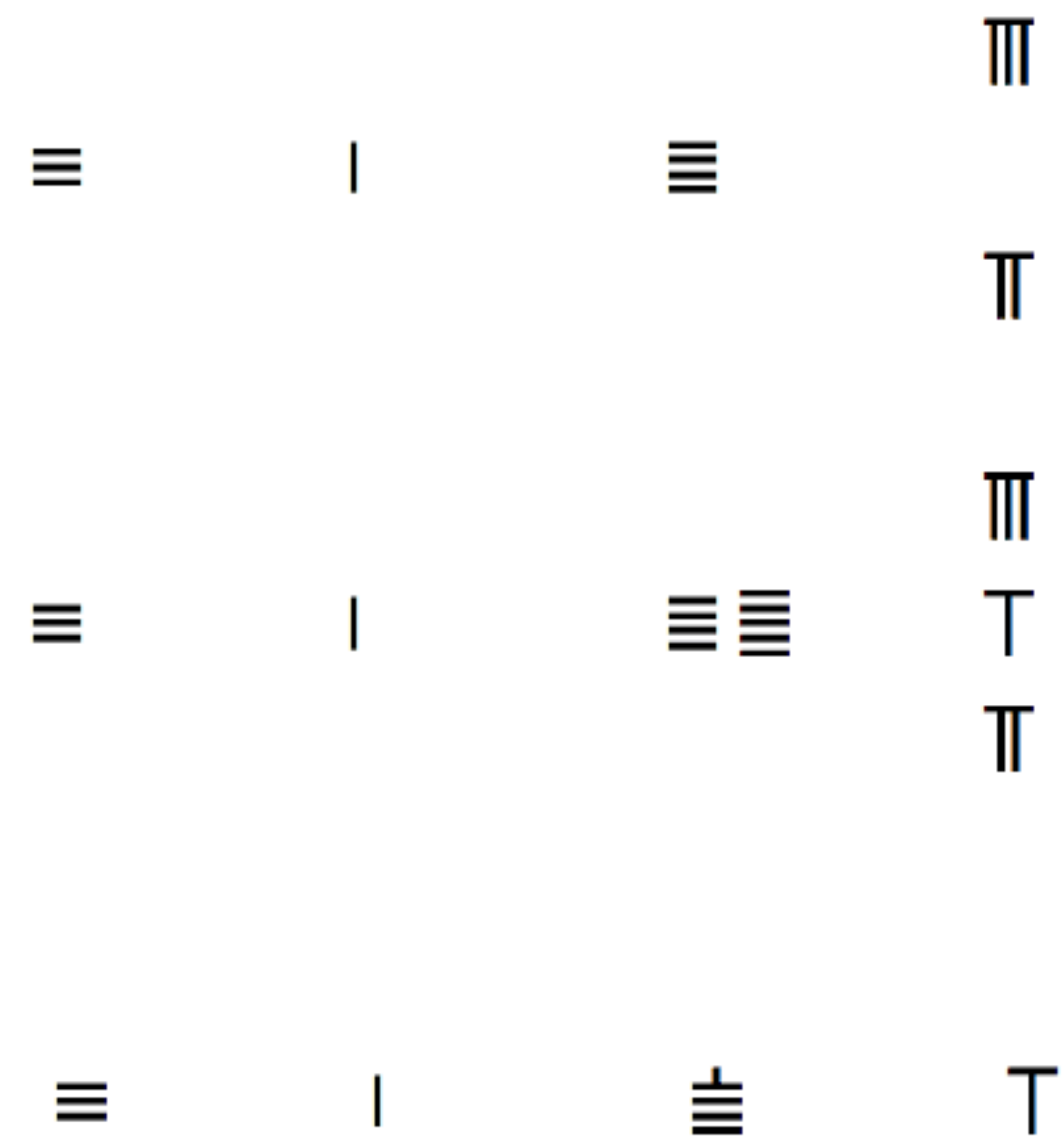
6. Multiply tens digit on bottom by ones digit of top; place ones digit of answer above tens on bottom, and



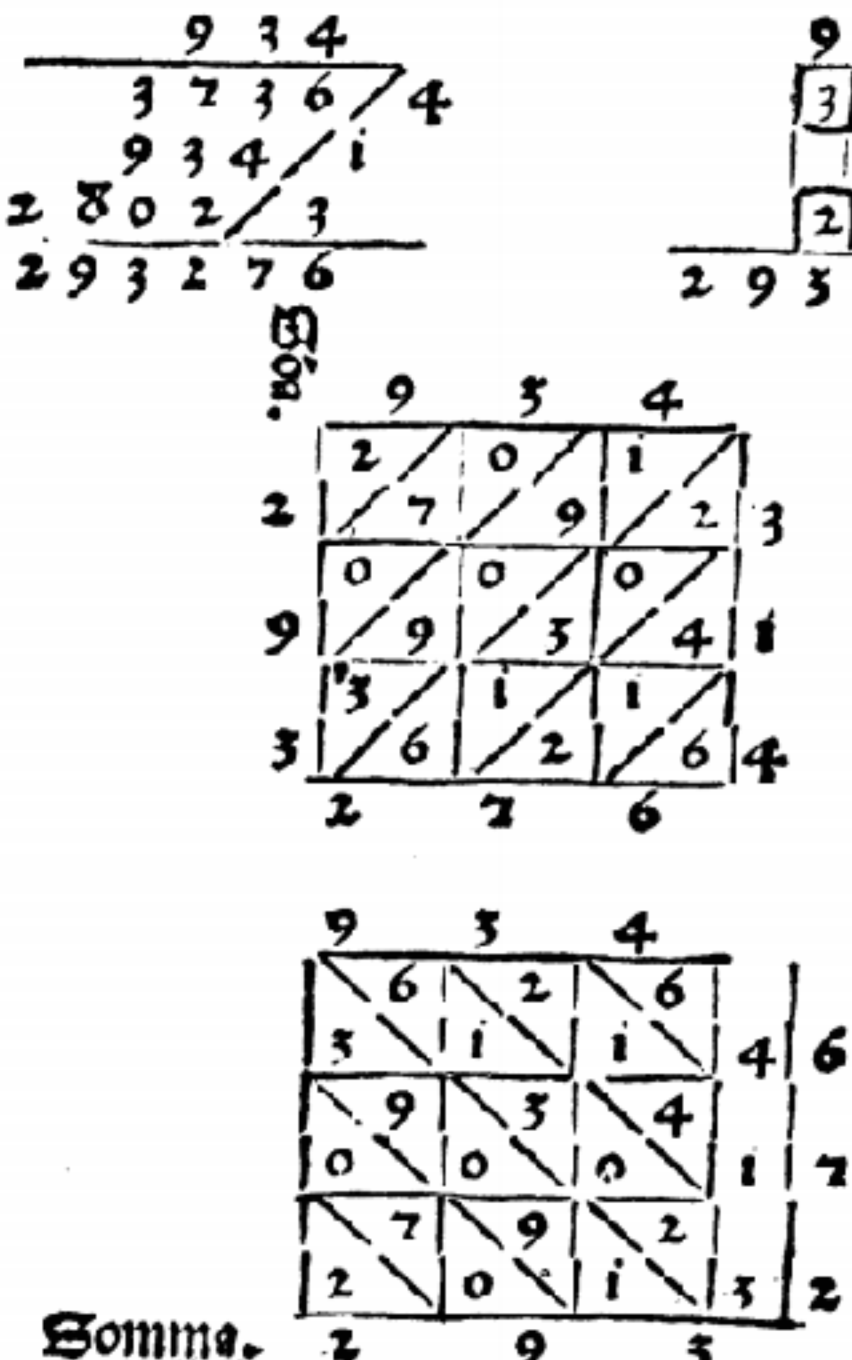
7. Combine.

Multiplication with Counting Rods

8. Erase the tens digit on bottom because you're done with it.
9. Finally, multiply the two units digits, and add them to the middle.
10. Combine, and erase the units digits on top and bottom.

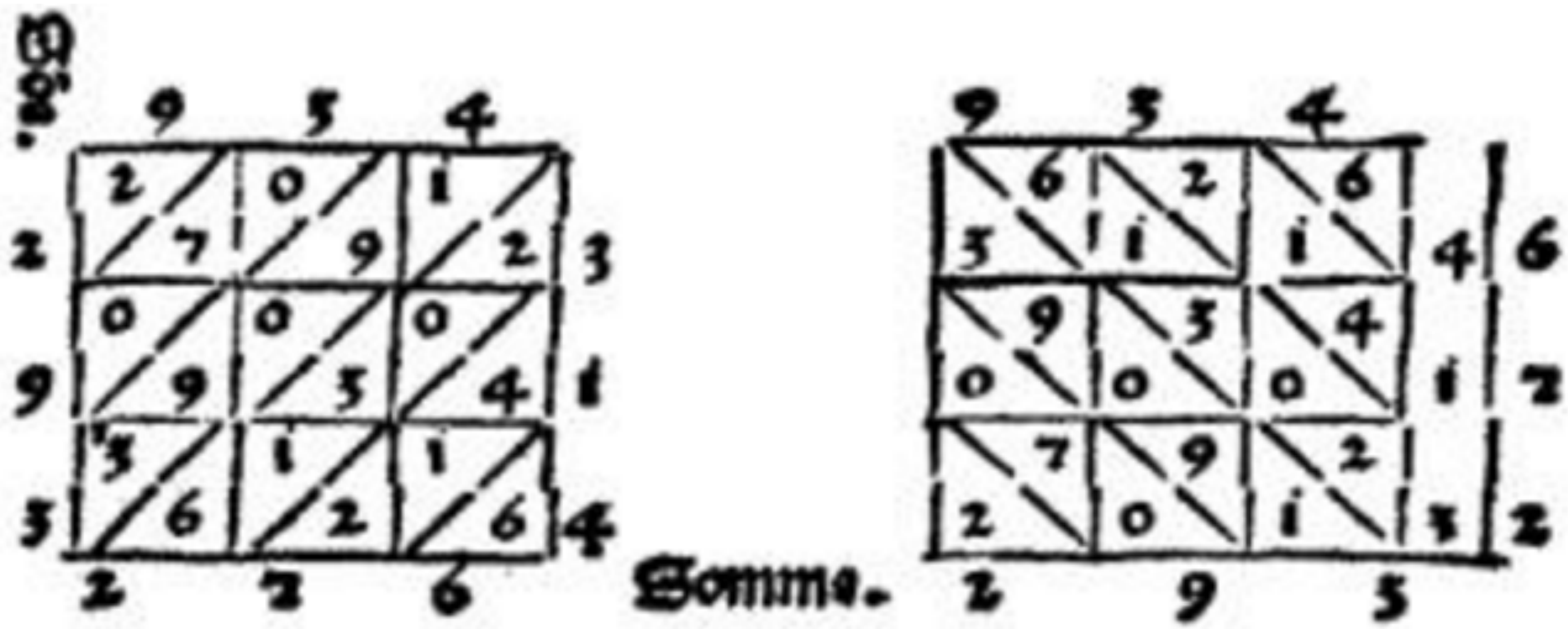


Voglio pero che tu intendi che sono altri modi de moltiplicare per scachiero: li quali lassaro al studio tuo: mettendo li exempli soi solamente in forma. come porai vedere qui sotto
Or togli de fare lo preditto scachiero. 3oe. 3 1 4. fia. 9 3 4. e nota de farlo per li quatro modi come qui va sotto.

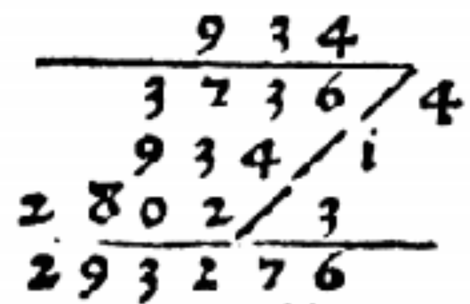


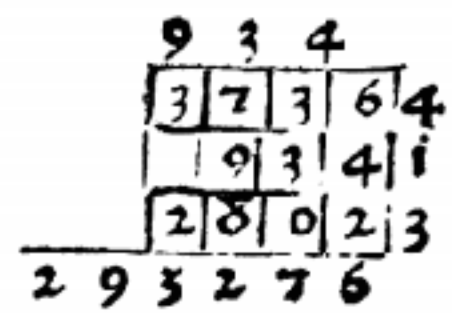
Aritmética de Treviso, 1478

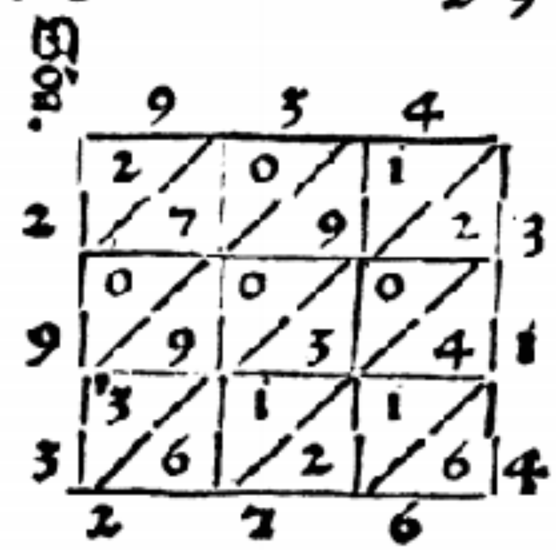

1 2 3 4 5 6 7 8 9
Cod. Vigilius (976 C.E.)
Vatican MS. lat. 3101 (1077)
British Mus. Add. 17808 (XII)
General forms, c. XIII
General forms, c. XIV
General forms, c. XV
General forms, c. XVI

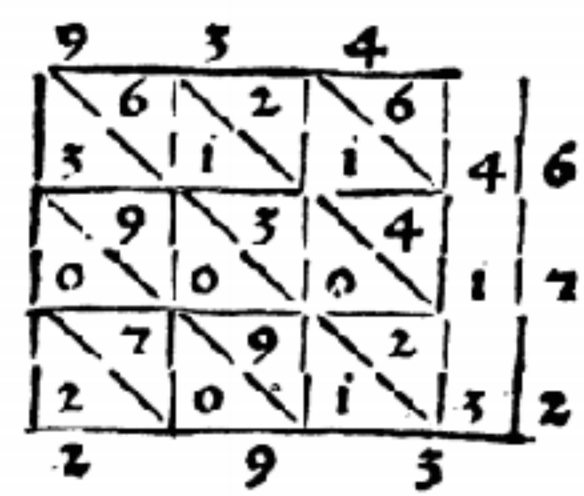

Somme.

Uoglio pero che tu intendi che ſono altri modi de moltiplicare per ſcachiero: li quali laſſaro al ſtudio tuo: mettendo li exempli ſoi ſolamente in forma. come porai vedere qui ſotto
Or togli de ſare lo preditto ſcachiero. zoe. 3 1 4. fia. 9 3 4. e nota de ſarlo per li quatro modi come qui va ſotto.









Somma.

1916
816

2732

1916
816

2732 | 5

45318
2732

The sum 48050

	45318
	2732
The sum	48050 | 8

so on. If we then wish to subtract a number of some order from another we shall find that the number from which we are to subtract is equal to it, or greater, or less. If it is equal, as in the case of 8 and 8, the remainder is 0, which 0 we write underneath in the proper column. If the number from which we subtract is greater, then take away the number of units in the smaller number, writing the remainder below, as in the case of 3 from 9, where the remainder is 6. If, however, the number is less, since we cannot take a greater number from a lesser one, take the complement of the larger number with respect to 10, and add this to the other, but with this condition: that you add one to the next left-hand figure. And be very careful that whenever you take a larger number from a smaller, using the complement, you remember the condition above mentioned. Take, now, an example:

Subtract 348 from 452, arranging the work thus:

$$\begin{array}{lr} & 452 \\ & \underline{348} \\ \textit{The remainder} & 104 \end{array}$$

First we have to take a greater number from a less, and
then an equal from an equal, and third, a less from a greater. We proceed as follows: we cannot take 8 from 2, but 2 is the complement of 8 with respect to 10, and this we add to the other 2 which is above the 8, thus: 2 and 2 make 4, which we write beneath the 8 for the remainder. There is, however, this condition, that to the figure following the 8 (i.e., 4), we add 1, making it 5. Then 5 from 5, which is an equal, leaves 0, which 0 we write beneath. Then 3 from 4, which is a less from a greater, is 1, which 1 we write under the 3, so that the remainder is 104.

Let us now consider a third example, arranging the work as follows. Let us subtract 2732 from 48050, thus:

	48050
	2732
The remainder	45318

Now begin to subtract in this way: It is impossible to subtract 2 from 0, so we take 8, the complement of 2, and write this 8 beneath the 2 for a remainder, and carry 1 to the 3, making 4. Then 4 from 5 leaves 1, which 1 we write beneath the 3. Since we cannot take 7 from 0, we take 3, the complement, and write it beneath the 7, and carry 1 to the 2, minus 3. This 3 we take from 8, leaving 5, and this we write underneath the 2. In the vacant place we take 0 from 4, leaving 4, and this we write below the vacant place. The result is then 45318. Now prove that this is correct according to the method which I have given.

Having now explained the third operation, namely that of subtraction, the reader should give attention to the fourth, namely that of multiplication. To understand this it is necessary to know that to multiply one number by itself or by another is to find from two given numbers a third number which contains one of these numbers as many times as there are units in the other. For example, 2 times 4 are 8, and 8 contains 4 as many times as there are units in 2, so that 8 contains 4 in itself twice. Also the 8 contains 2 as many times as there are units in 4, and 4 has in itself four units, so that 8 contains 2 four times. It should be well understood that in multiplication two numbers are necessary, namely the multiplying number and the number multiplied, and also the multiplying number may itself be the number multiplied, and vice versa, the result being the same in both cases. Nevertheless usage and practice demand that the smaller number shall be taken as the

Suppose you are asked to find the product of 8 times 9279, proceed as follows: Multiply 8 times 9, making 72; write 2 and carry 7. Then 7 times 8 are 56, and 7 which was reserved makes 63; write 3 and carry 6. Then 2 times 8 are 16, and 6 reserved are 22; write 2 and carry 2. Then multiply 8 times 9, making 72, and 2 reserved makes 74; write first 4 and then 7 to the left, and the total result is 74232.

If you wish to prove this result by casting out 9s, add all the digits of the multiplier and of the number multiplied, but neglect every 9 or 0 which you find, since the excess in every 9 is 0, and that in every 0 is 0, so subtract 9 whenever you find it, retaining the rest. So if you would prove the above multiplication, arrange the work thus:

$$\begin{array}{r|l} 9\,2\,7\,9 & 0 \\ 8 & 8 \\ \hline 7\,4\,2\,3\,2 & 0 \end{array}$$

There is, however, a better proof for this form of multiplication. If you divide 74232 by 8 there will be found for a quotient 9279; or if you divide 74232 by 9279, the quotient will be 8. But this method of proof I cannot give you until you understand division. Consequently division proves multiplication and multiplication proves division. This method of proof will be fully discussed in teaching the operation of division, in the second example in that chapter.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ 12 & 3 \\ \hline 156 & 3 \end{array}$$

Then the excesses of the numbers are found as follows: for 13 we have 1 and 3 are 4, which we write after the bar; then for 12 we have 1 and 2 are 3, which we also write after this number, separated by the bar. Then we multiply one excess by the other, thus: 3 times 4 are 12; subtract 9 and 3 remains. So the principal excess is 3, which we place after 156, separated by the bar. Now see if the excess of 156 is also 3, thus: 1 and 5 are 6, and 6 are 12; subtract 9 and 3 remains, and thus we see that the result is correct. In the same way we can prove all other examples in cross multiplication.

If you are required to find 12 times 13, do as follows: Multiply 2 times 3, making 6, and write this 6 under the units, carrying nothing because there is no other figure. Then multiply crosswise, thus: 1 times 3 is 3, and 1 times 2 is 2; add 2 and 3, making 5, and write this 5 under the tens. Then multiply 1 time 1, making 1, writing this 1 at the left of the 5, and the result is 156.

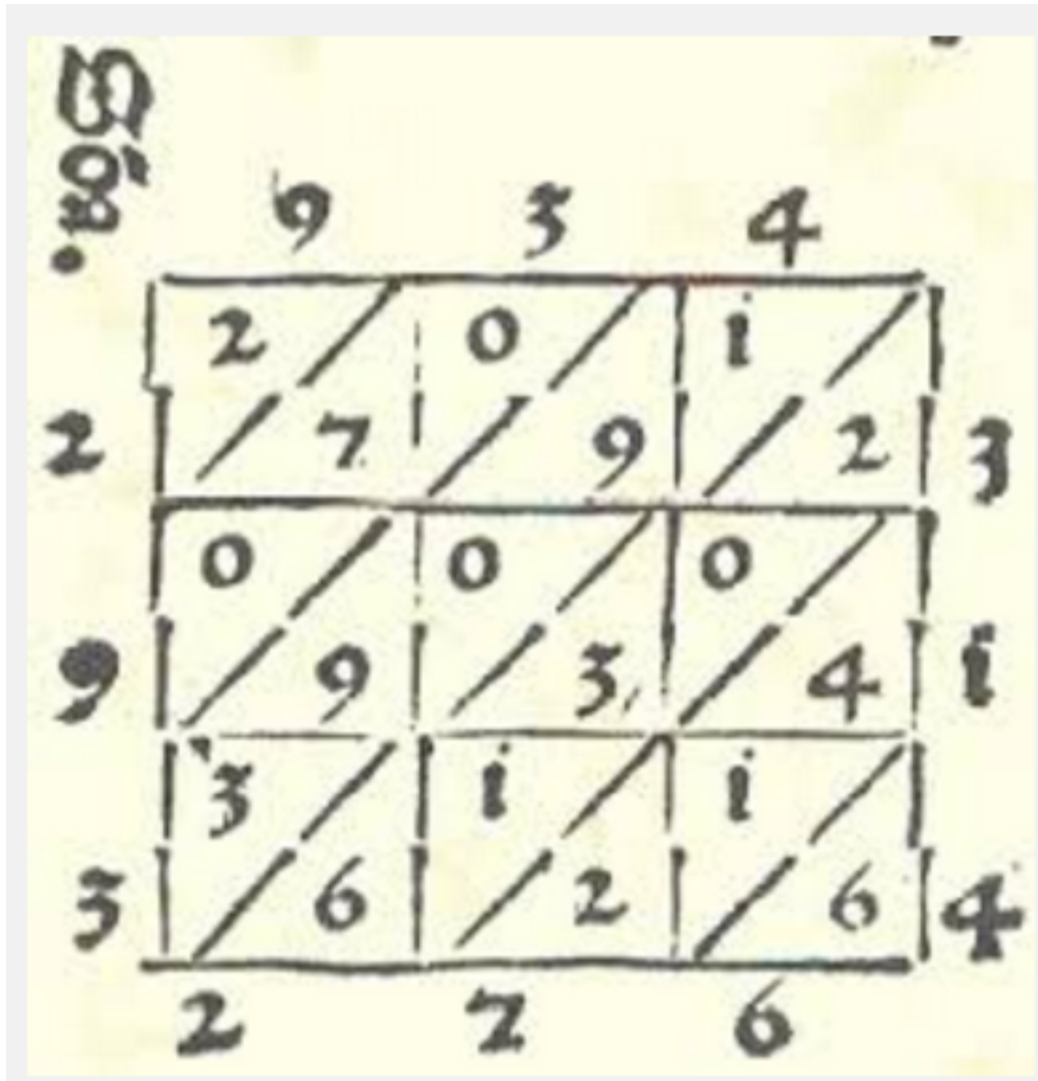
If you are asked how much is 48 times 56, proceed as follows: multiply 6 times 8, making 48; write 8 under the units and reserve 4. Then multiply crosswise, thus: 4 times 6 are 24, and 5 times 8 are 40; add 24 and 40, giving 64, and add the 4 which was carried, making 68; write 8 and carry 6. Now multiply the tens by the tens, thus: 4 times 5 are 20, and 6 to carry are 26, which is written in its proper place. The result is therefore 2688. We then say that 48 times 56 are 2688. In this same way you can perform all other cross multiplications.

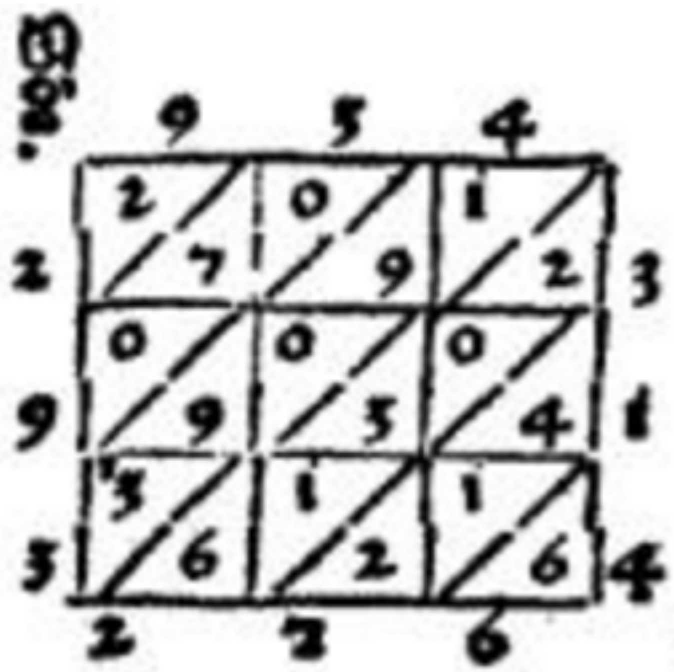
If you wish to prove this result, arrange the work as follows:

$$\begin{array}{r|l} 56 & 2 \\ 48 & 3 \\ \hline 2688 & 6 \end{array}$$

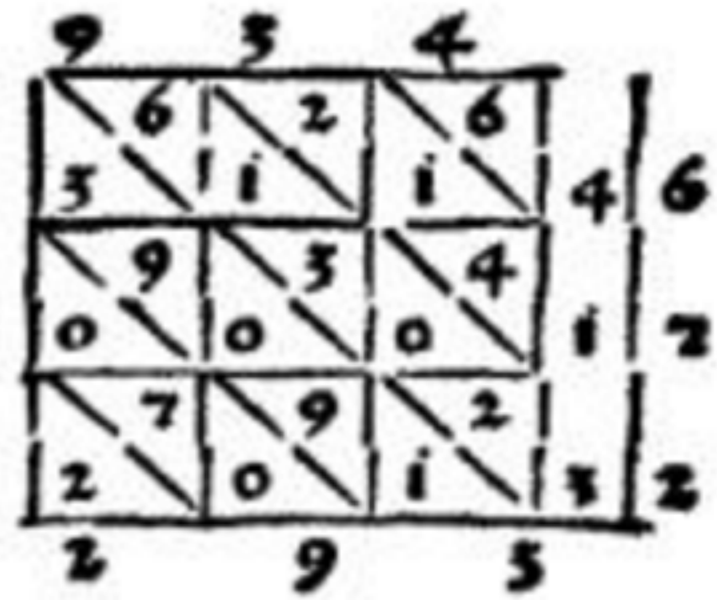
exs

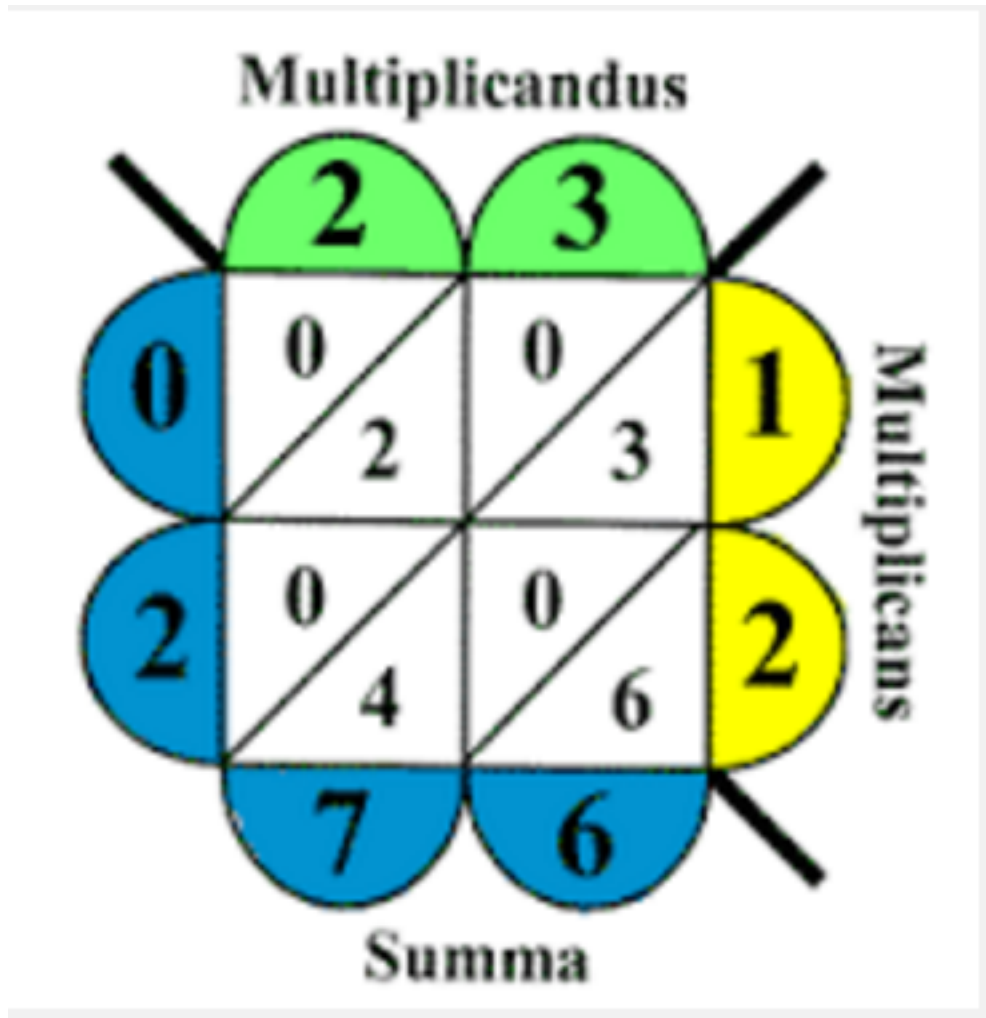
			9	3	4	7
			3	1	4	8
		3	7	3	6	
		9	3	4		
2	8	0	2			
2	9	3	2	7	6	2


9 3 4
2 9 3
3 1 4
2 7 6

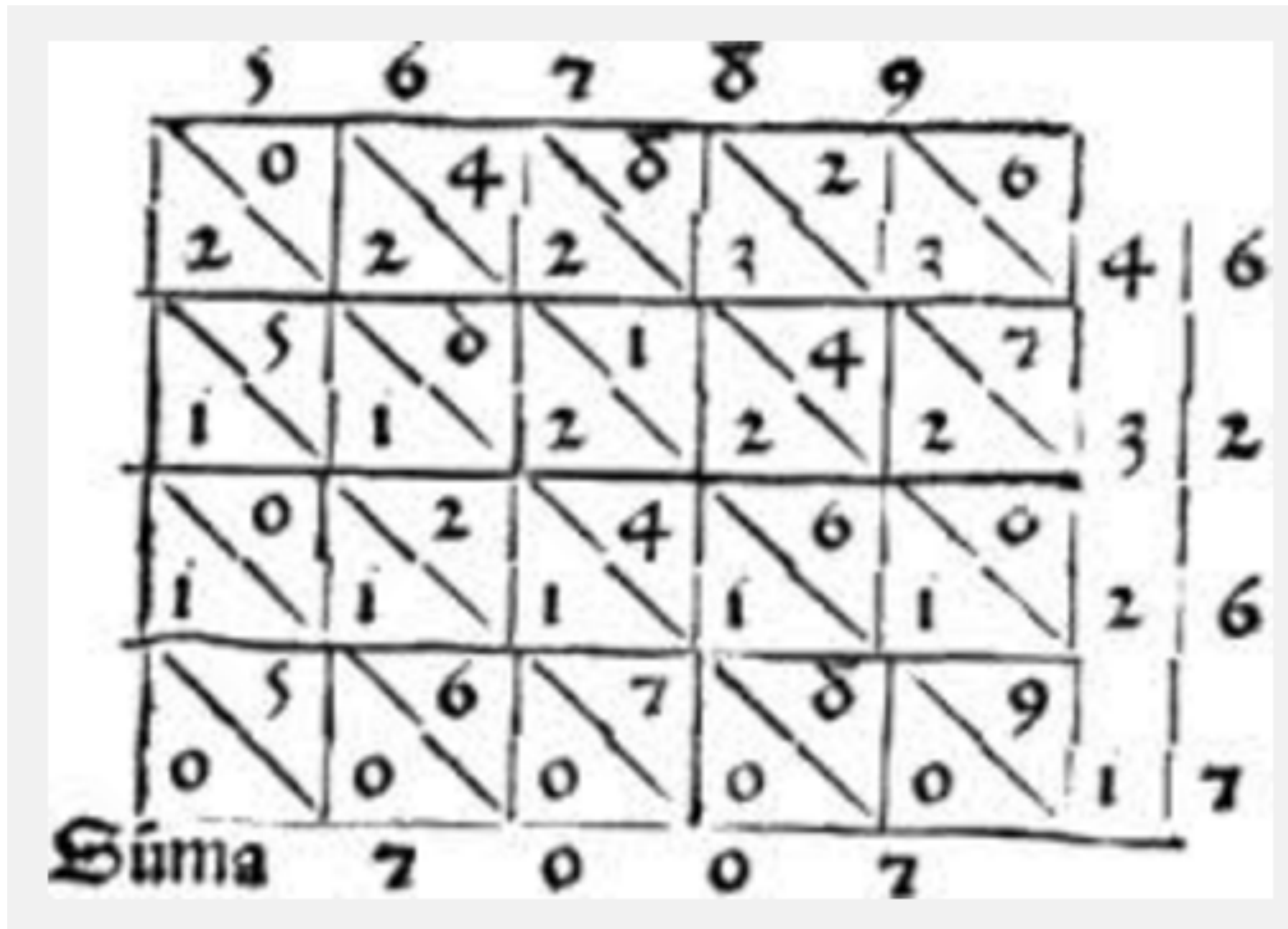

9 5 4
2 0 1
2 7 9 2 3
0 0 0
9 9 5 4 1
5 1 1
5 6 2 6 4
2 2 6

Somme.


9 3 4
6 2 6
3 1 1 4 6
9 3 4
0 0 0 1 2
7 9 2
2 0 1 3 2
2 9 5

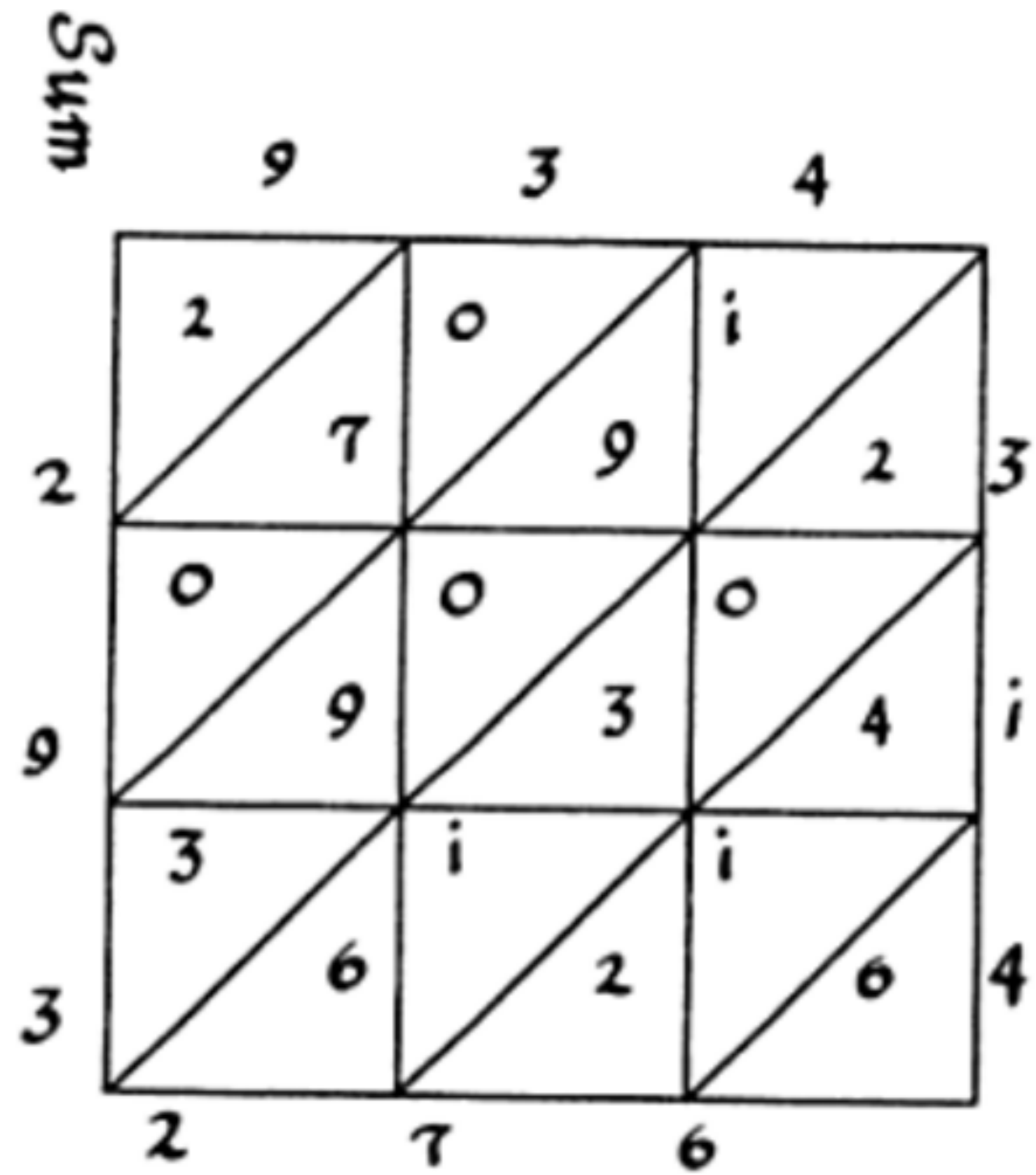


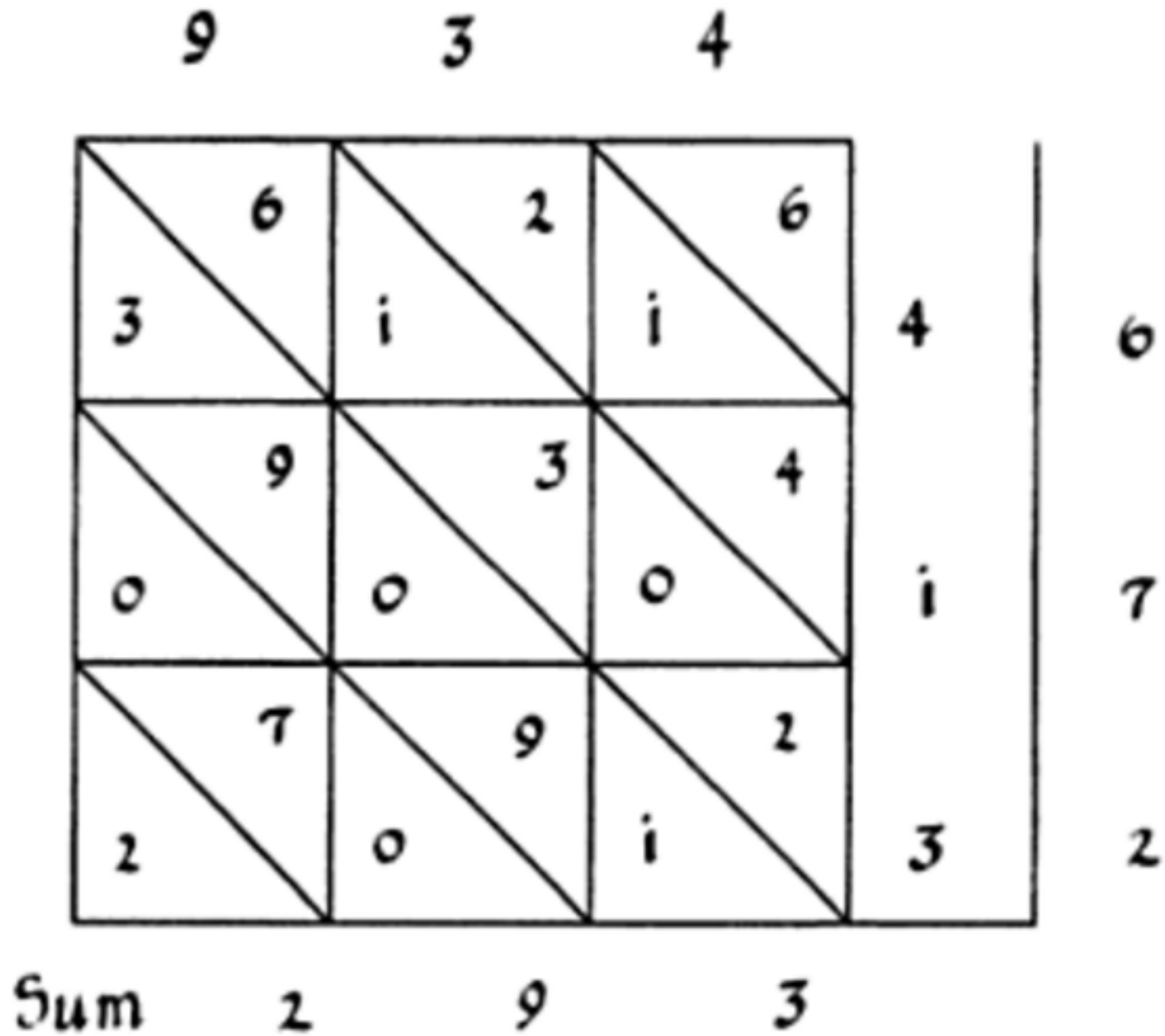
Multiplicandus
2
3
0
1
2
2
0
2
0
3
0
4
0
6
7
6
Multiplicans
Summa


5 6 7 8 9
0 4 8 2 6
2 2 2 3 3
5 8 1 4 7
1 1 2 2 2
0 2 4 6 0
1 1 1 1 1
5 6 7 8 9
0 0 0 0 0
4 3 2 1
6 2 6 7
Súma 7 0 0 7

```
      9 3 4
    3 7 3 6   4
    9 3 4   i
2 8 0 2   3
2 9 3 2 7 6
```

		9	3	4		
		3	7	3	6	4
			9	3	4	i
		2	8	0	2	3
2	9	3	2	7	6	

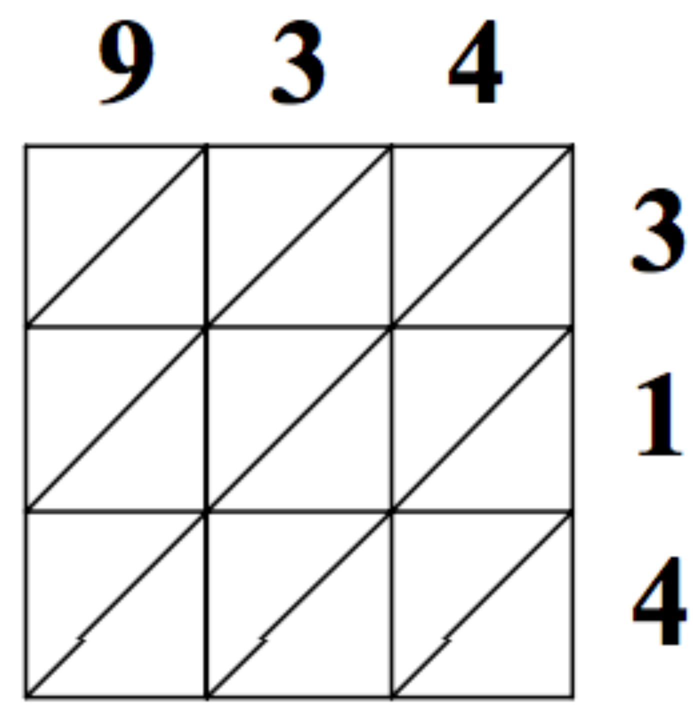

Sum
9 3 4
2 7 | 0 9 | i 2 | 3
0 9 | 0 3 | 0 4 | i
3 6 | i 2 | i 6 | 4
2 9 3
2 7 6

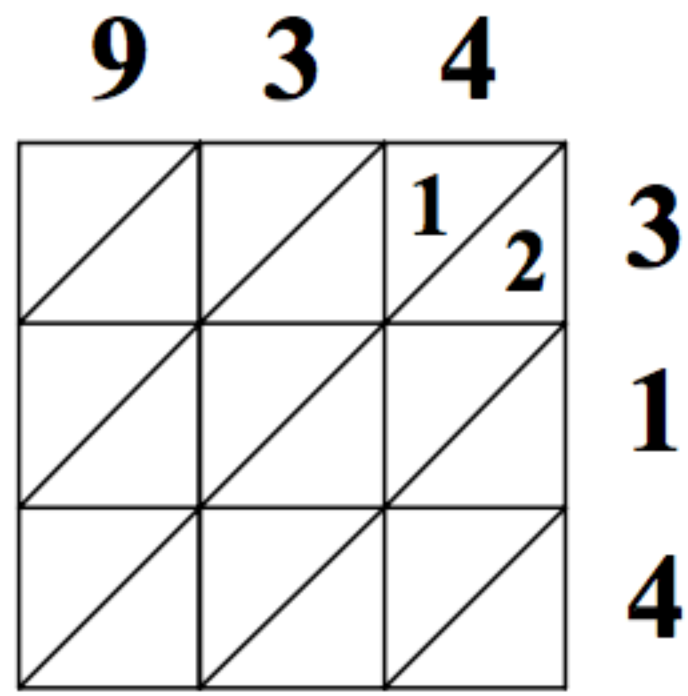

9 3 4
6 2 6
3 i i 4 6
9 3 4
0 0 0 i 7
7 9 2
2 0 i 3 2
Sum 2 9 3

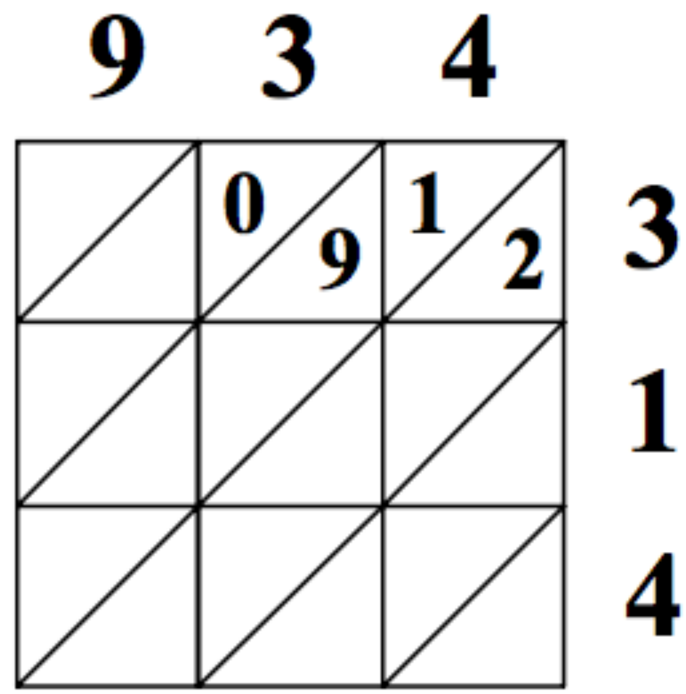
If you are asked how much is 1234 times 56789, proceed by the five methods below.

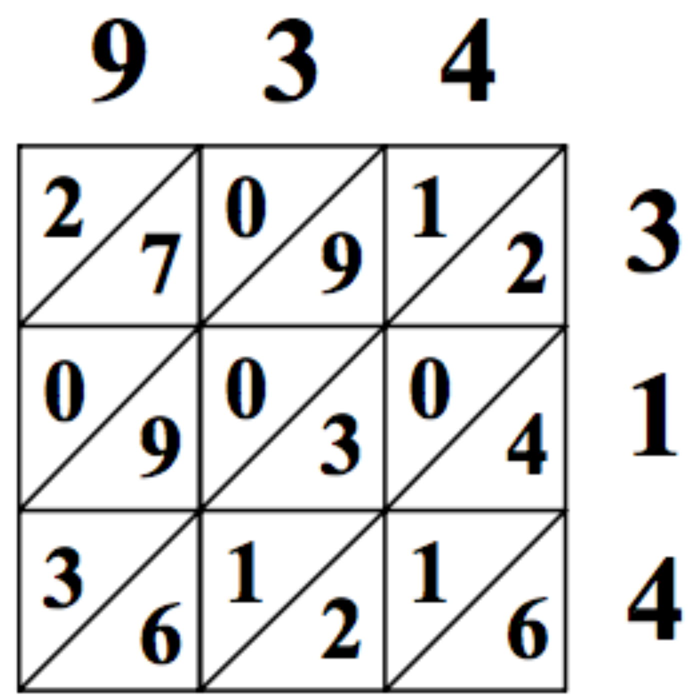
				5	6	7	8	9	
			2	2	7	1	5	6	4
		1	7	0	3	6	7		3
	1	1	3	5	7	8			2
	5	6	7	8	9				1
Sum	7	0	0	7	7	6	2	6	

Gelosia

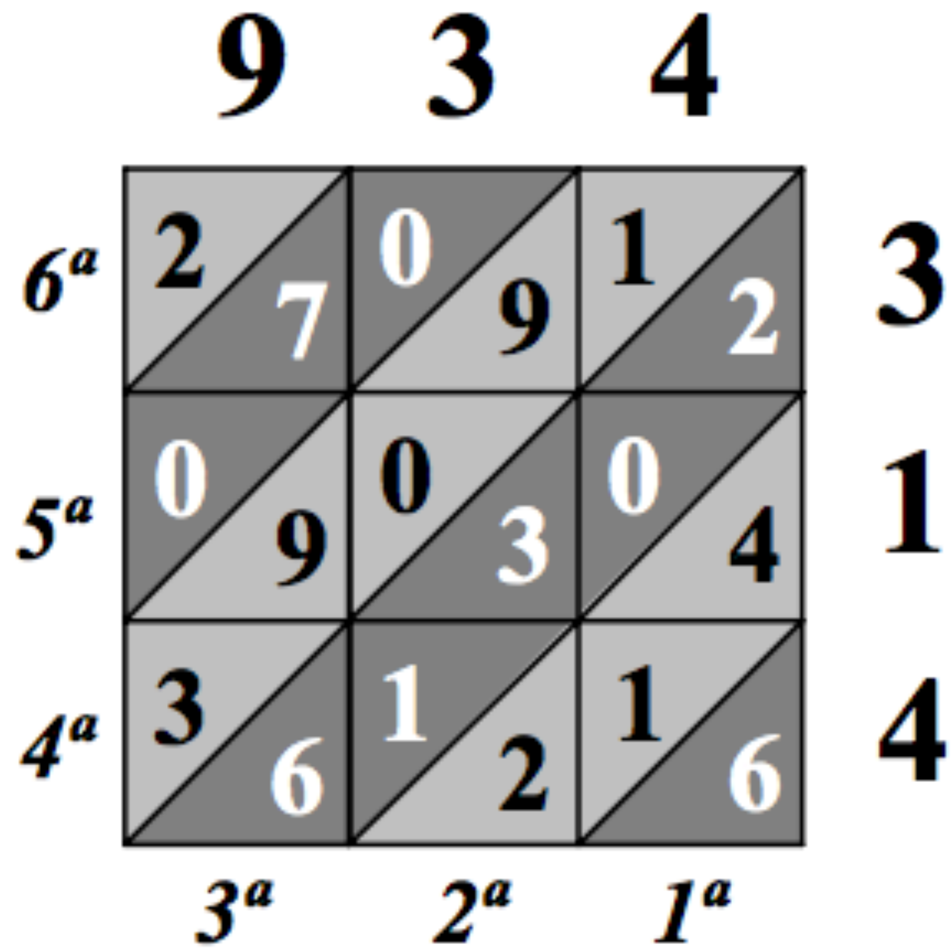

9 3 4
3
1
4

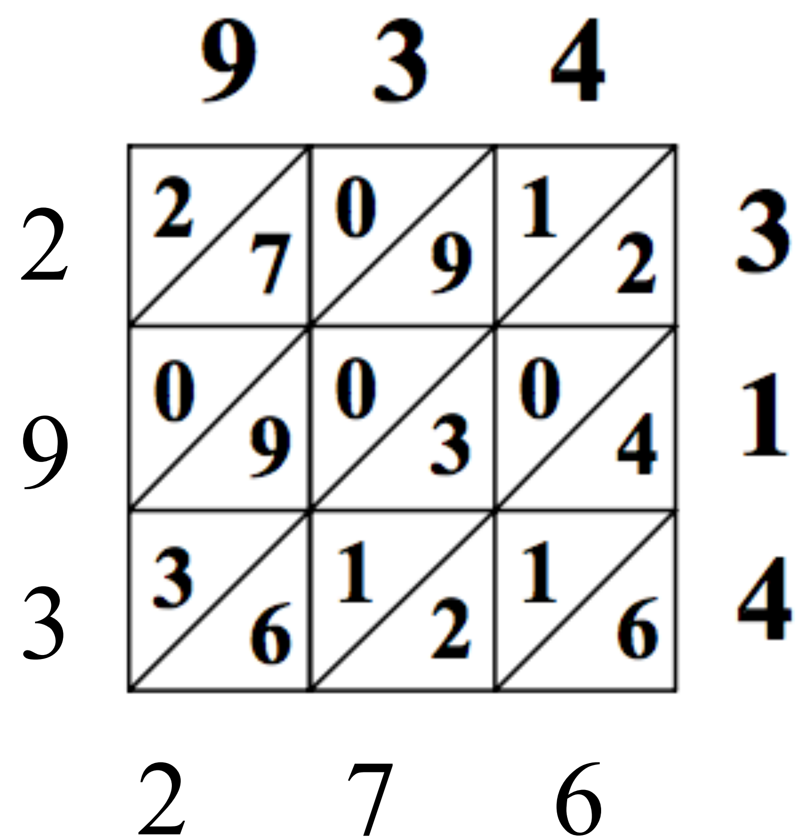

9 3 4
1
2
3
1
4


9 3 4
0
9
1
2
3
1
4



9 3 4
2 7 0 9 1 2 3
0 9 0 3 0 4 1
3 6 1 2 1 6 4


9 3 4
3
1
4
6ª
5ª
4ª
2 7 0 9 1 2
0 9 0 3 0 4
3 6 1 2 1 6
3ª 2ª 1ª

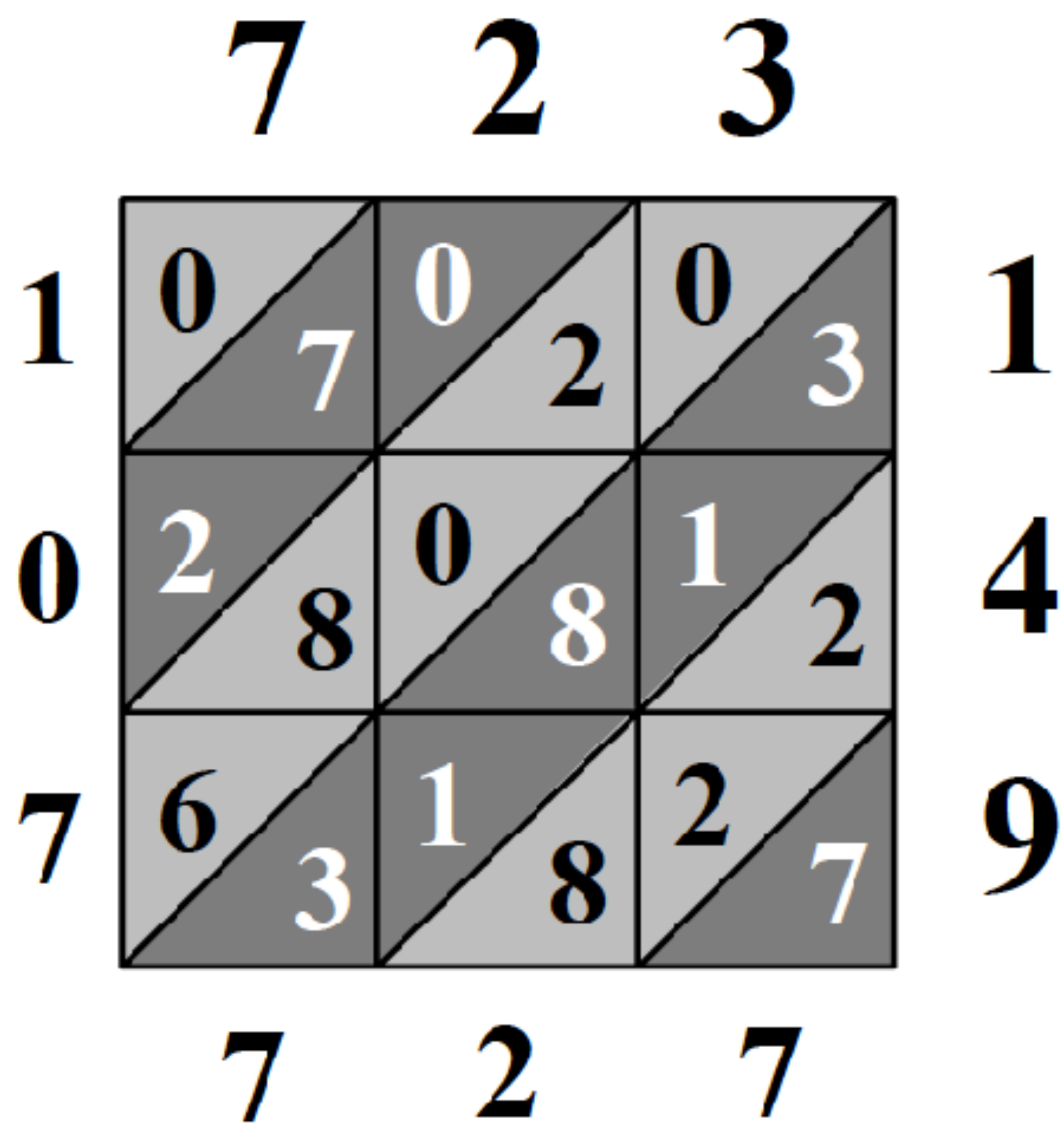


293276

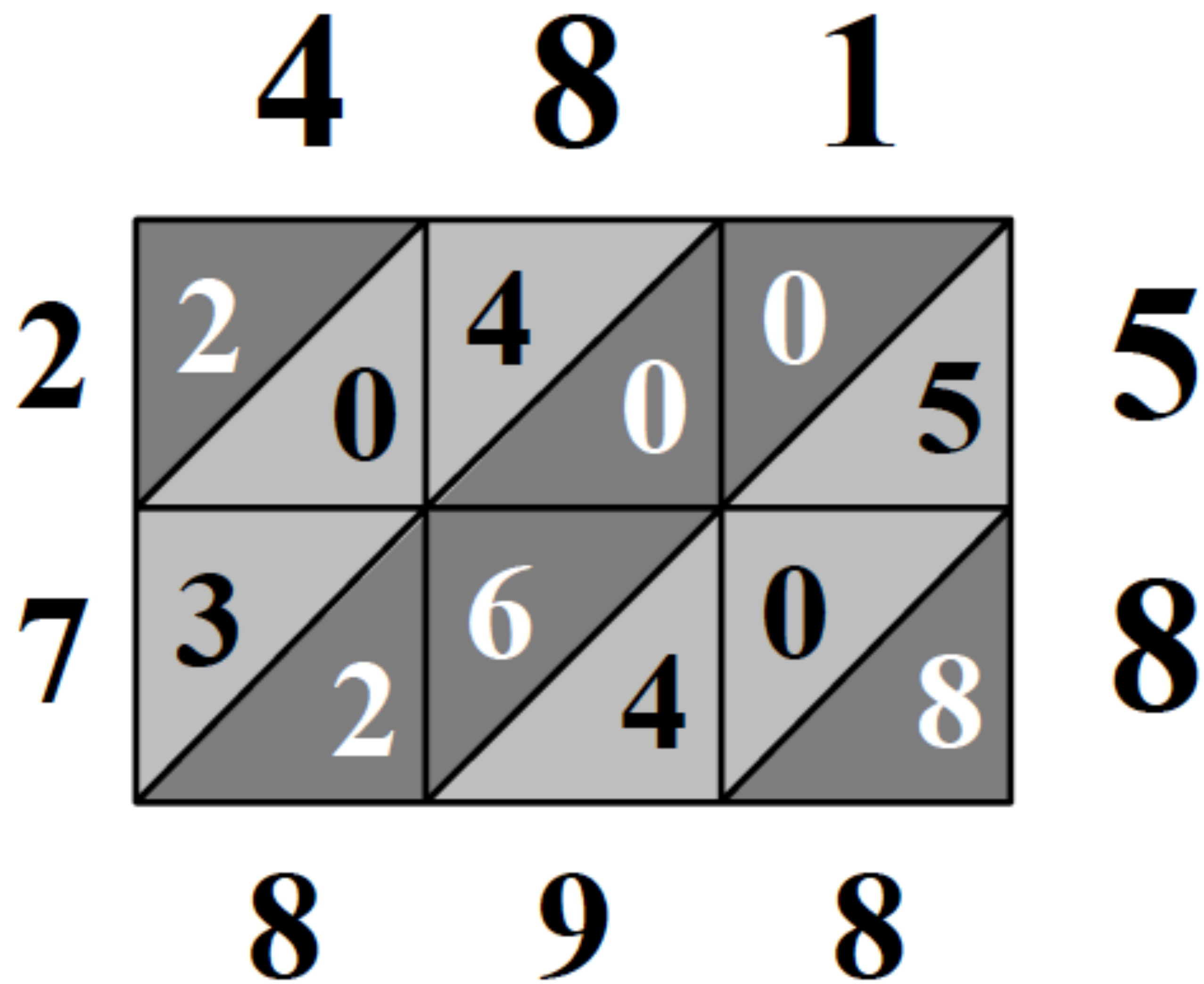
723×149

481×58

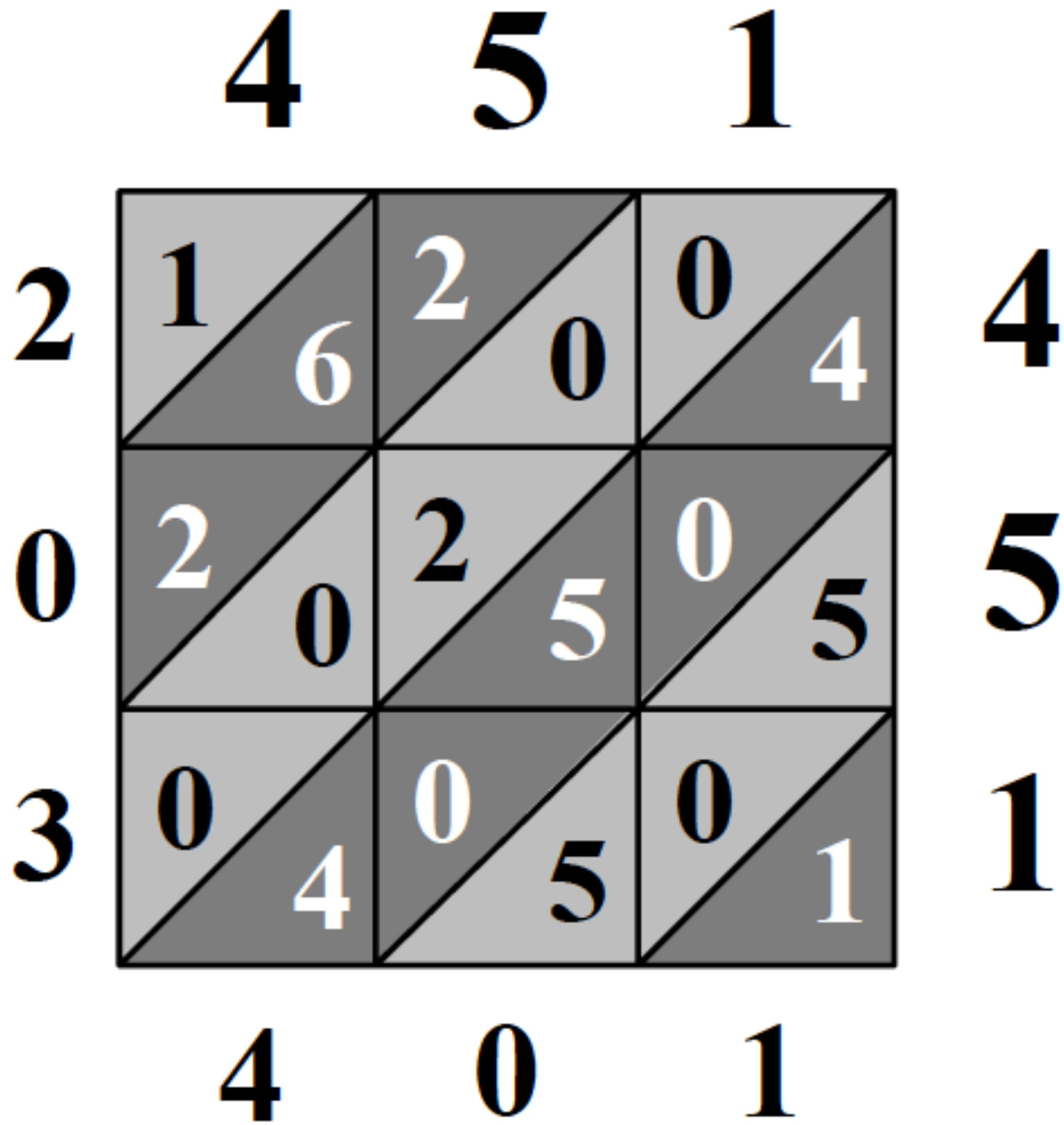
451^2



107727



27898

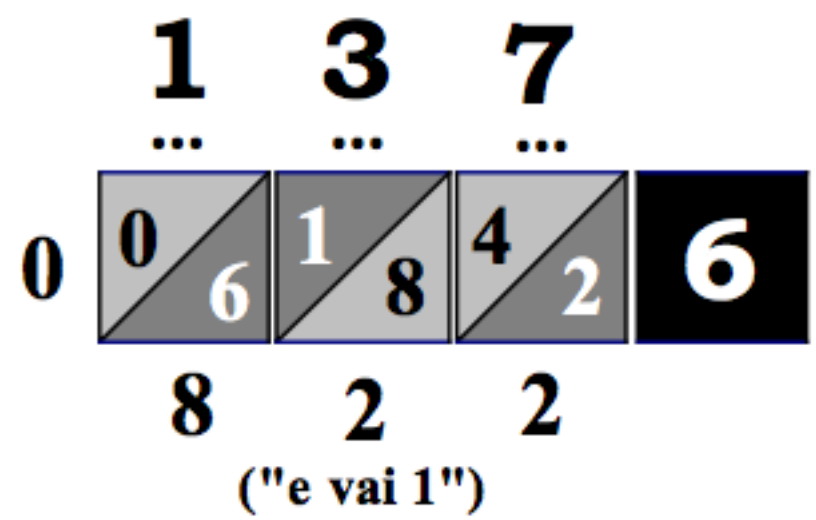


203401

Ossos de Neper

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0/0	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1
0/0	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	2
0/0	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	3
0/0	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	4
0/0	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	5
0/0	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	6
0/0	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	7
0/0	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	8
0/0	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	9

1	3	7	
0/1	0/3	0/7	1
0/2	0/6	1/4	2
0/3	0/9	2/1	3
0/4	1/2	2/8	4
0/5	1/5	3/5	5
0/6	1/8	4/2	6
0/7	2/1	4/9	7
0/8	2/4	5/6	8
0/9	2/7	6/3	9


1 3 7
0
0 6
1 8
4 2
6
8 2 2
("e vai 1")

354 x 628 = ?

3	5	4	
0/3	0/5	0/4	1
0/6	1/0	0/8	2
0/9	1/5	1/2	3
1/2	2/0	1/6	4
1/5	2/5	2/0	5
1/8	3/0	2/4	6
2/1	3/5	2/8	7
2/4	4/0	3/2	8
2/7	4/5	3/6	9

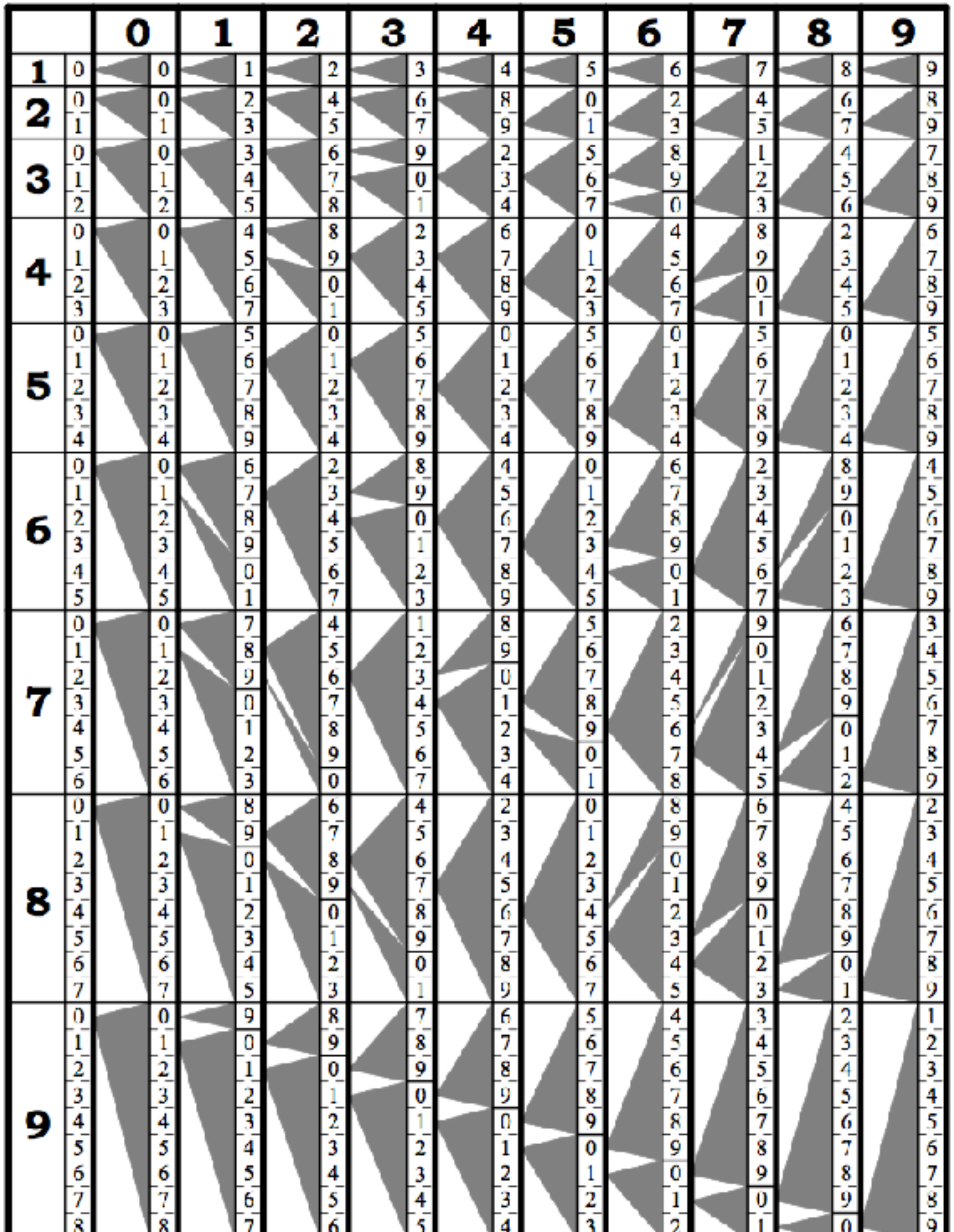
Produto realizado nas varas de Napier	*"Correcção"*	*Total*
$354 \times 8 = 2.832$	2.832×1	2.832
$354 \times 2 = 708$	708×10	7.080
$354 \times 6 = 2.124$	2.124×100	212.400
		222.312

305×9

127×83

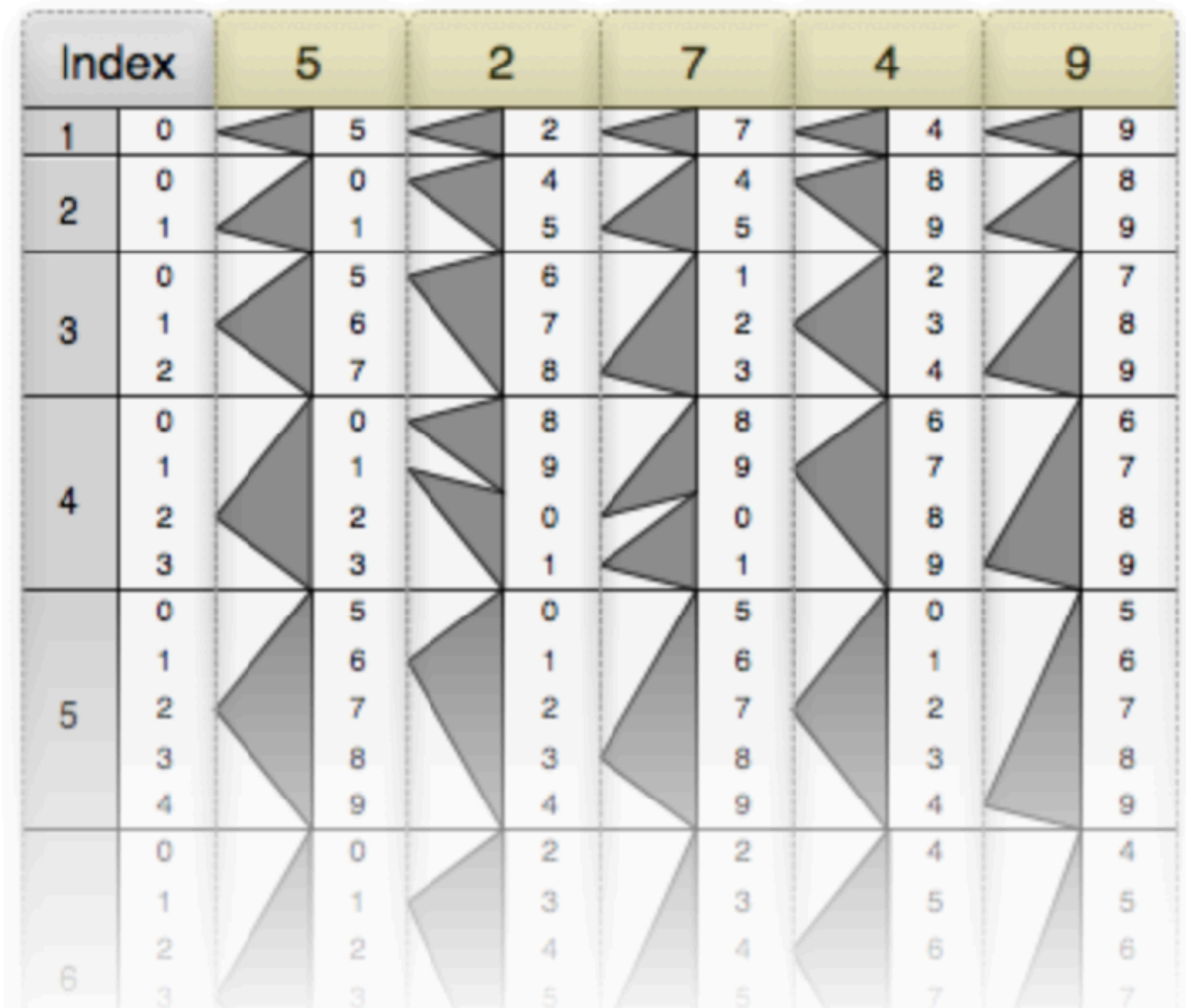
$5\,016 \times 125$

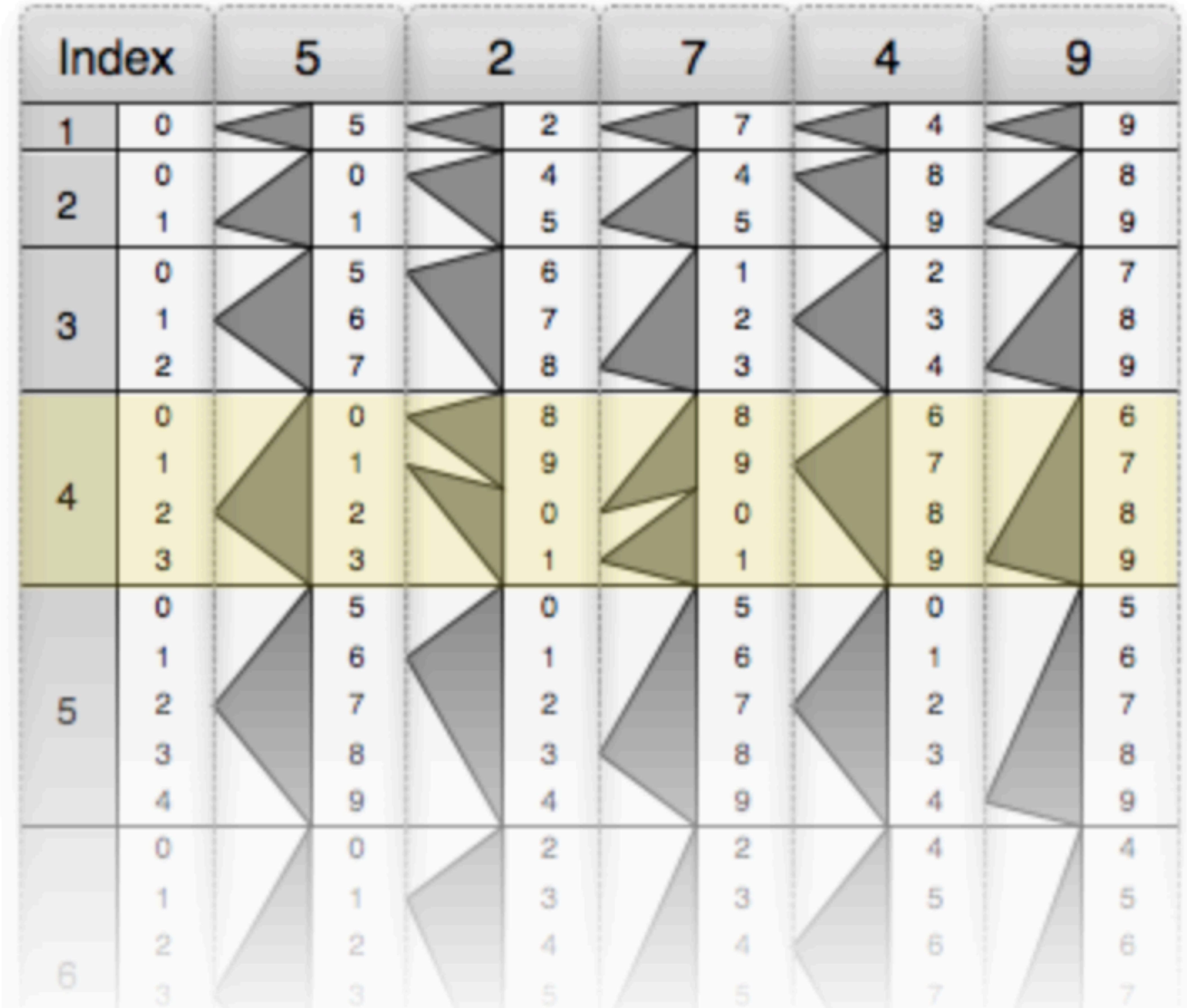
$4\,328 \times 56{,}7$

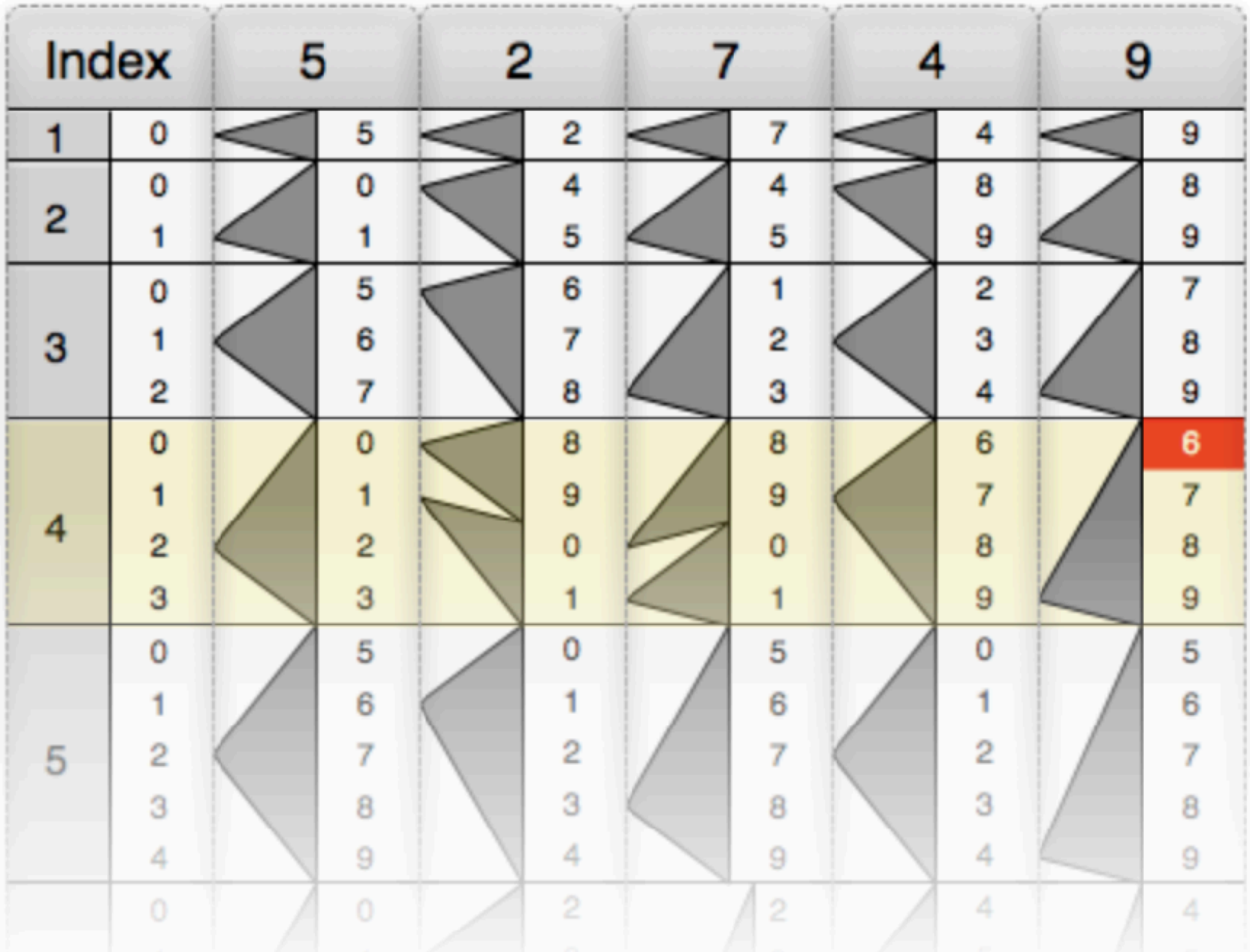


Varetas de Genaille-Lucas

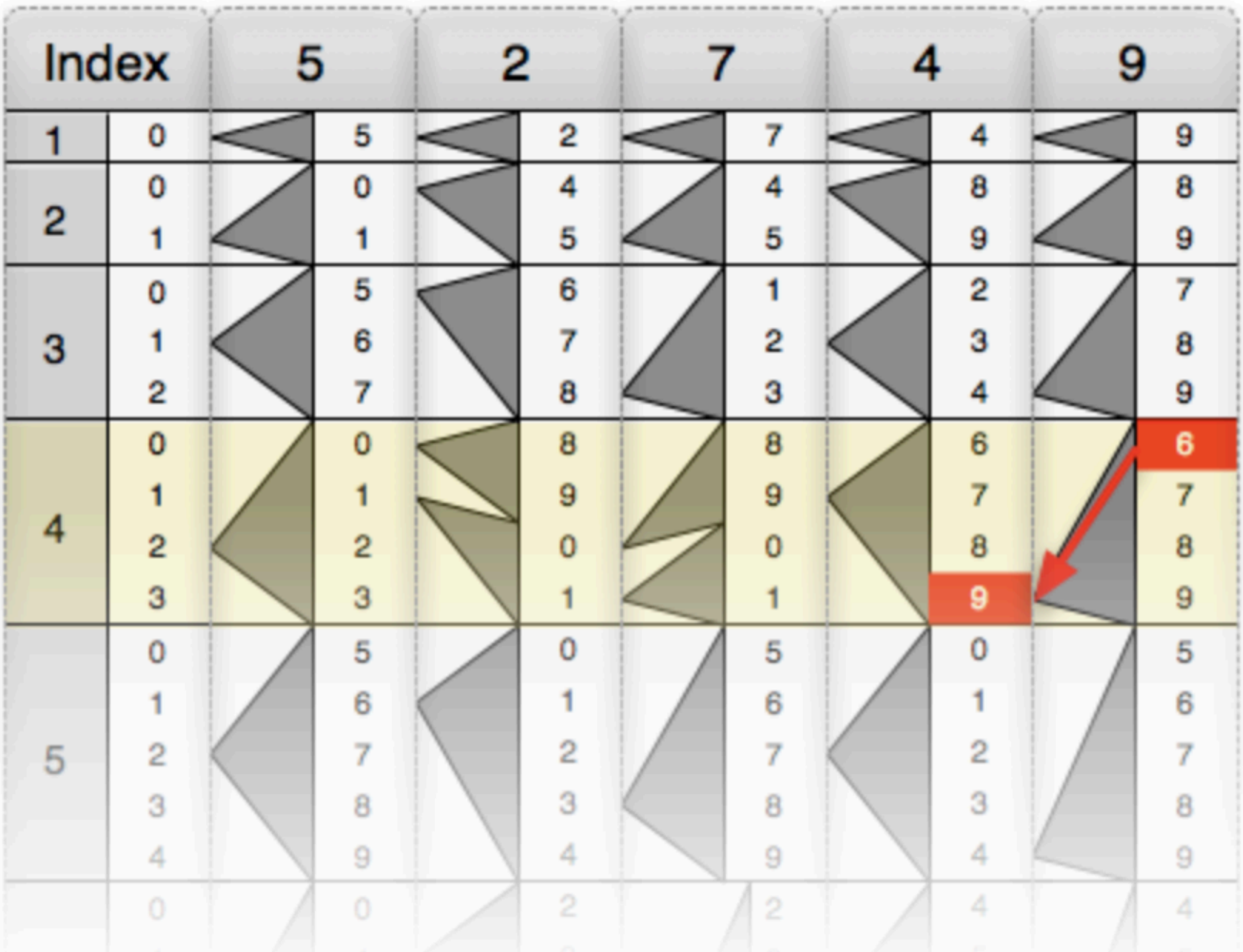
52749 x 4

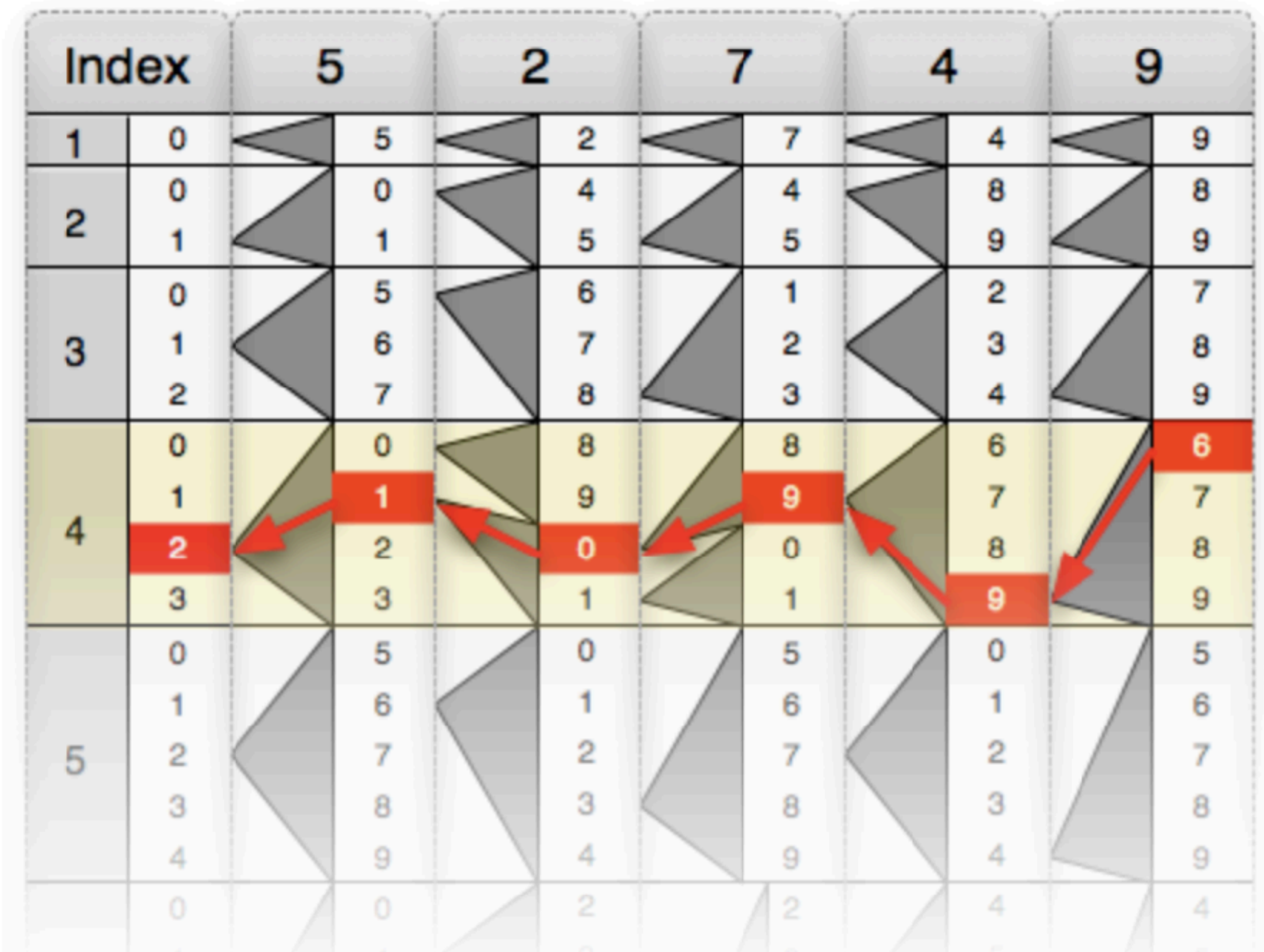



Index
5
2
7
4
9
1 0 5 2 7 4 9
2 0 0 4 4 8 8
1 1 5 5 9 9
3 0 5 6 1 2 7
1 6 7 2 3 8
2 7 8 3 4 9
4 0 0 8 8 6 6
1 1 9 9 7 7
2 2 0 0 8 8
3 3 1 1 9 9
5 0 5 0 5 0 5
1 6 1 6 1 6
2 7 2 7 2 7
3 8 3 8 3 8
4 9 4 9 4 9
6 0 0 2 2 4 4
1 1 3 3 5 5
2 2 4 4 6 6
3 3 5 5 7 7



Index 5 2 7 4 9
1 0 5 2 7 4 9
2 0 0 4 4 8 8
1 1 5 5 9 9
3 0 5 6 1 2 7
1 6 7 2 3 8
2 7 8 3 4 9
4 0 0 8 8 6 6
1 1 9 9 7 7
2 2 0 0 8 8
3 3 1 1 9 9
5 0 5 0 5 0 5
1 6 1 6 1 6
2 7 2 7 2 7
3 8 3 8 3 8
4 9 4 9 4 9


Index
5
2
7
4
9
1 0 5 2 7 4 9
2 0 0 4 4 8 8
1 1 5 5 9 9
3 0 5 6 1 2 7
1 6 7 2 3 8
2 7 8 3 4 9
4 0 0 8 8 6 6
1 1 9 9 7 7
2 2 0 0 8 8
3 3 1 1 9 9
5 0 5 0 5 0 5
1 6 1 6 1 6
2 7 2 7 2 7
3 8 3 8 3 8
4 9 4 9 4 9



210996

827×7

129×43

$7\,618 \times 317$

In order to understand the fourth operation, i.e., division, three things are to be observed, i.e., what is meant by division; second, how many numbers are necessary in division; third, which of these numbers is the greater. As to the first I say that division is the operation of finding, from two given numbers, a third number, which is contained as many times in the greater number as unity is contained in the less number. You will find this number when you see how many times the less number is contained in the greater. Suppose, for example, we have to divide 8 by 2; here 2 is contained 4 times in 8, so we say that 4 is the quotient demanded. Also, divide 8 by 4. Here the 4 is contained 2 times in 8, so that 2 is the quotient demanded.

Second, it is to be noticed that three numbers are necessary in division, the number to be divided, the divisor, and the quotient, as you have understood from the example above given, where 2 is the divisor, 8 the number to be divided, and 4 the quotient. From this is derived the knowledge

If you wish to divide 825 by 2 arrange the work like this:

8	2	5		4
2				

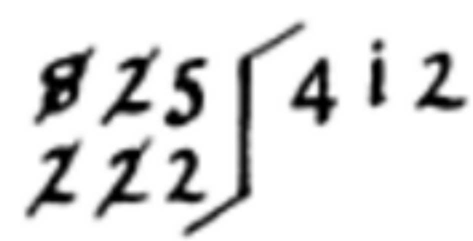
Placing your divisor, 2, below 8, note carefully how many times 2 is contained in 8, and this is 4, which is the quotient derived from 8. Write this after the 5 and beyond the bar, where the quotient belongs. Then proceed as follows: multiply the quotient, 4, by the divisor, 2, thus: 2

times 4 are 8. Now, not writing this 8, but keeping in mind what came from the operation of multiplying, i.e., 8, cancel this 8, which you kept in mind, from the other 8 which was above the 2, saying "8 from 8," and crossing it out with the pen, the remainder being 0. This, out with the pen, the remainder being o. This, then, is the order: first to place the divisor under the first figure; then to note the quotient and write it in its proper place; then to multiply the quotient by the divisor; then to subtract the figure produced by the multiplication from the figure of the number to be divided. This order you must preserve.

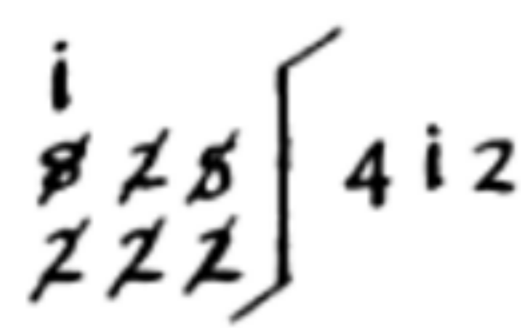
Now to continue: arrange the work beneath the preceding work in the following manner:

$$\begin{array}{ccc|cc} \cancel{8} & 2 & 5 & 4 & \mathrm{i} \\ \cancel{7} & 2 & & & \end{array}$$

Now proceed as follows: place your divisor, 2, under that 2 which follows the 8. Then see how many times this 2 is contained in the other 2, saying: "2 in 2 gives 1." Write this in the quotient to the right of the 4. Then do this: Multiply that quotient, 1, by the divisor, 2, saying: "1 time 2 makes 2." Now not writing this 2, subtract it from the 2 which follows the 8, saying: "2 from 2," and cancelling this 2 with the pen, the remainder being 0. Now to continue: arrange the work beneath the preceding work in the following manner:



Now proceed as follows: place your divisor, 2, under the 5. Then say: "2 in 5 gives 2," place this 2 as the quotient
after 41, multiply this 2 of the quotient by the 2 of the divisor, which is below 5, saying: "2 times 2 are 4." Do not write this 4, but subtract it from 5, saying: "4 from 5," cancelling the 5 and writing the remainder, 1, above the 5. And now observe that whenever, in subtracting one figure from another, you have a remainder, this should be written above the figure from which it was obtained, as here.



And thus is completed your work. Therefore the quotient of 825 by 2 is 412.

9 0 6 5

8

9 0 6 5 1

8

1

~~9~~ 0 6 5   1

~~8~~ 8

$\cancel{1}\ 2$

$\cancel{9}\ \cancel{0}\ 6\ 5$ $\qquad$ $1\ 1$

$\cancel{8}\ \cancel{8}$

$\cancel{1}$ 2

$\cancel{9}$ $\cancel{0}$ 6 5   1 1

$\cancel{8}$ $\cancel{8}$ 8

~~1~~ 2

~~9~~ ~~0~~ 6 5   1 1 3

~~8~~ ~~8~~ 8

$\cancel{1}\ \cancel{2}\ 2$

$\cancel{9}\ \cancel{0}\ \cancel{6}\ 5$ 1 1 3

$\cancel{8}\ \cancel{8}\ \cancel{8}$

~~1~~ ~~2~~ 2

~~9~~ ~~0~~ ~~6~~ 5 1 1 3 3

~~8~~ ~~8~~ ~~8~~ 8

~~1~~ ~~2~~ ~~2~~ 1

~~9~~ ~~0~~ ~~6~~ ~~5~~ 1 1 3 3

~~8~~ ~~8~~ ~~8~~ ~~8~~

Gasta menos papel e tinta do que o nosso algoritmo!

exs

9 8 7 5

9 4

9 8 7 5 1

9 4

4

~~9~~ ~~8~~ 7 5 1

~~9~~ ~~4~~ 4

9

4

~~9~~ ~~8~~ 7 5 10

~~9~~ ~~4~~ 4

9

4

$\cancel{9}$ $\cancel{8}$ 7 5 10

$\cancel{9}$ $\cancel{4}$ $\cancel{4}$ 4

$\cancel{9}$ 9

$\quad\ 4$

$\cancel{9}\ \cancel{8}\ 7\ 5 \qquad 105$

$\cancel{9}\ \cancel{4}\ \cancel{4}\ 4$

$\quad\ \cancel{9}\ 9$

$$
\left.\begin{array}{cccc}
 & \cancel{4} & 2 & \\
\cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} & 5 \\
\cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & 4 \\
 & \cancel{9} & \cancel{9} &
\end{array}\right\} \quad 105
$$

$$\begin{array}{cccc|c} & \cancel{1} & \cancel{2} & & \\ \cancel{9} & \cancel{8} & \cancel{7} & 5 & 105 \\ \cancel{9} & \cancel{4} & \cancel{4} & \cancel{4} & \\ & \cancel{9} & \cancel{9} & & \end{array}$$

Quociente = 105 ; Resto = 5

exs

6 5 2 8 4

5 9 4

1 5

5 3 3

1 6 8 7 8

6 5 2 8 4 1 0 9

5 9 4 4 4

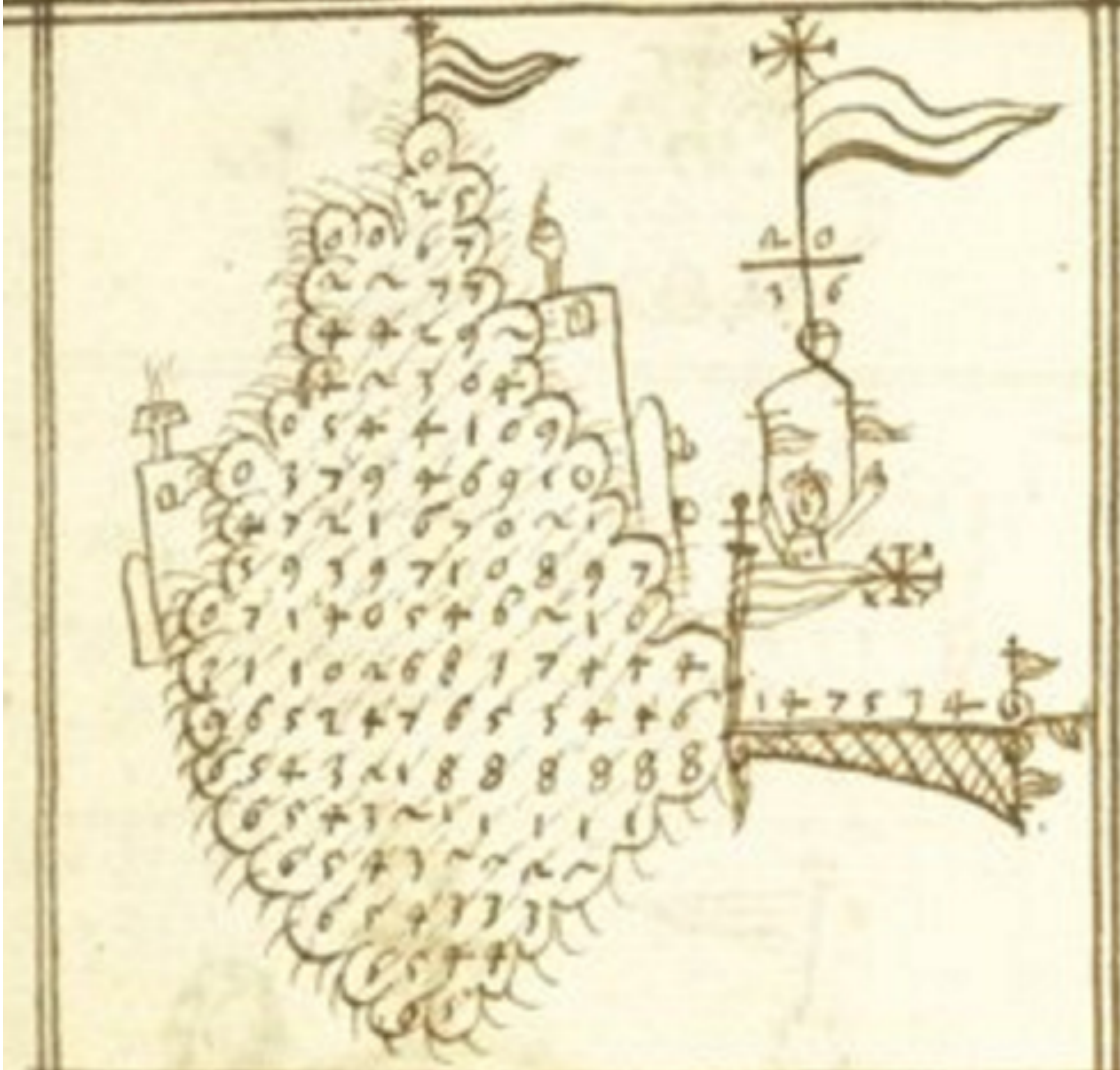
5 9 9

5

$$
\begin{array}{ccccc|cc}
 & & 1 & & & & \\
 & & \cancel{2} & 9 & & & \\
 & 5 & 4 & \cancel{0} & & & \\
 & 4 & \cancel{0} & 4 & 2 & & \\
\cancel{1} & 2 & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 & 8 \\
 & 4 & 5 & \cancel{2} & \cancel{2} & & \\
 & & 4 & 5 & & & \\
\end{array}
$$

```
    1 5
    8 7 3
1 6 8 7 5
6 8 2 8 4 | 1 0 9
8 9 4 4 4
  8 9 9
    8
```

GALEA PER FIGURE 7 a PER 8



Escrito em vernáculo, destinado a uma grande audiência.

Democratizou o acesso à capacidade de calcular
(mat prática)

Difundiu a matemática Hindu-Árabe

Despertou o gosto pelo estudo da matemática

NAPIER

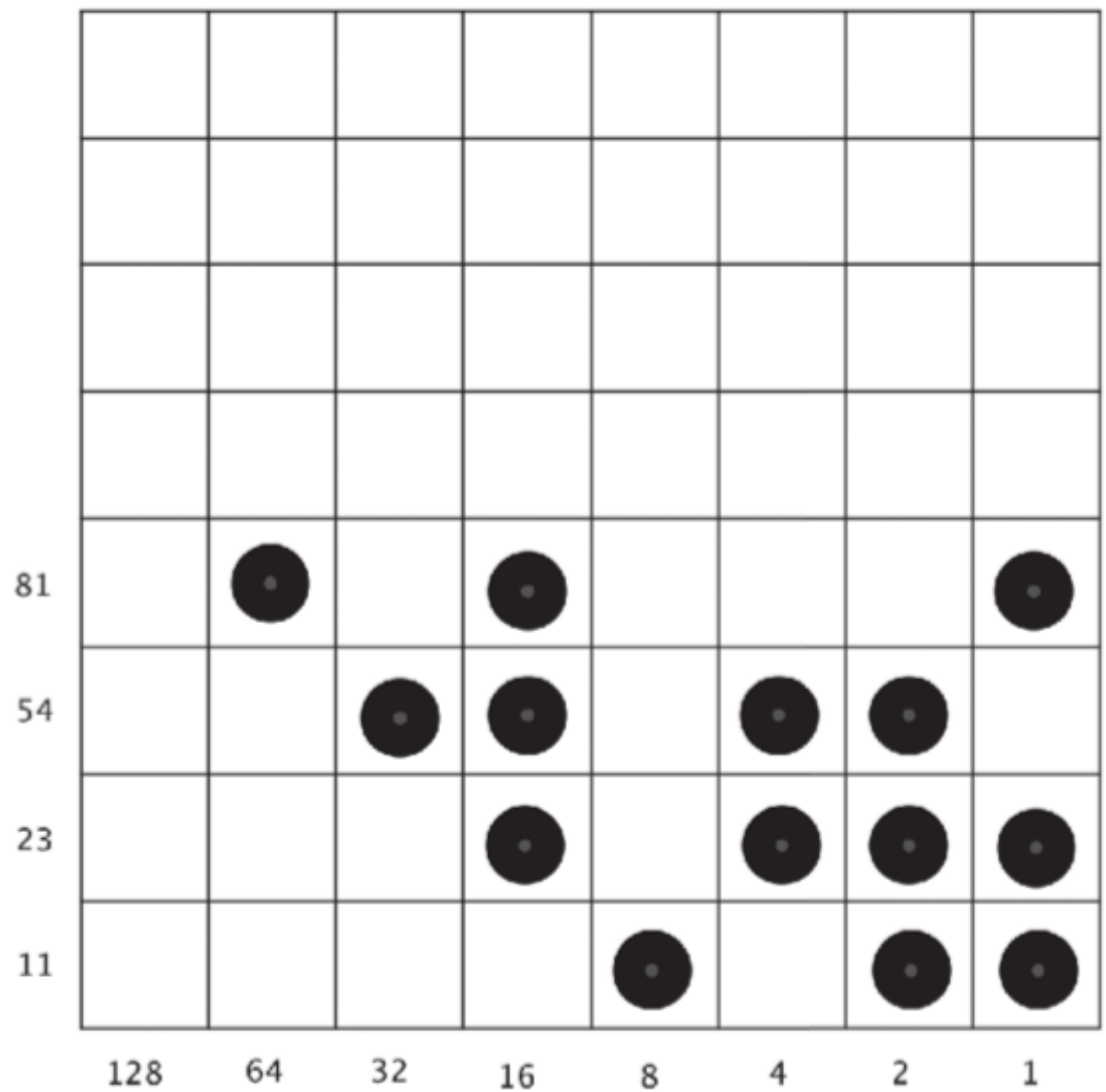
Na obra em que Napier introduz este recurso de cálculo, *"Rabdologiæ"* (1617), descreve também como se pode usar um tabuleiro de xadrez e algumas peças para efectuar somas, subtracções, multiplicações, divisões e extracções de raízes quadradas!

RABDOLOGIÆ,
SEV NVMERATIONIS
PER VIRGULAS
LIBRI DVO:
Cum APPENDICE de expeditissimo MVLTIPLICATIONIS PROMPTVARIO.
Quibus accessit & ARITHMETICÆ LOCALIS LIBER VNVS.
John Napier (1550-1617)
Authore & Inventore IOANNE NEPERO, *Barone* MERCHISTONII, &c. SCOTO.
EDINBVRGI,
Excudebat *Andreas Hart*. 161

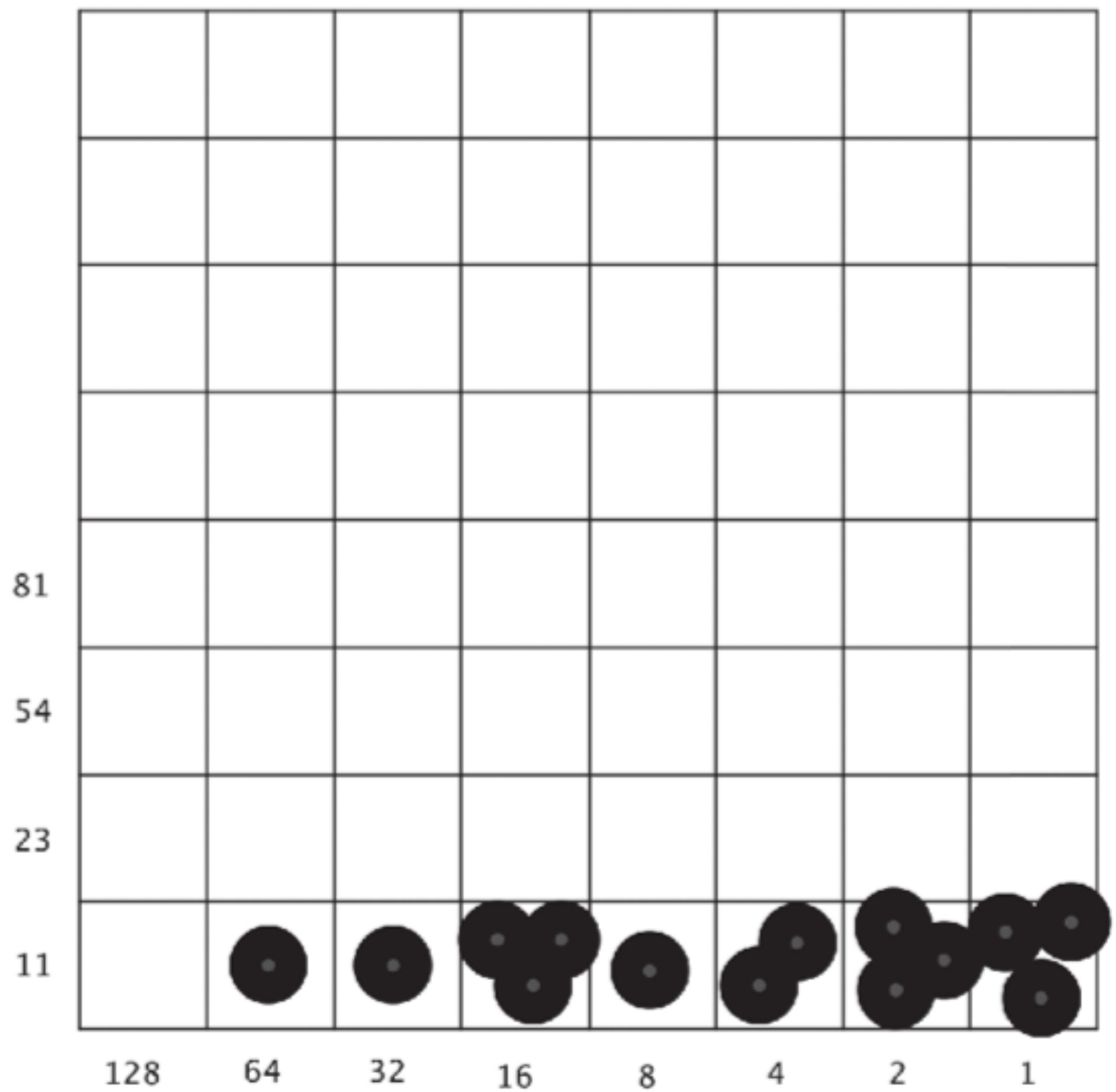
138 ARITHM. LOCALIS.

calculi areales figuram quadrangularem exactè referentes quæsitum multiplum, seu productum optatum designant: quod abbreviatione, translatione, & reductione manifestè patebit.

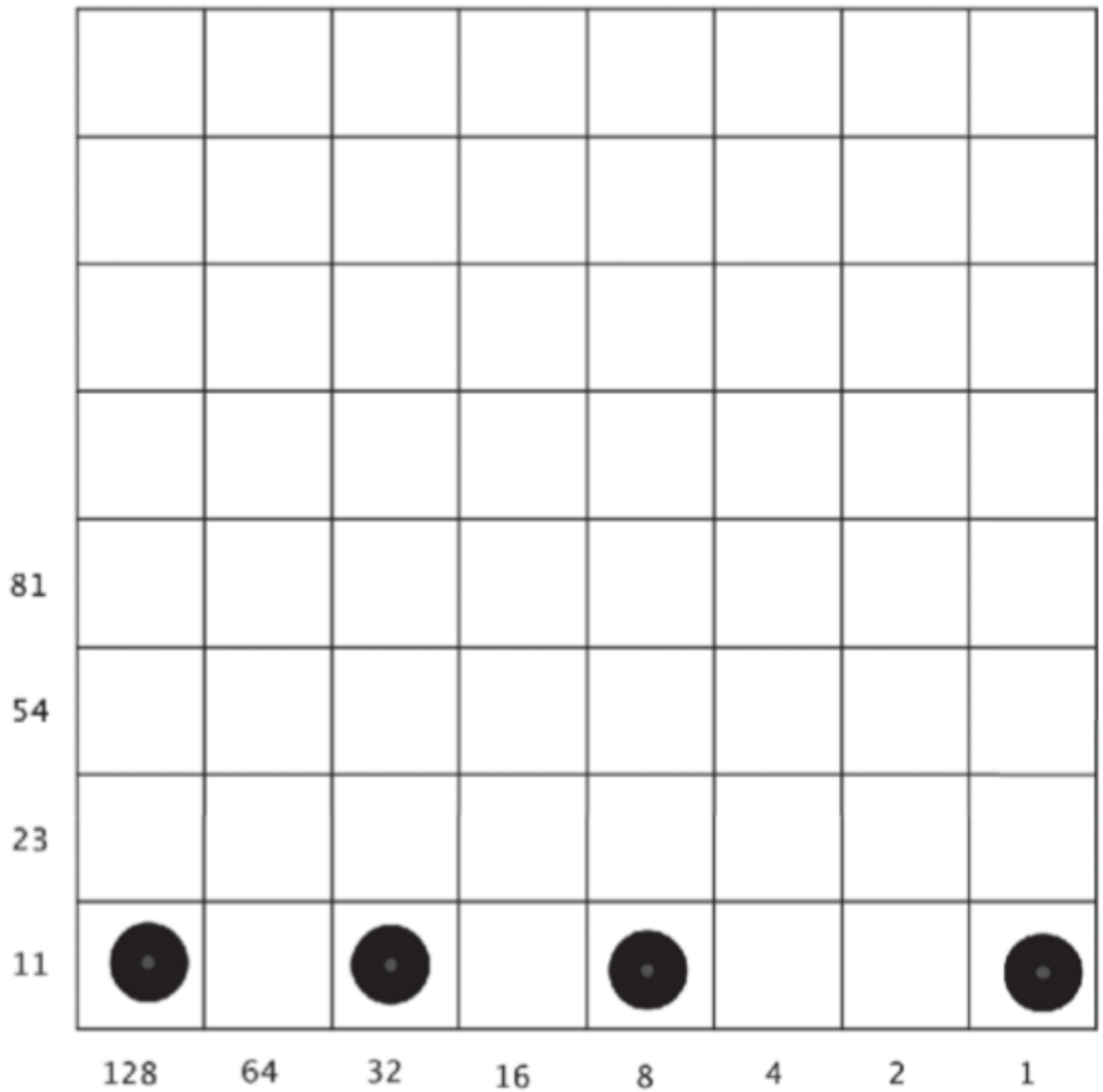
Vt sint multiplicanda 19 (quæ translata fiunt a b e) in 13: quæ translata fiunt a c d. Calculis aut cretâ signentur a b e, vel sui numeri 1, 2, 16, in infimo & sinistro margine ♈ ♉: a c d verò, vel sui numeri 1, 4, 8, in dextro ♈ ♋ signentur, ut infrà. Deinde omnes communes anguli inter sinistras notas a b e, vel 1, 2, 16, & dexteras a c d, vel 1, 4, 8, signentur calculis in area depositis, & figuram quadrangularem appositam referent. Abstractis igitur calculis marginalibus, & deletis notis multiplica-



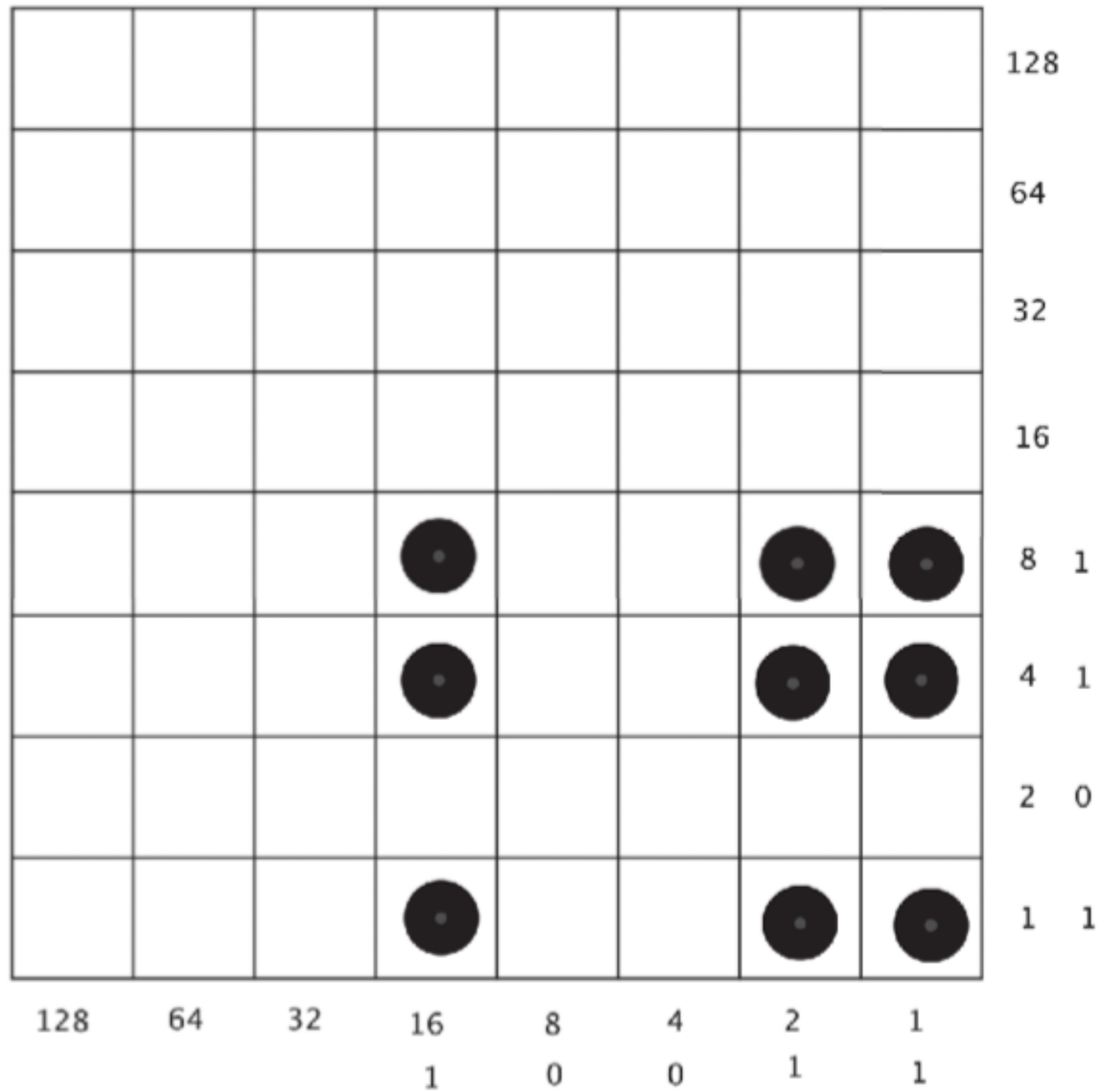
$$11 + 23 + 54 + 81 = \ldots$$



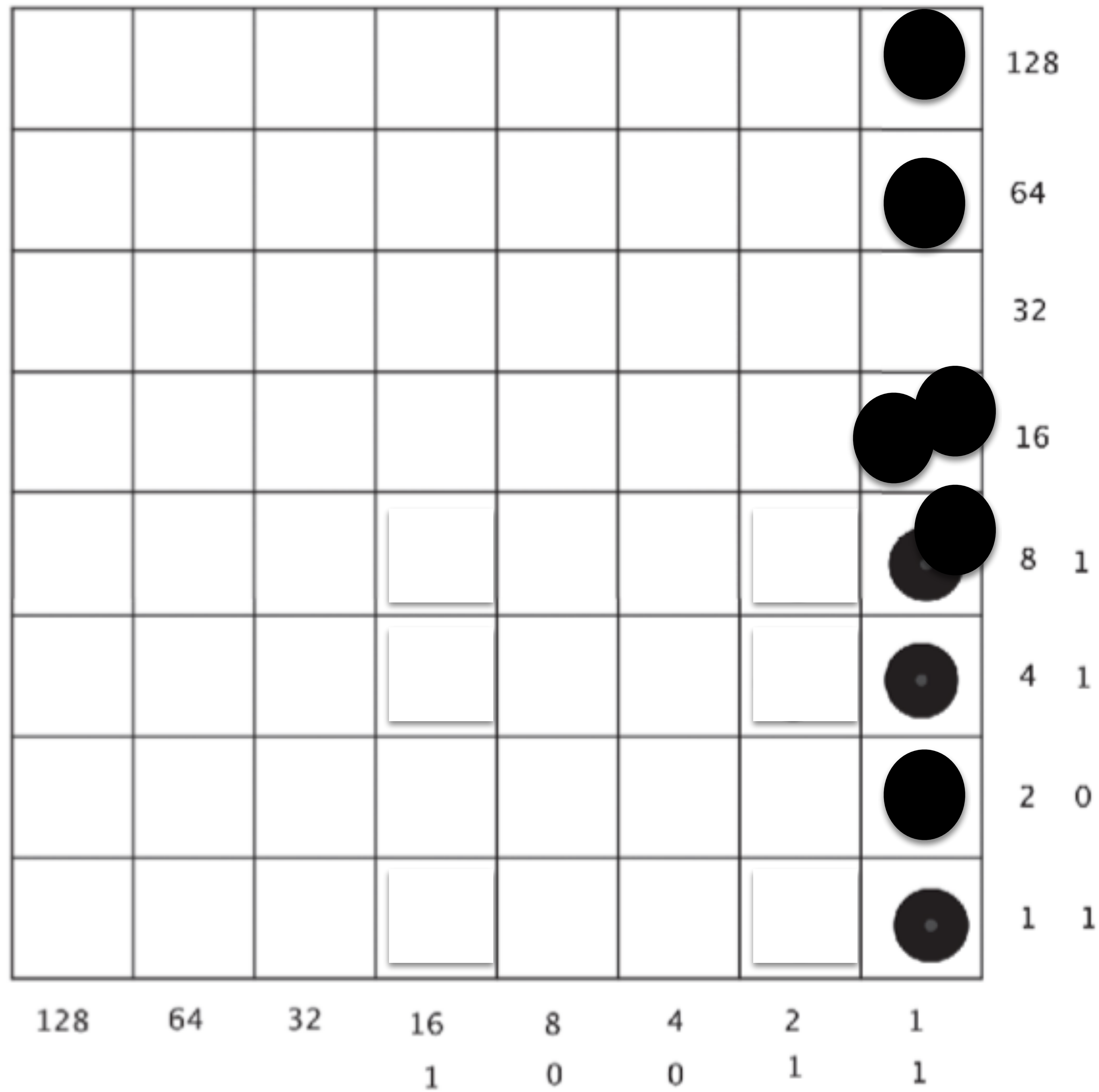
$$11 + 23 + 54 + 81 = 64 + 32 + 3 \times 16 + 8 + 2 \times 4 + 3 \times 2 + 3 \times 1$$



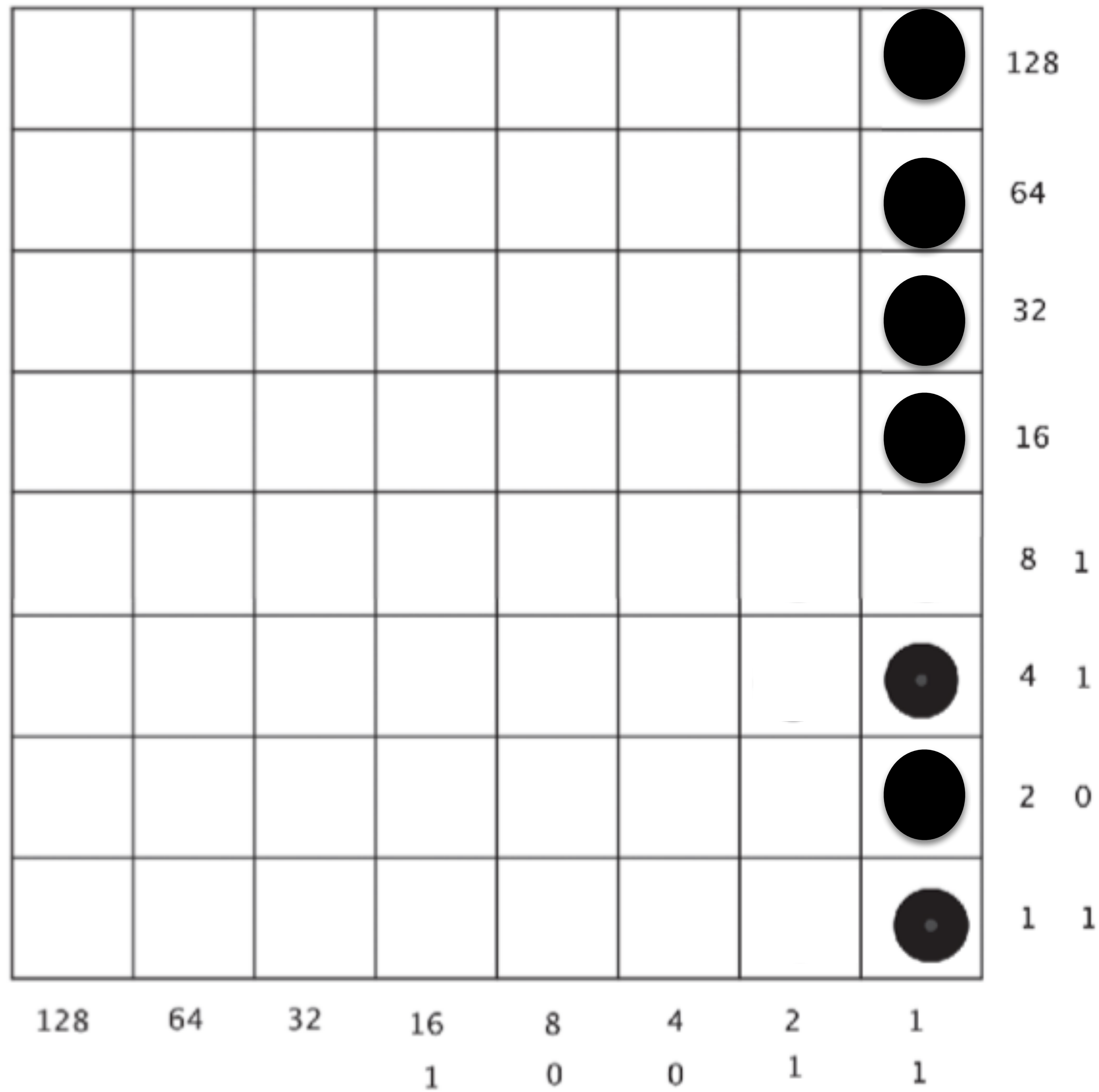
$$11 + 23 + 54 + 81 = 169$$



$$13 \times 19 = \ldots$$



$$13 \times 19 = \ldots$$

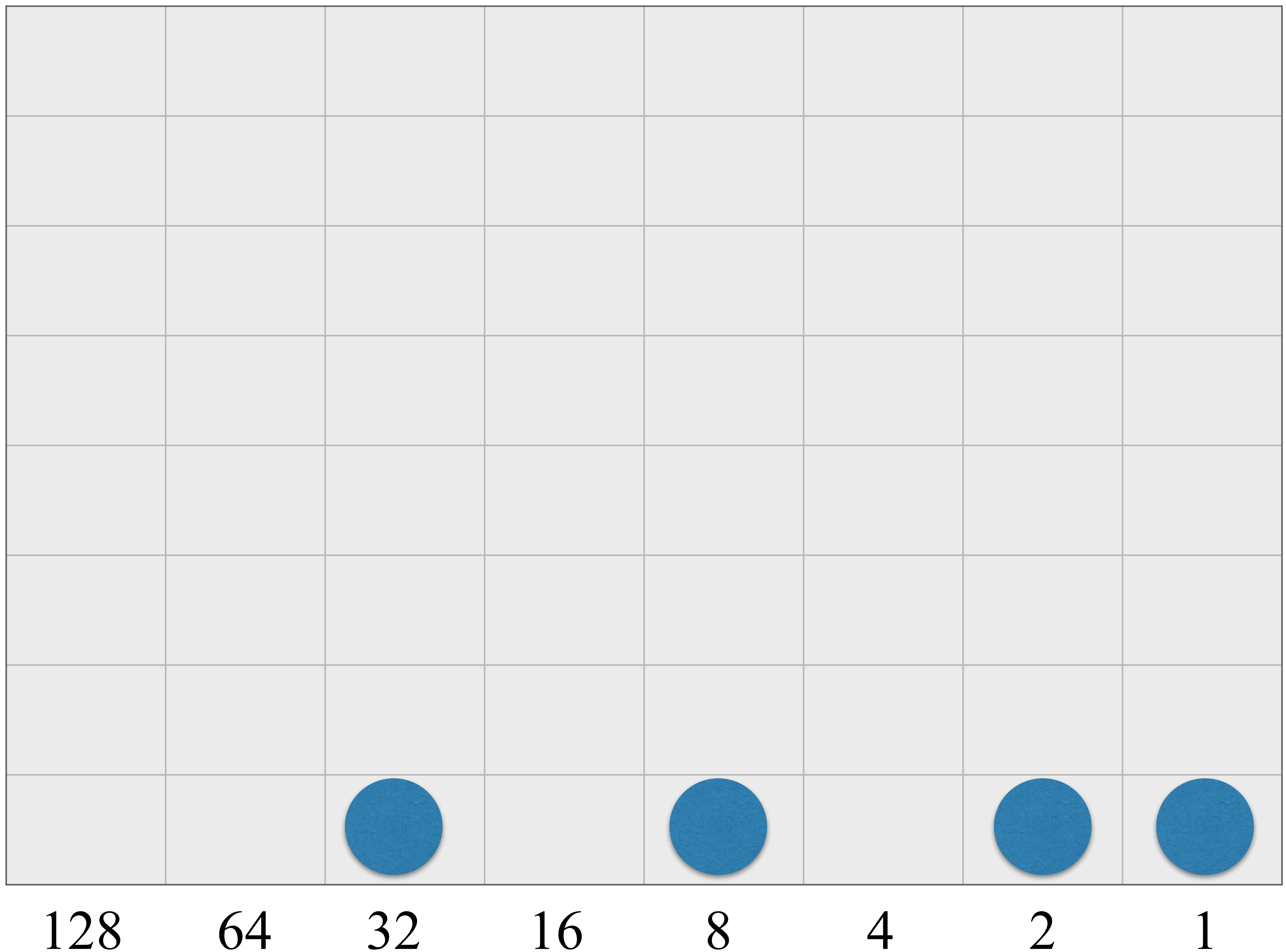


$$13 \times 19 = 247$$

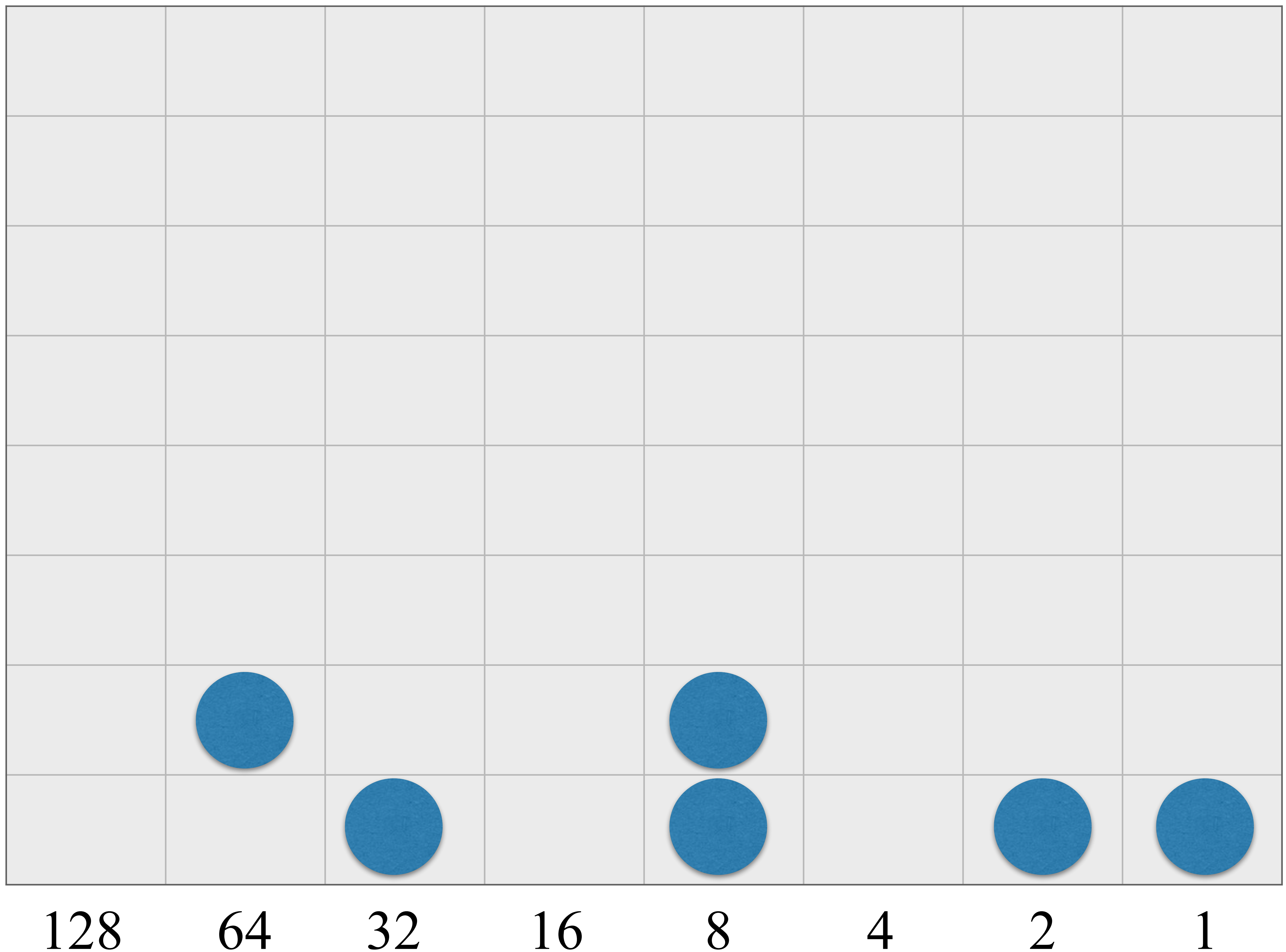
Ábaco de Neper

128	64	32	16	8	4	2	1

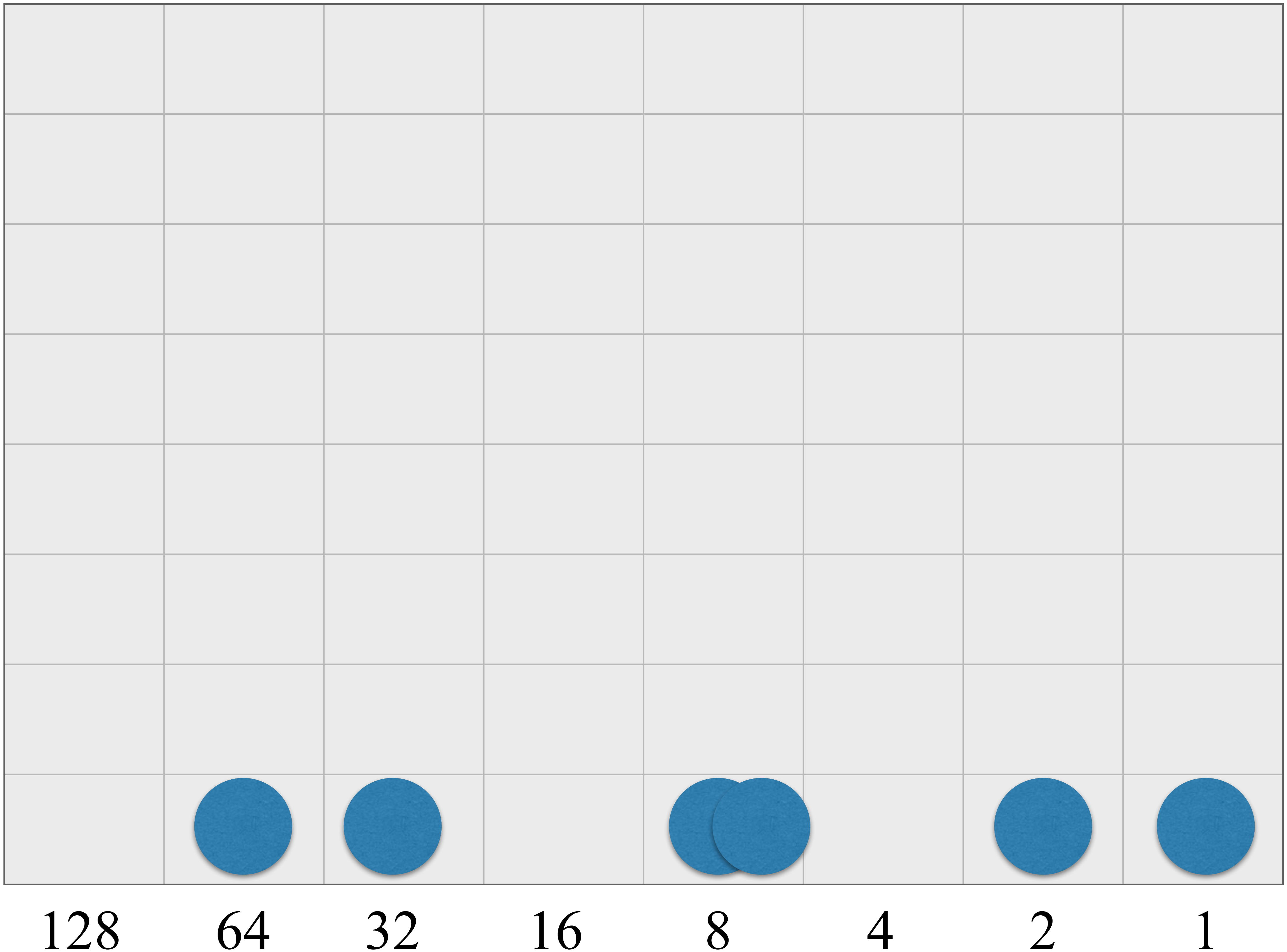
43



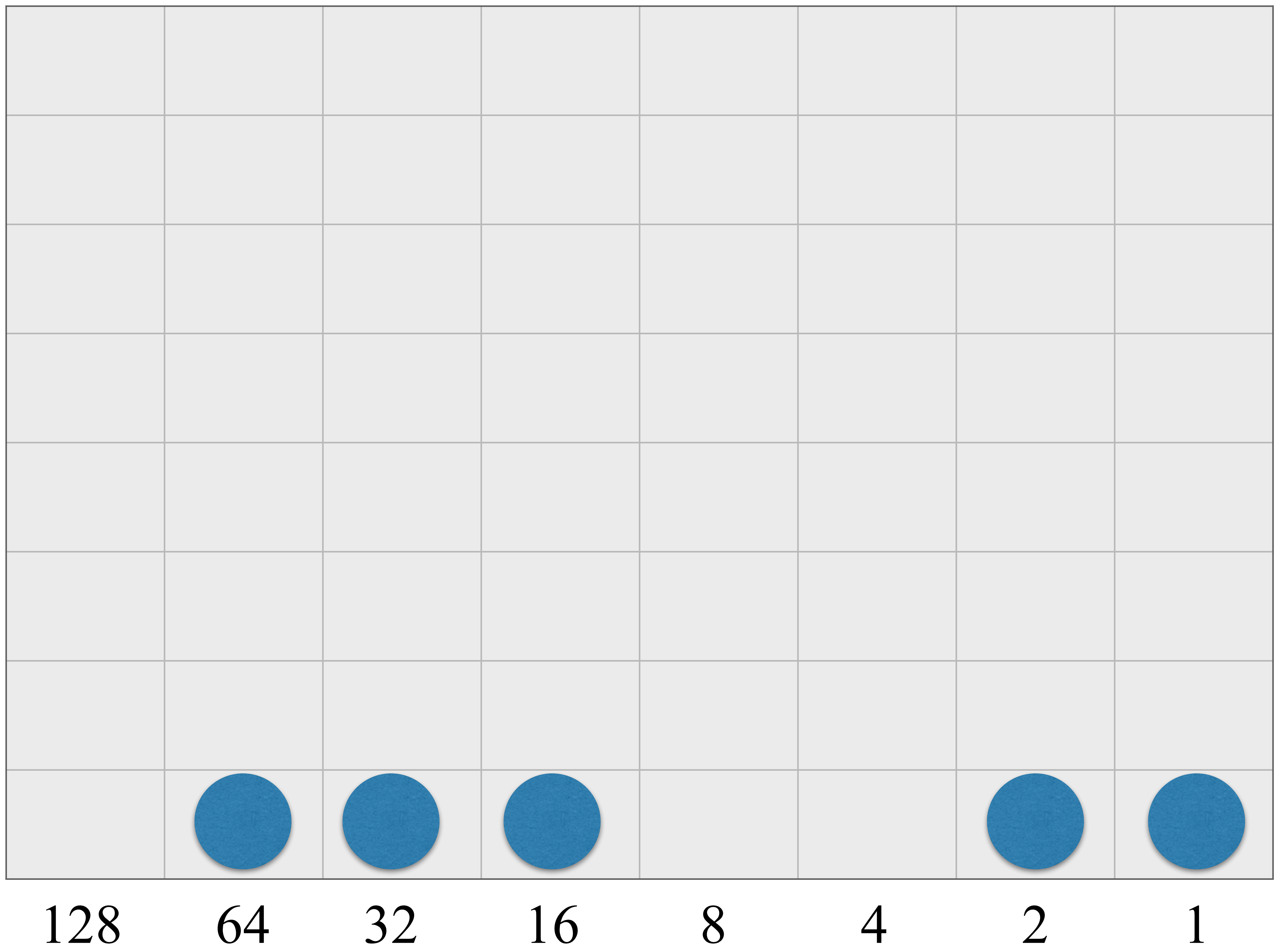
43+72



43+72



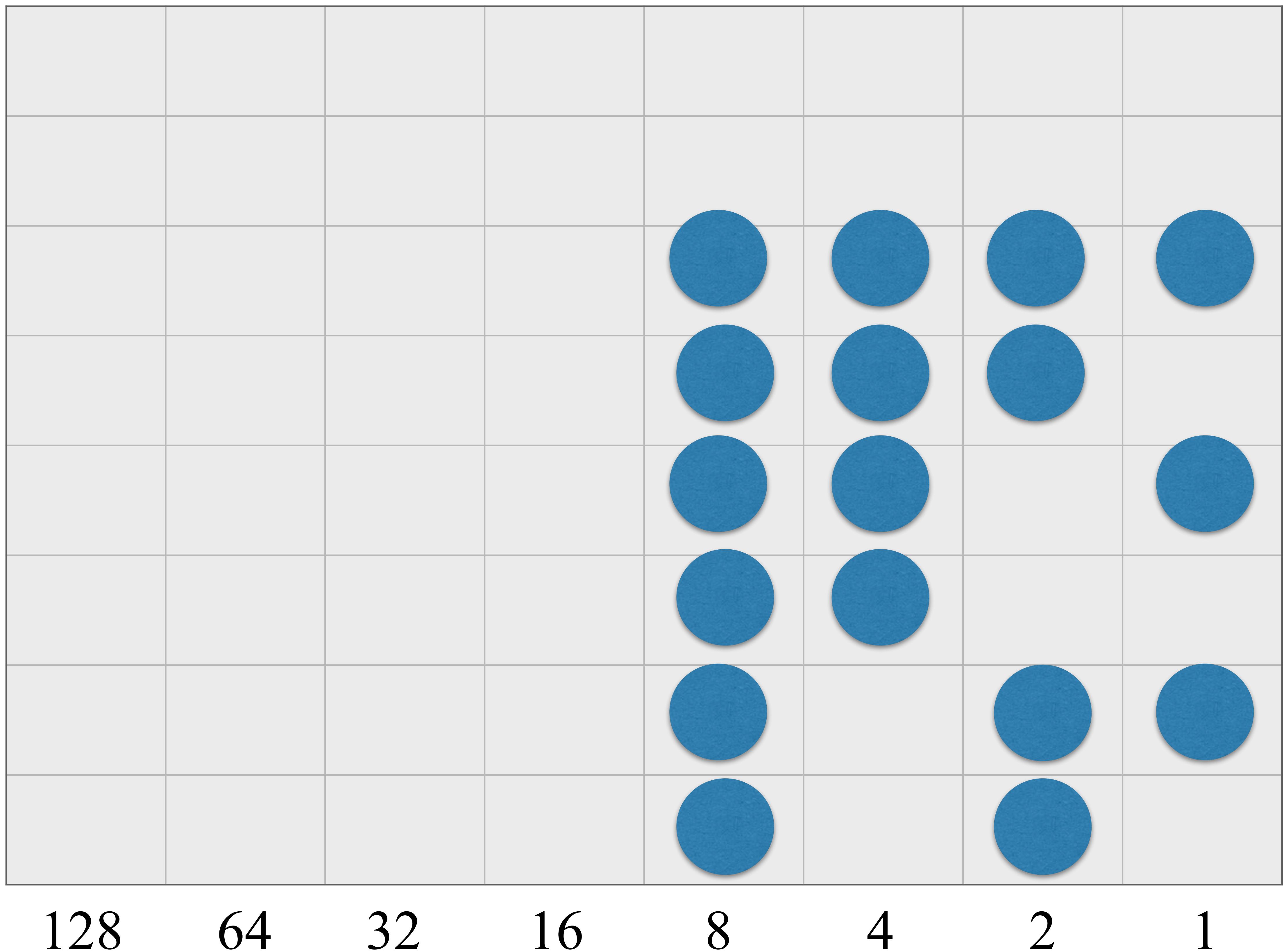
43+72

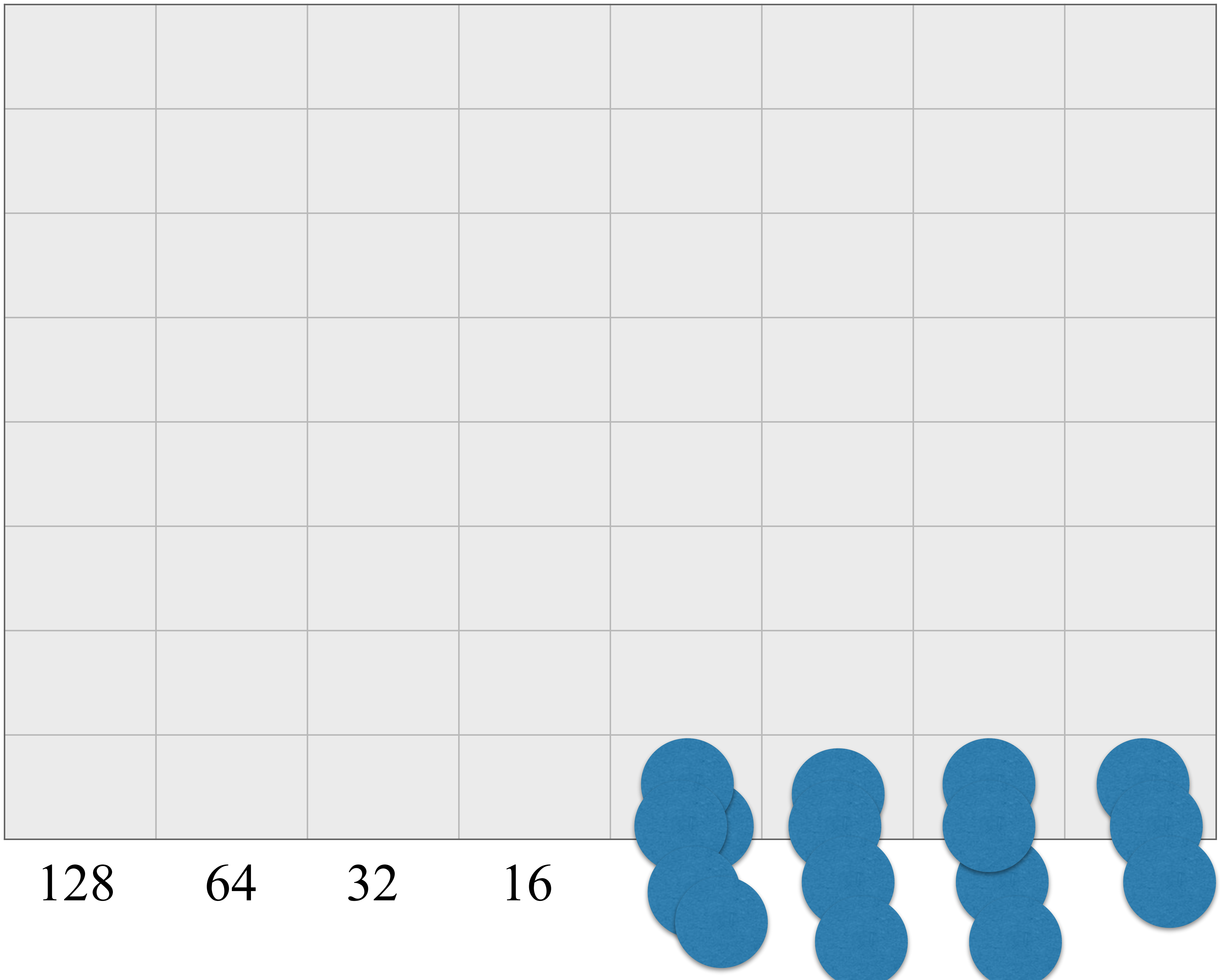


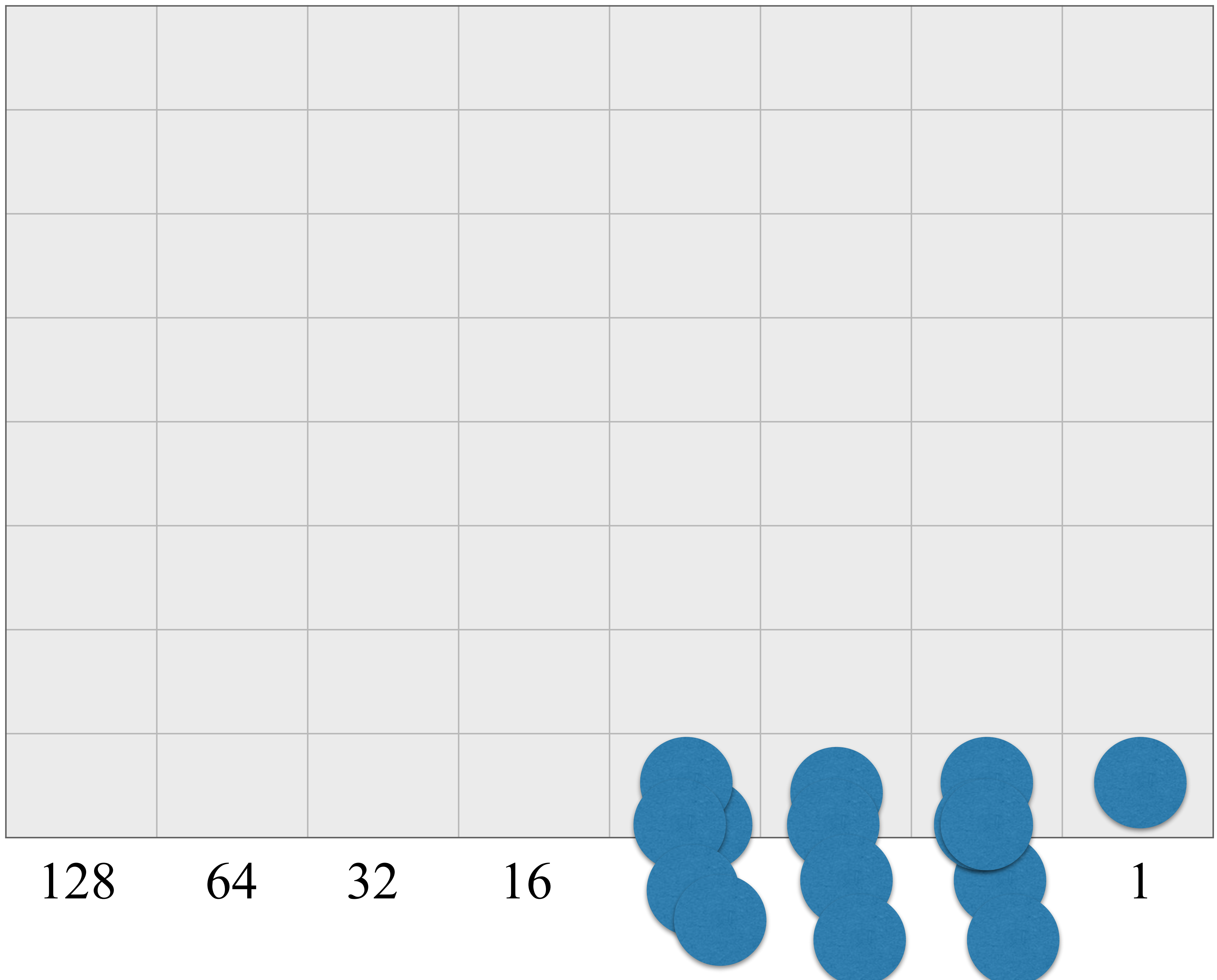
$10+11+12+13+14+15$

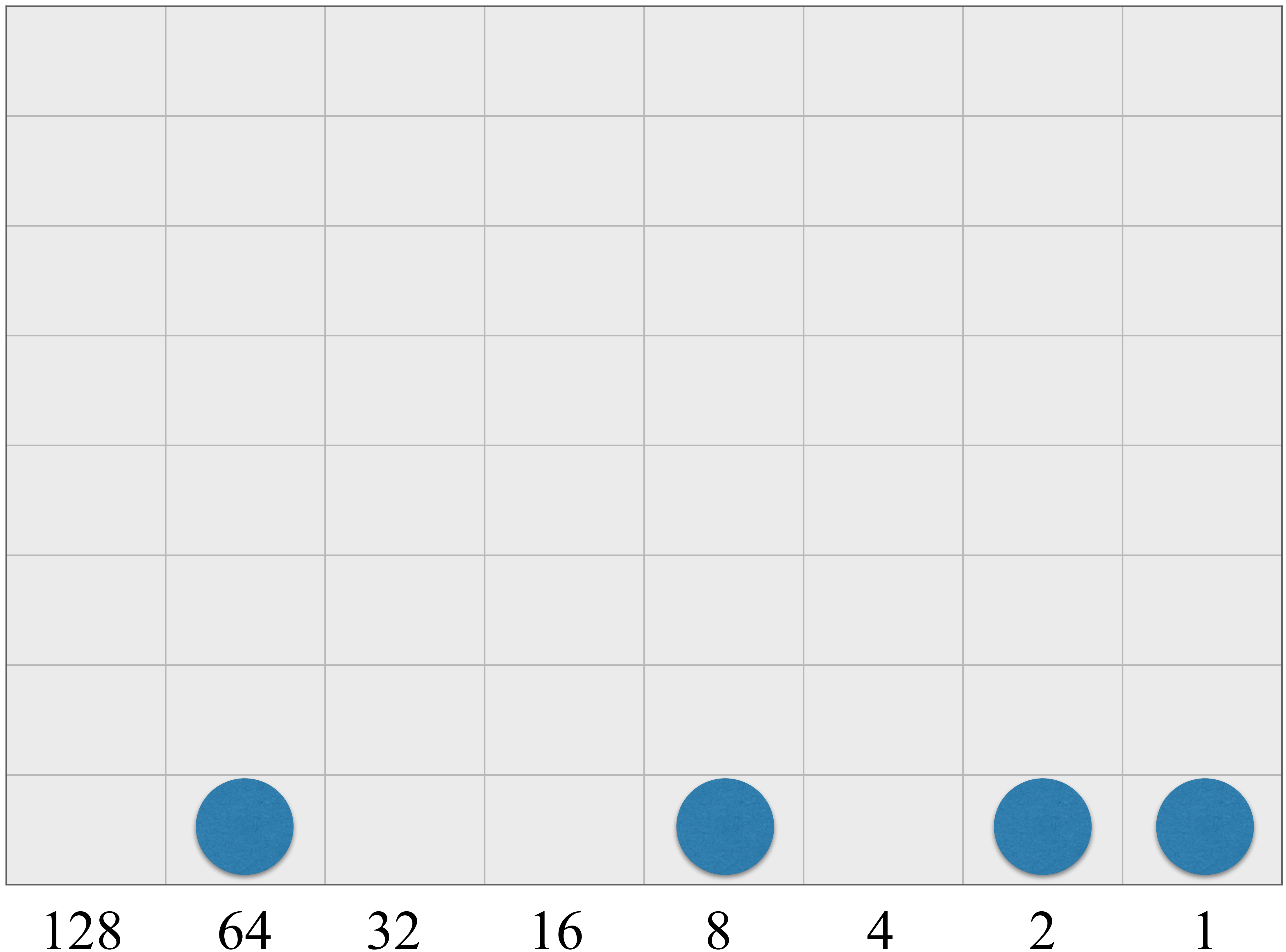
$31+2$

$50+24$


128
64
32
16
8
4
2
1


128
64
32
16

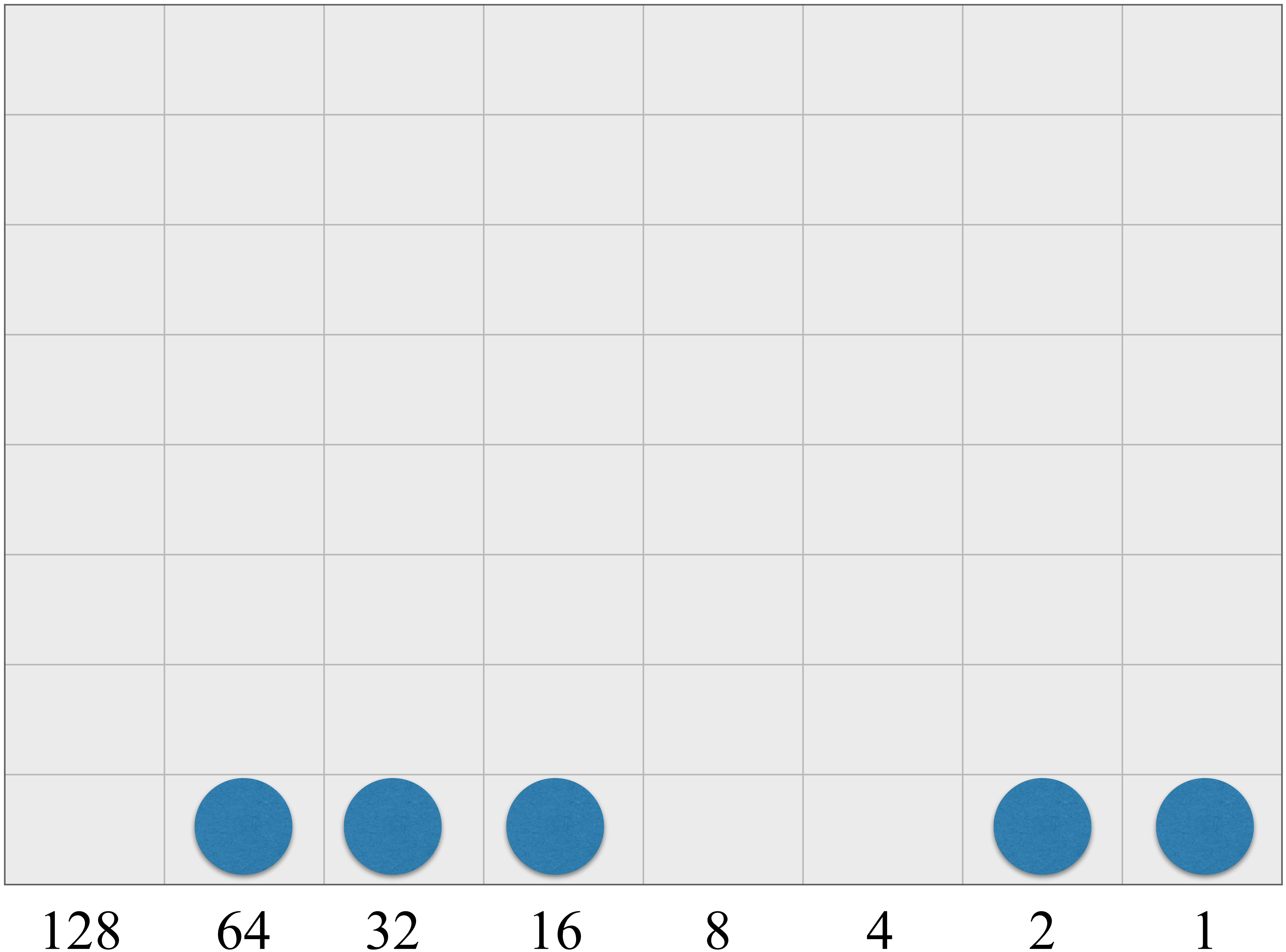

128
64
32
16
1


128
64
32
16
8
4
2
1

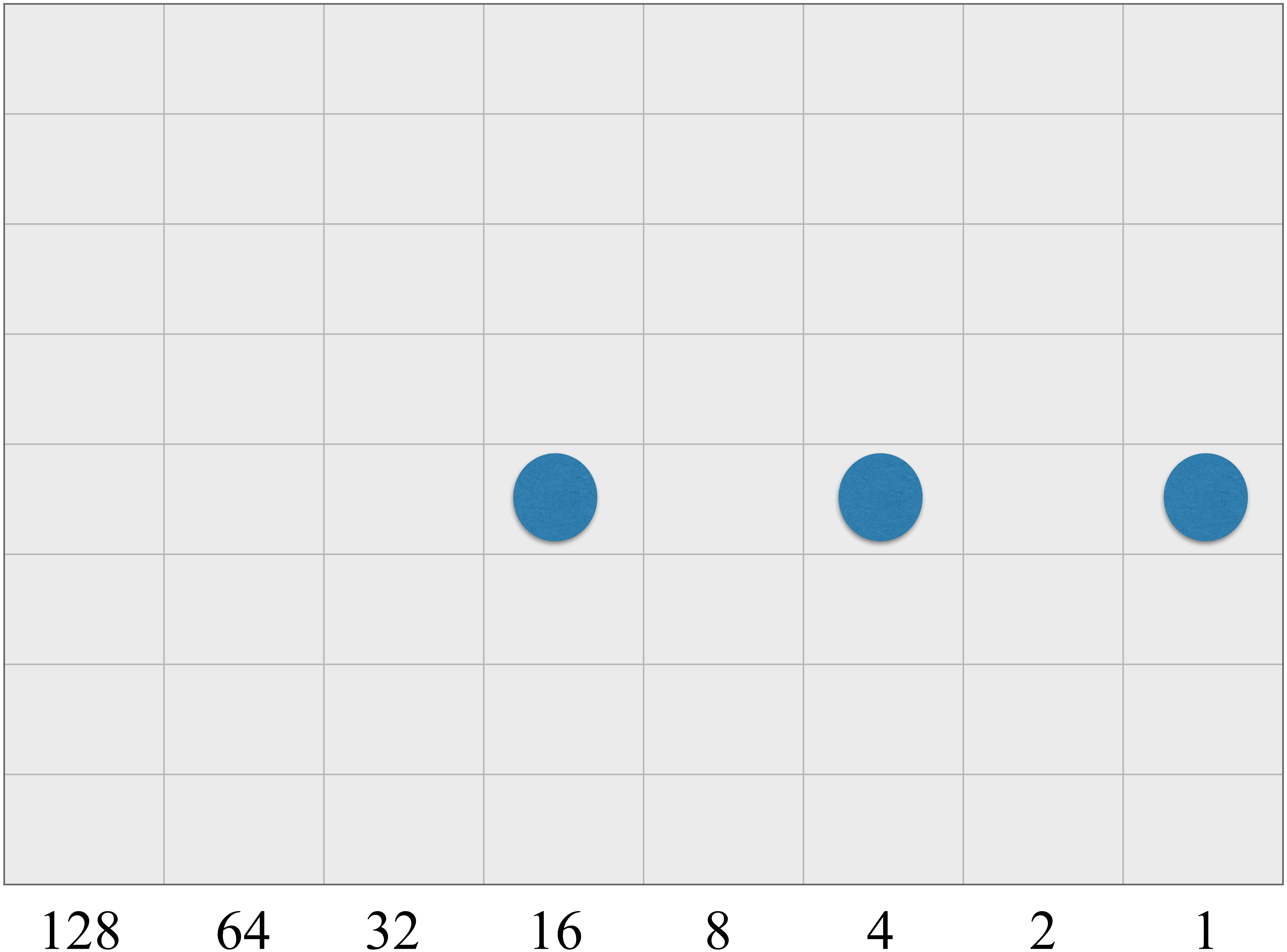
21-5

128	64	32	16	8	4	2	1

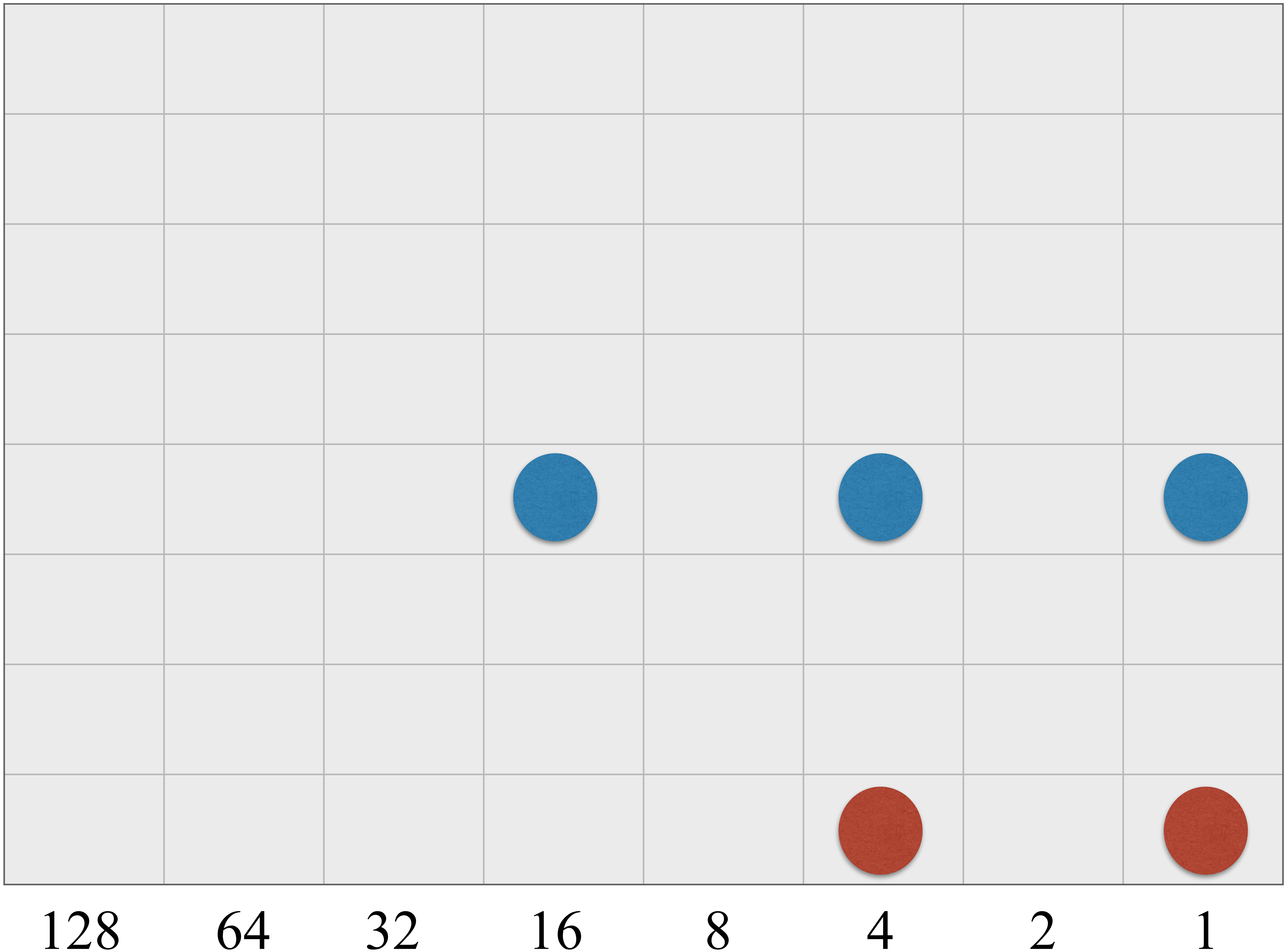
$43+72=115$



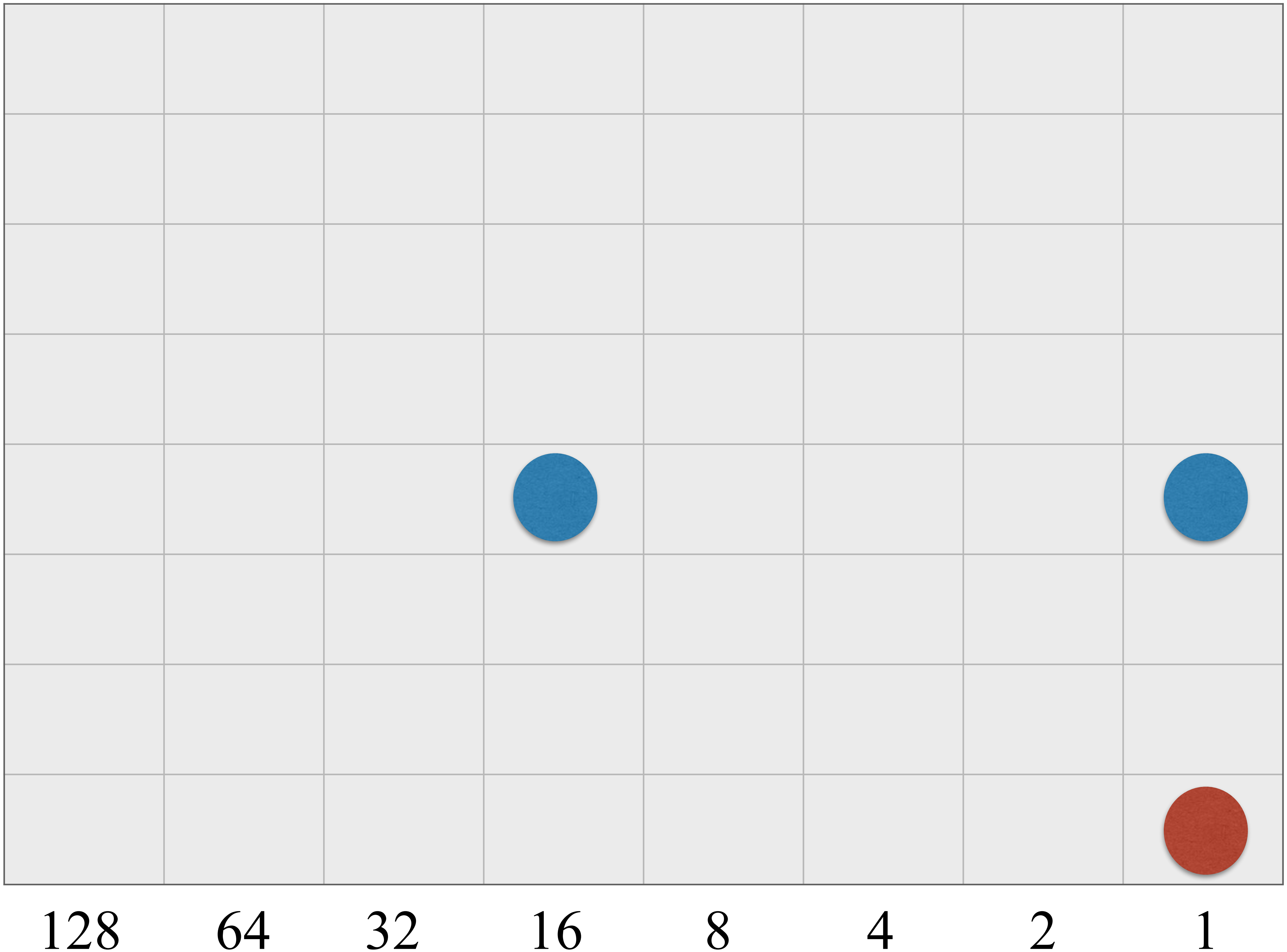
21-5



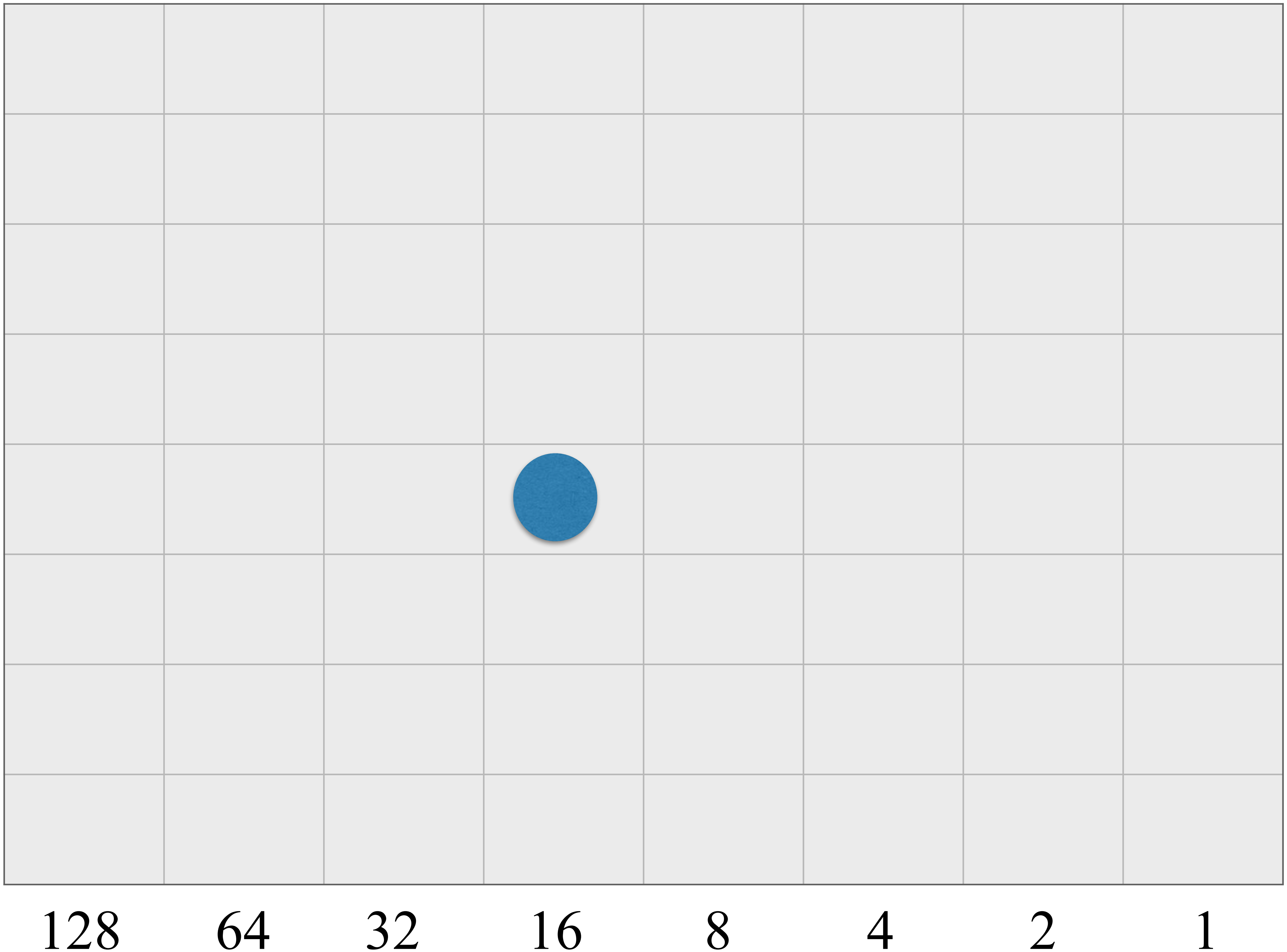
21-5



21-5



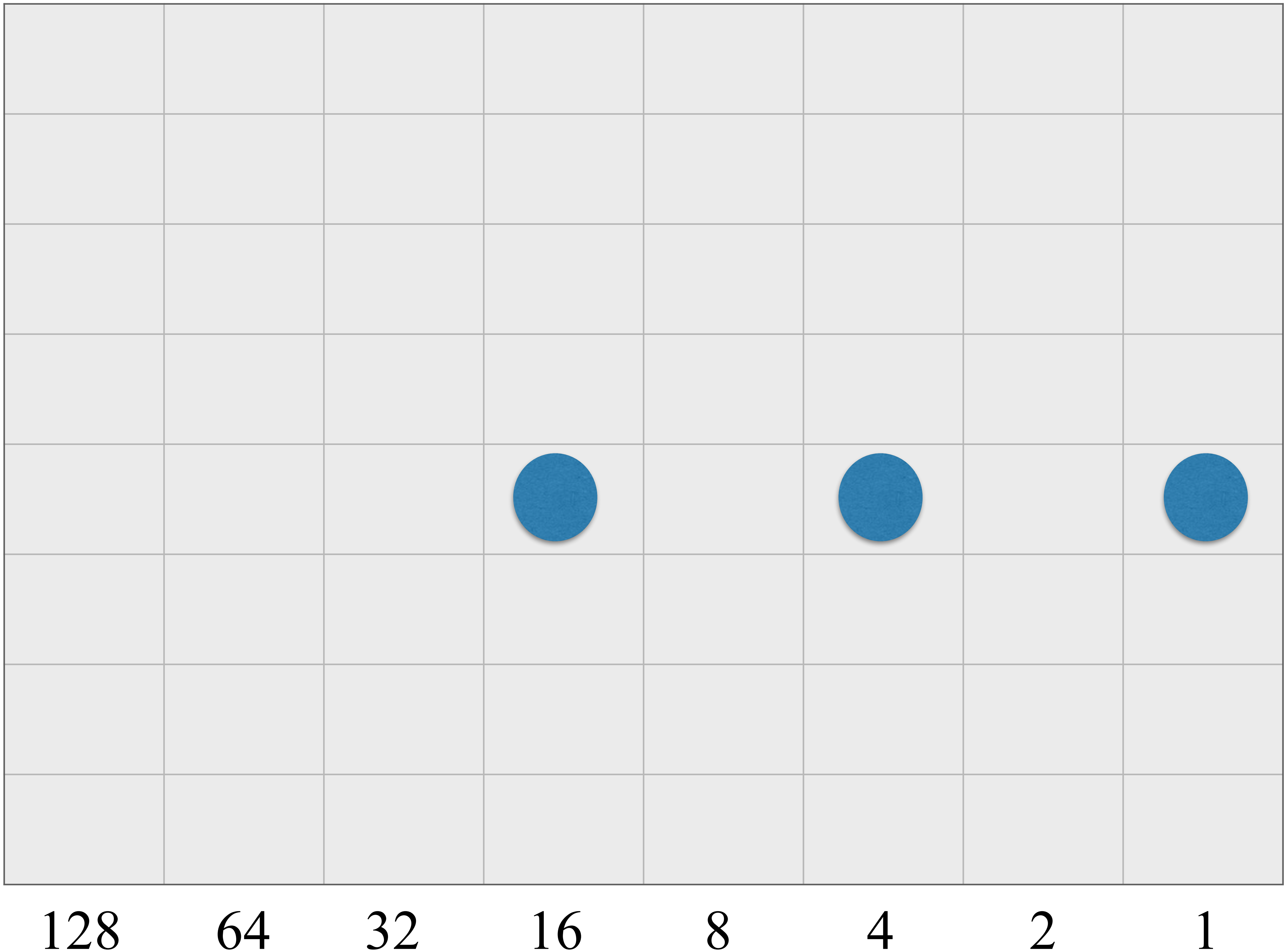
$21-5 = 16$



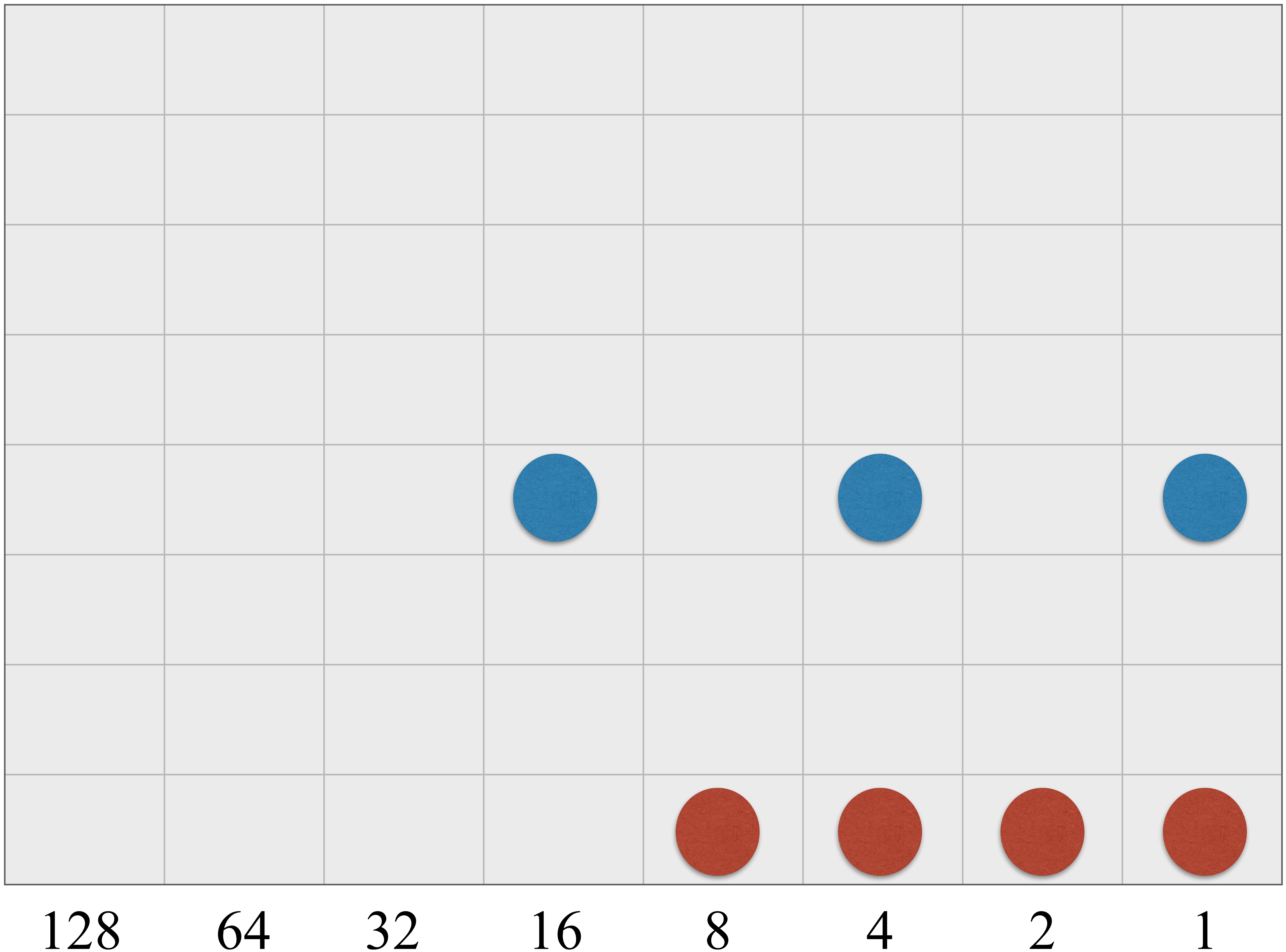
21-15

128	64	32	16	8	4	2	1

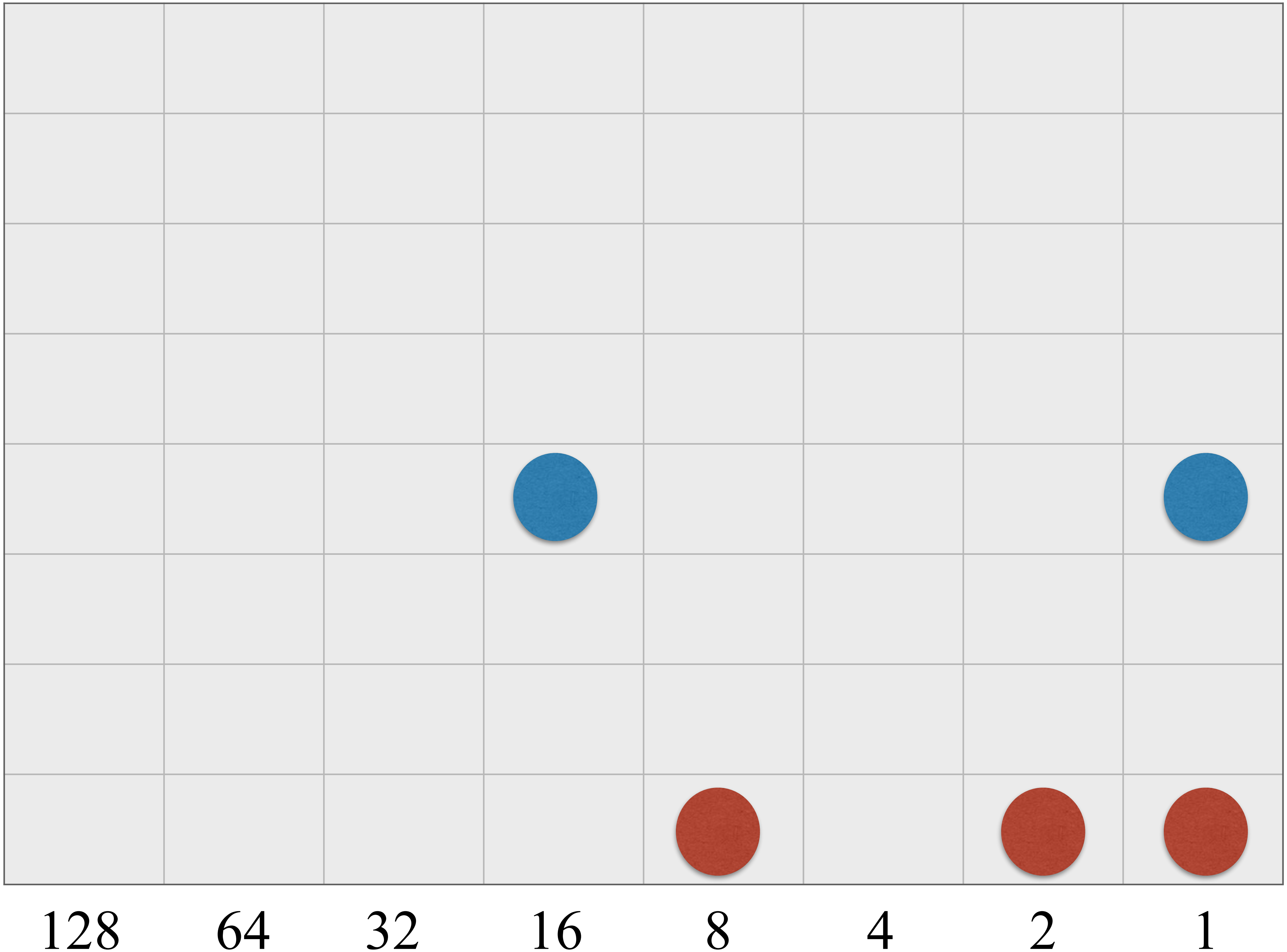
21-15



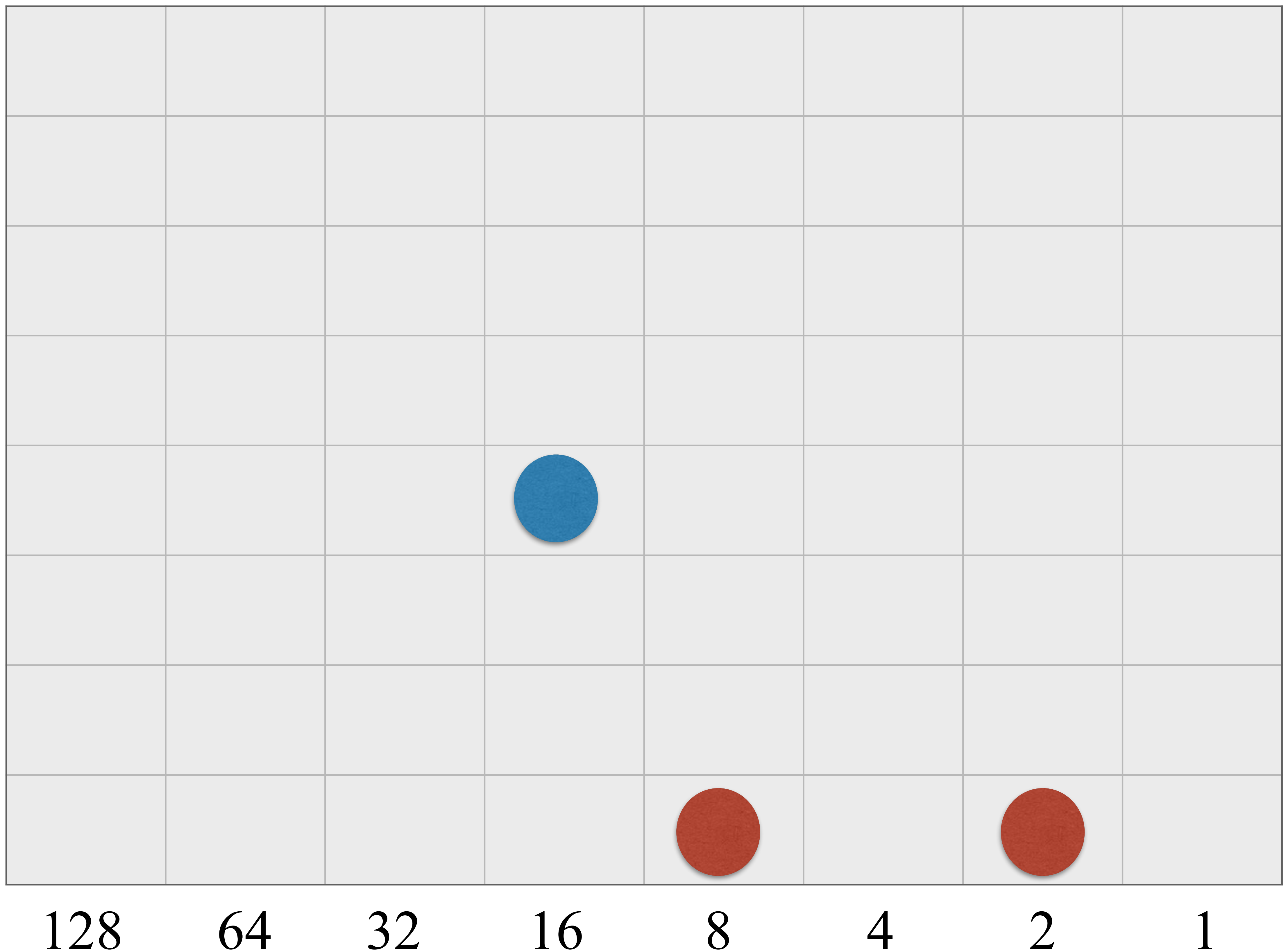
21-15



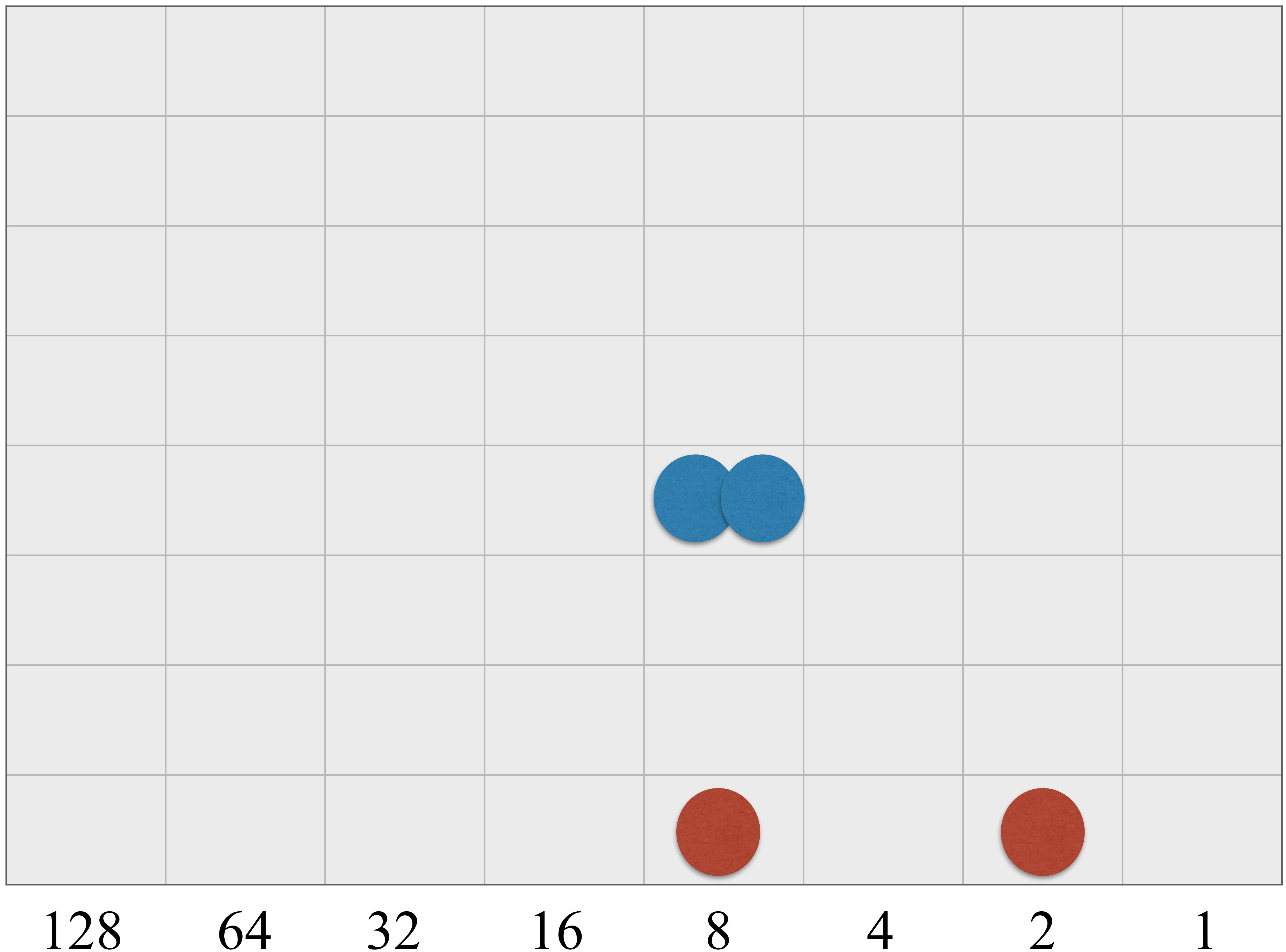
21-15



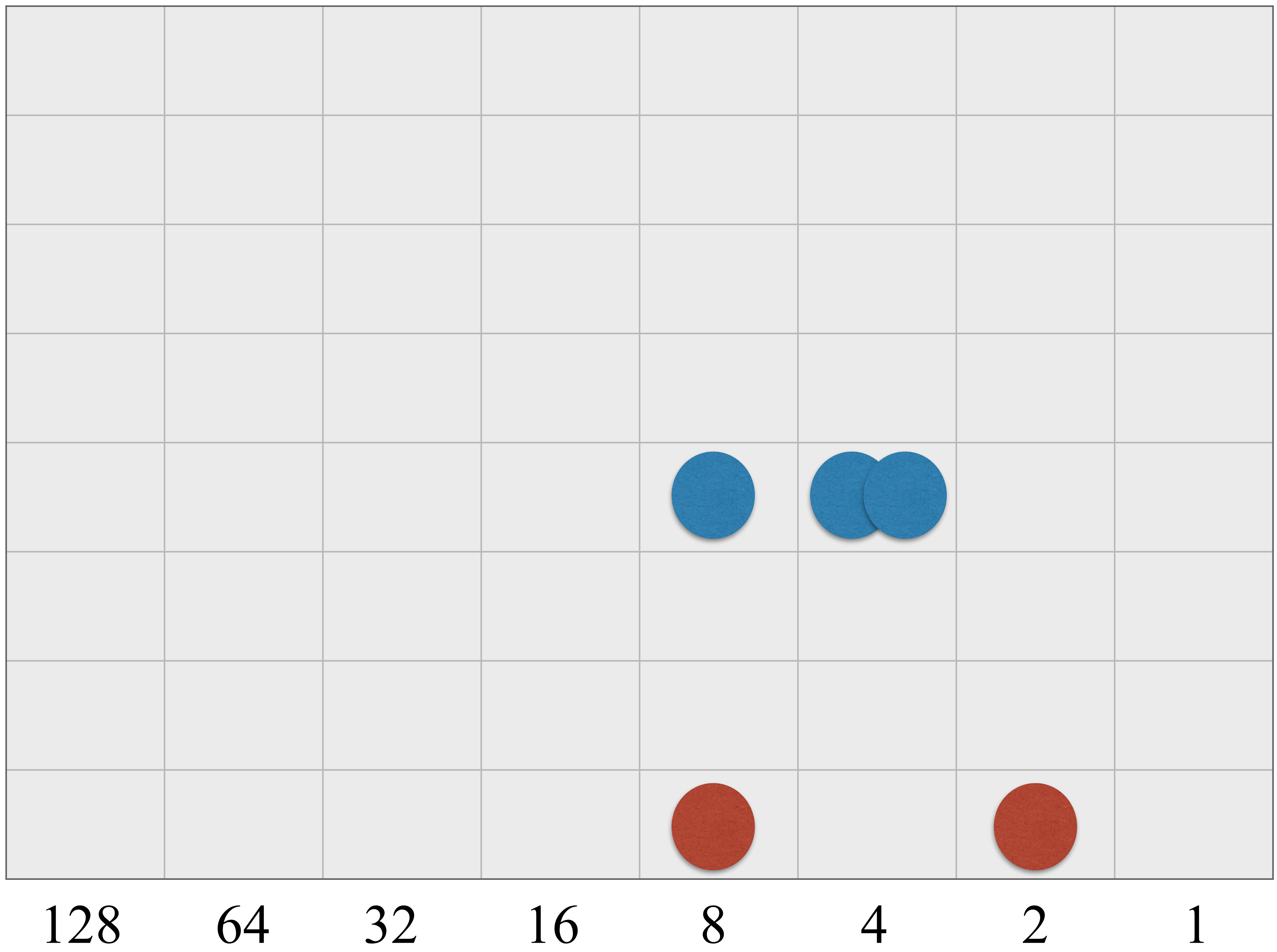
21-15



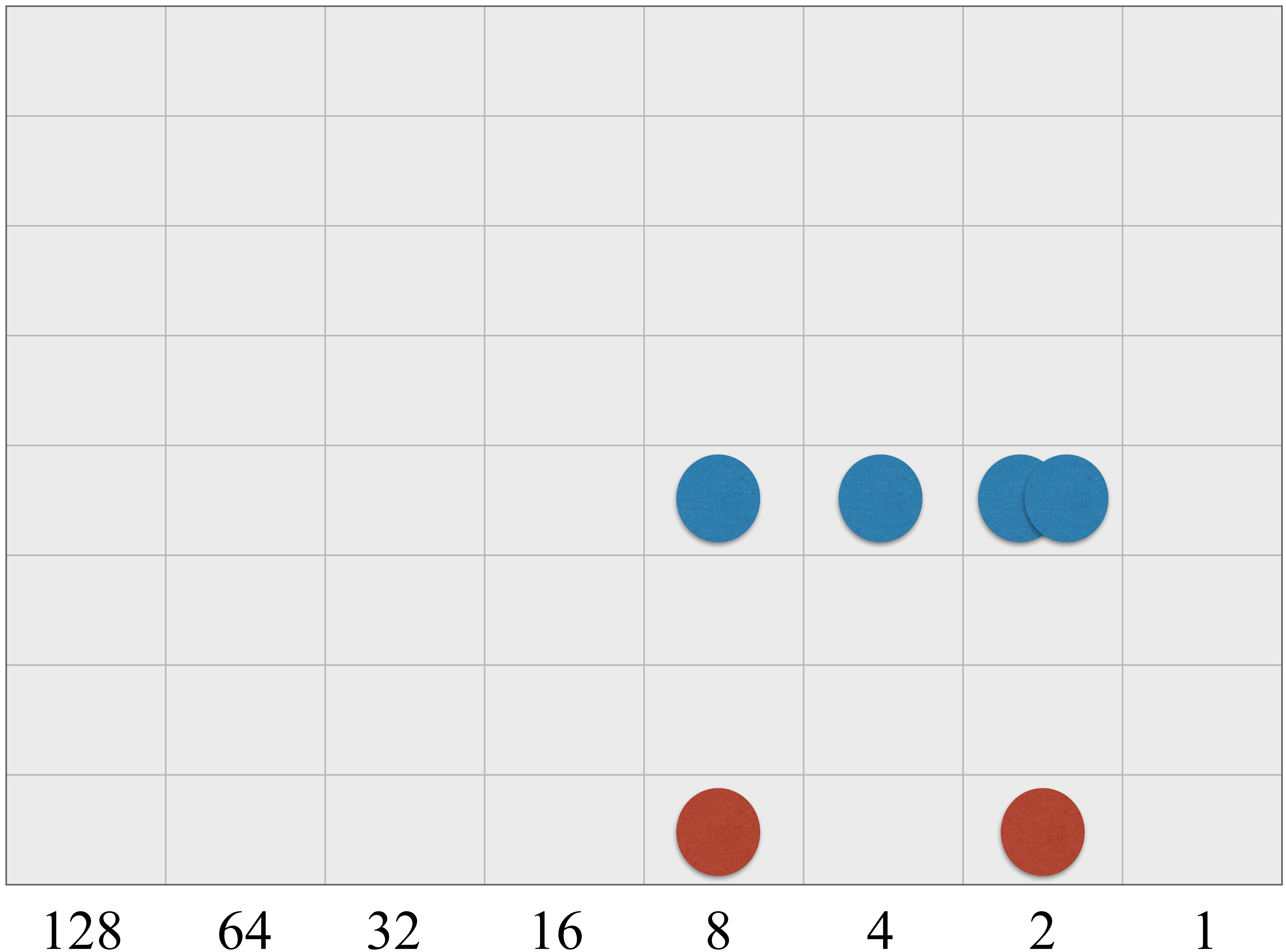
21-15



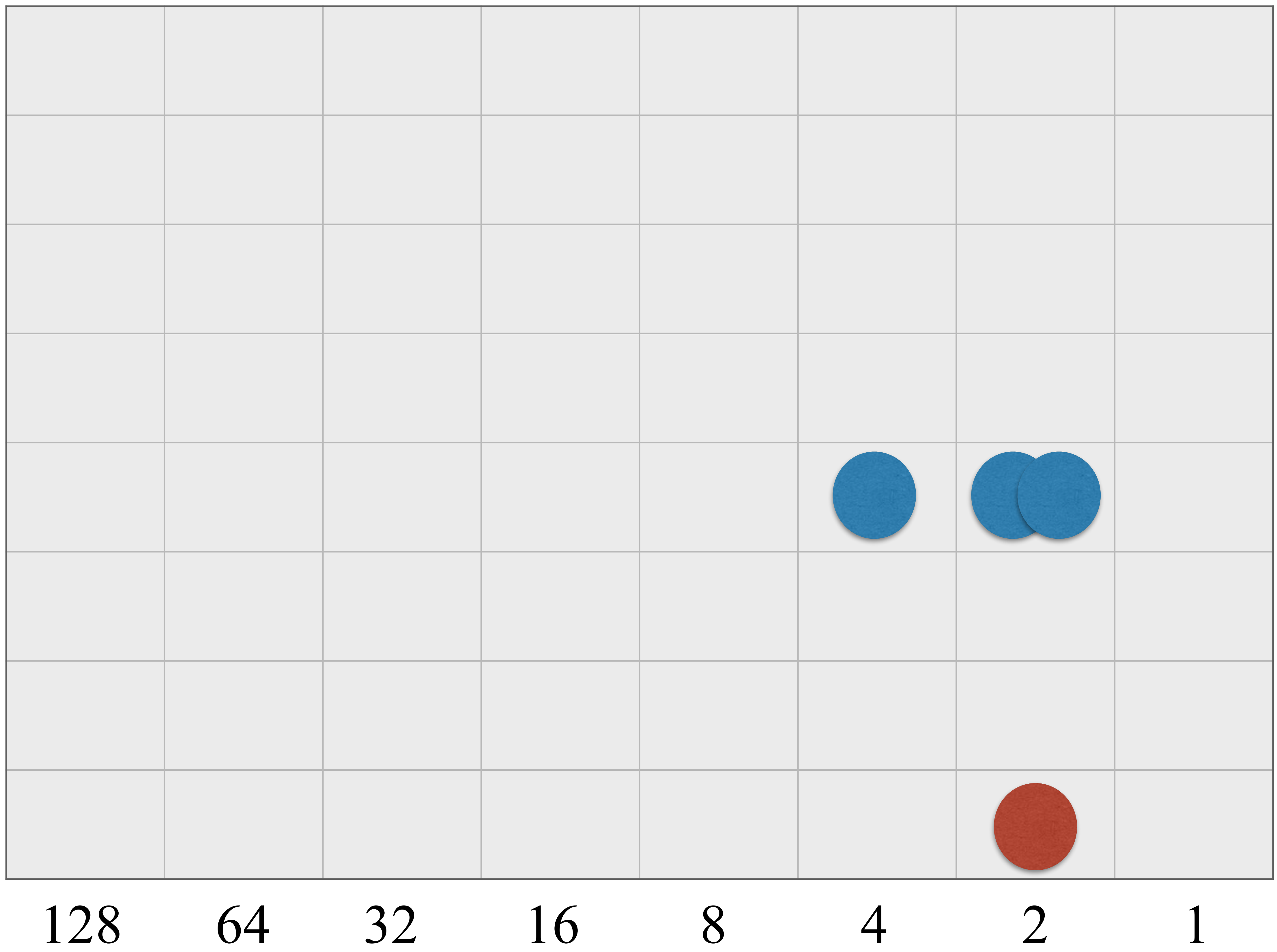
21-15



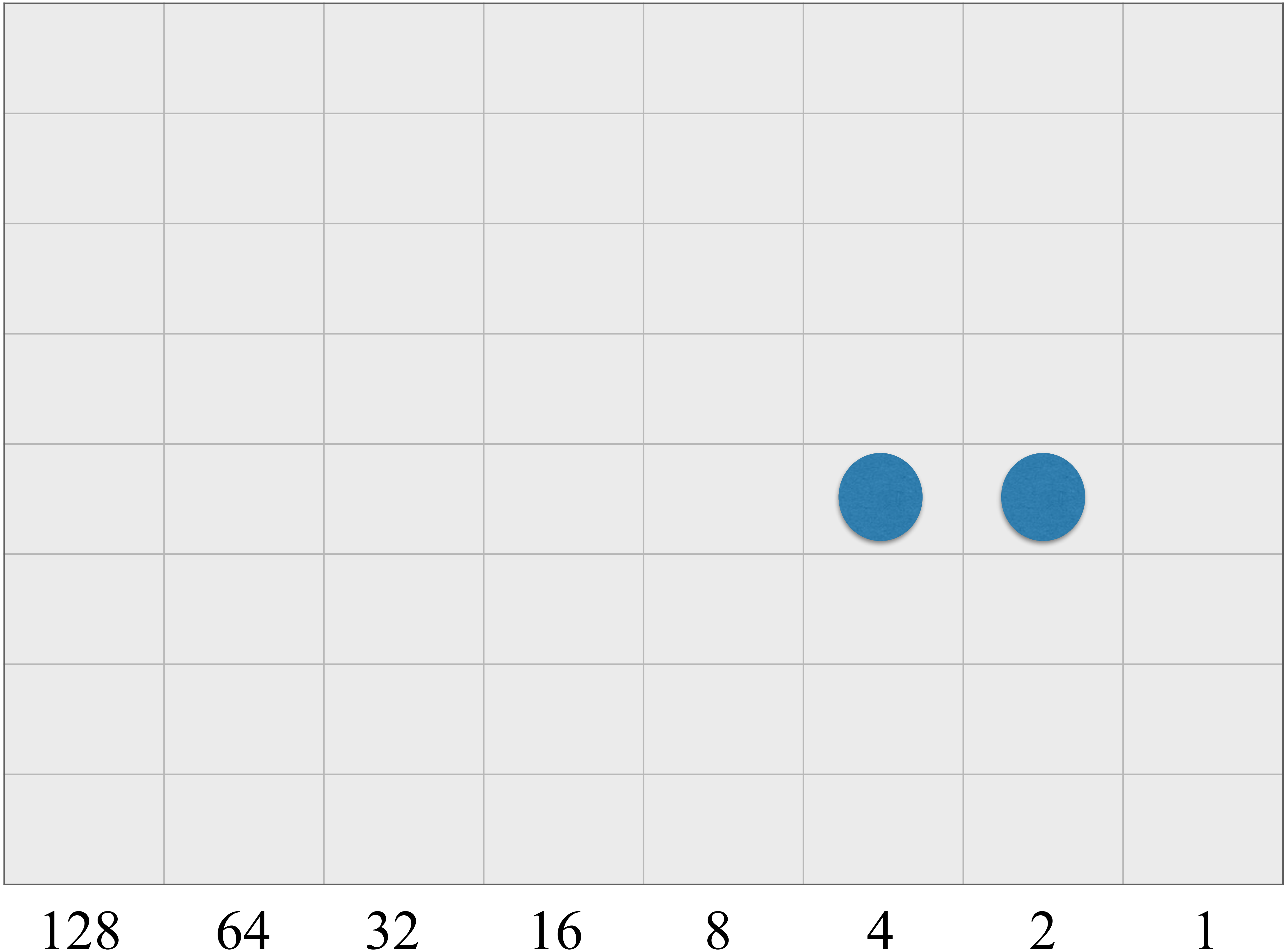
21-15



21-15



21-15=6



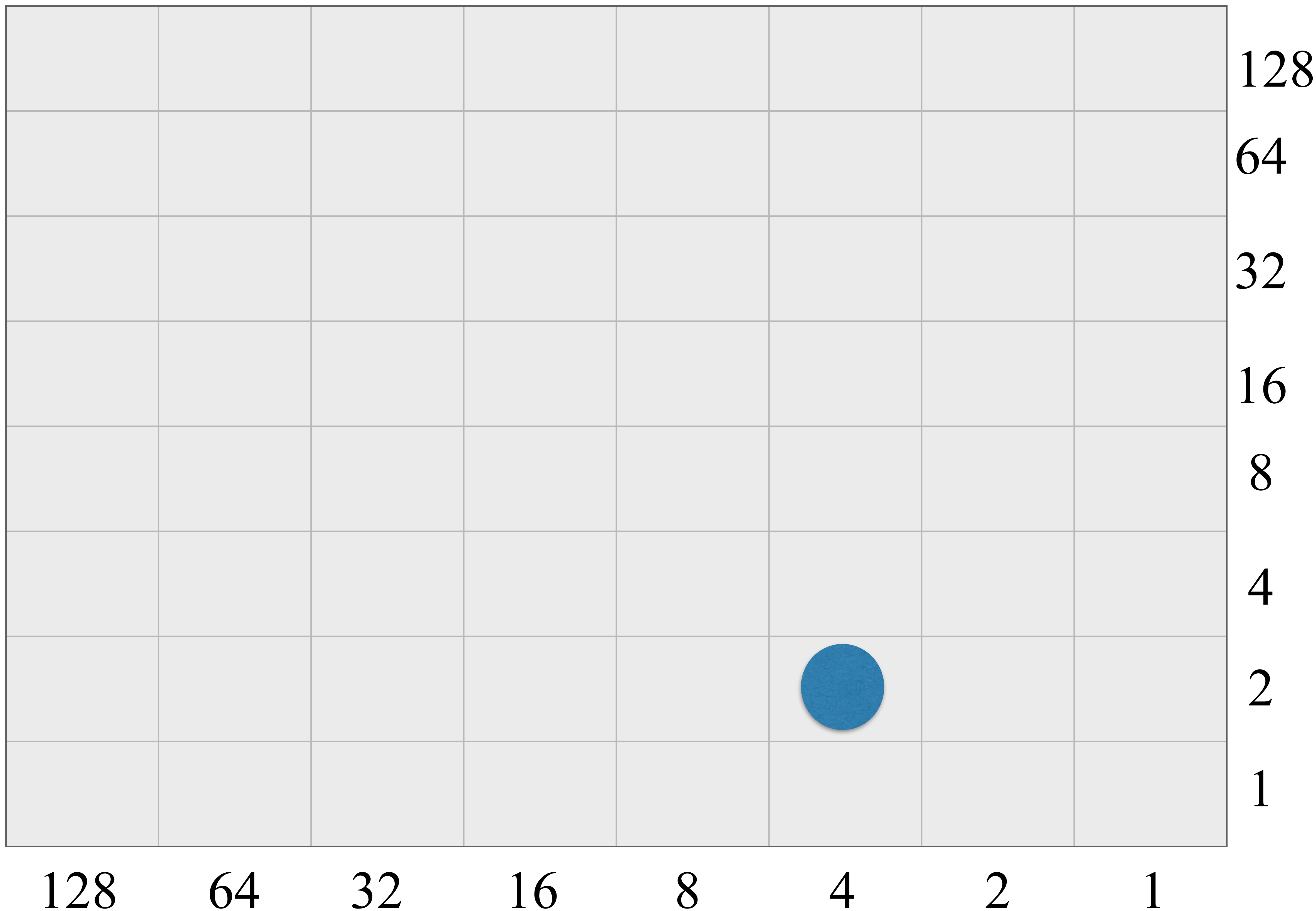
31-14

17-8

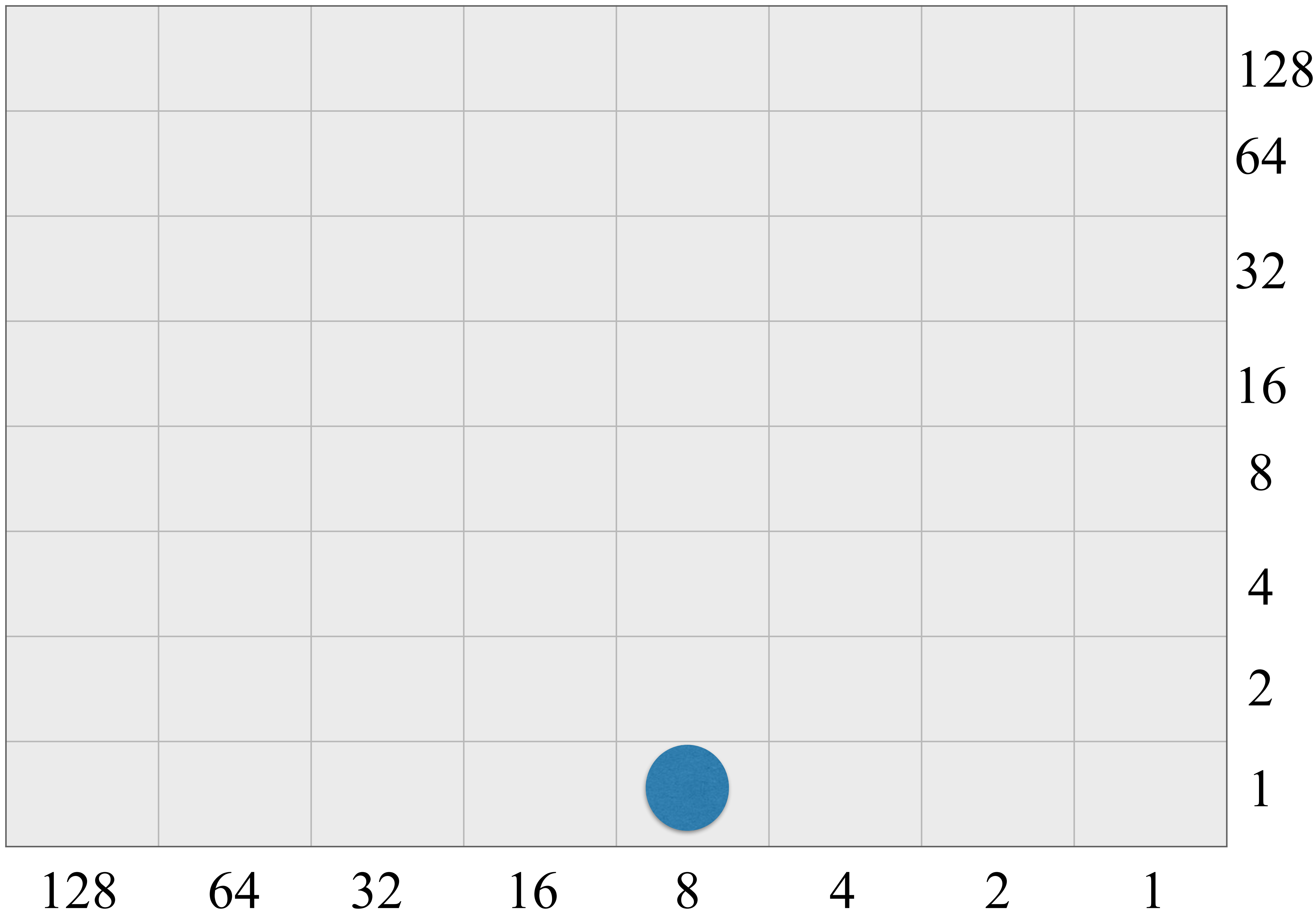
65-2

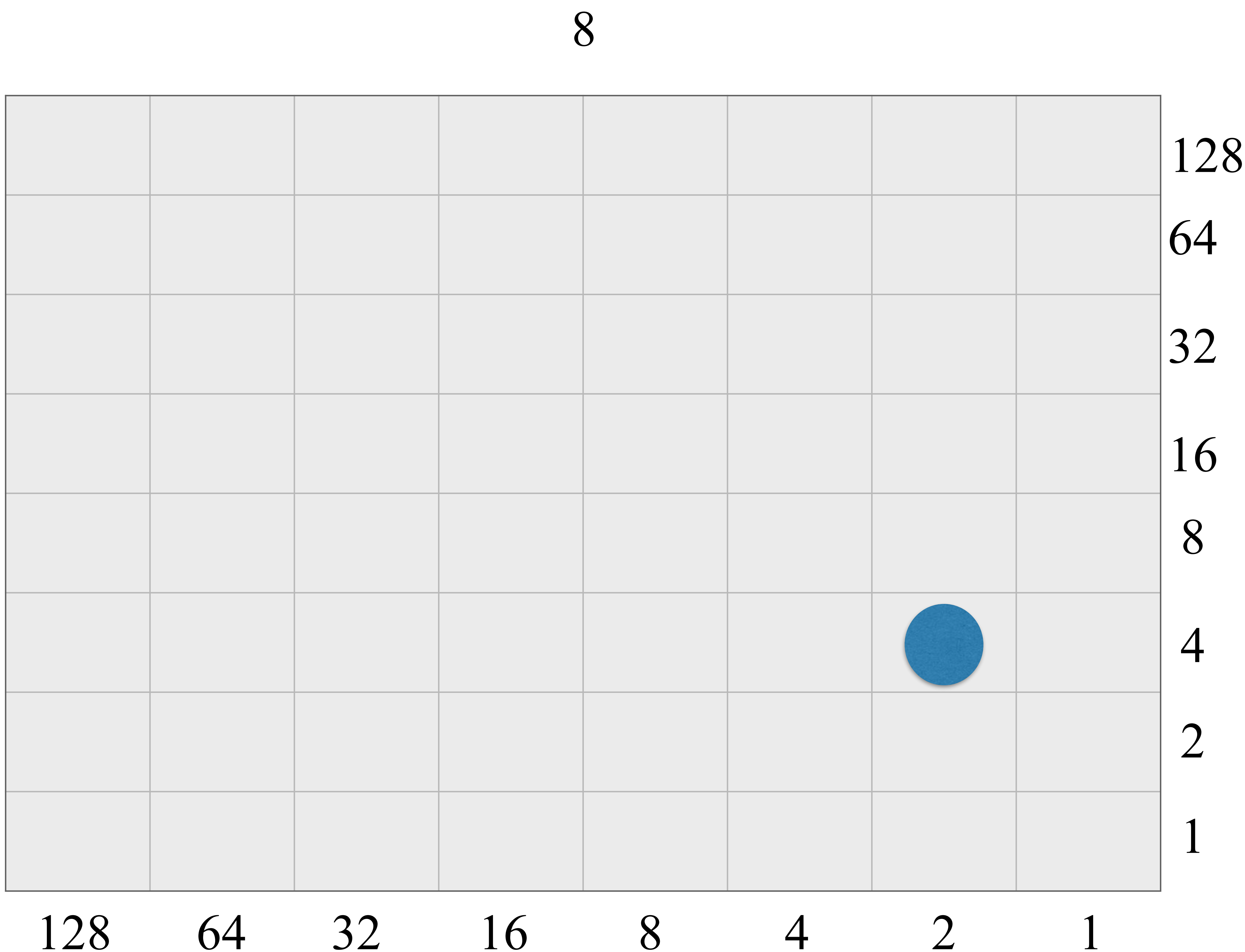
128	64	32	16	8	4	2	1	
								128
								64
								32
								16
								8
								4
								2
								1

8

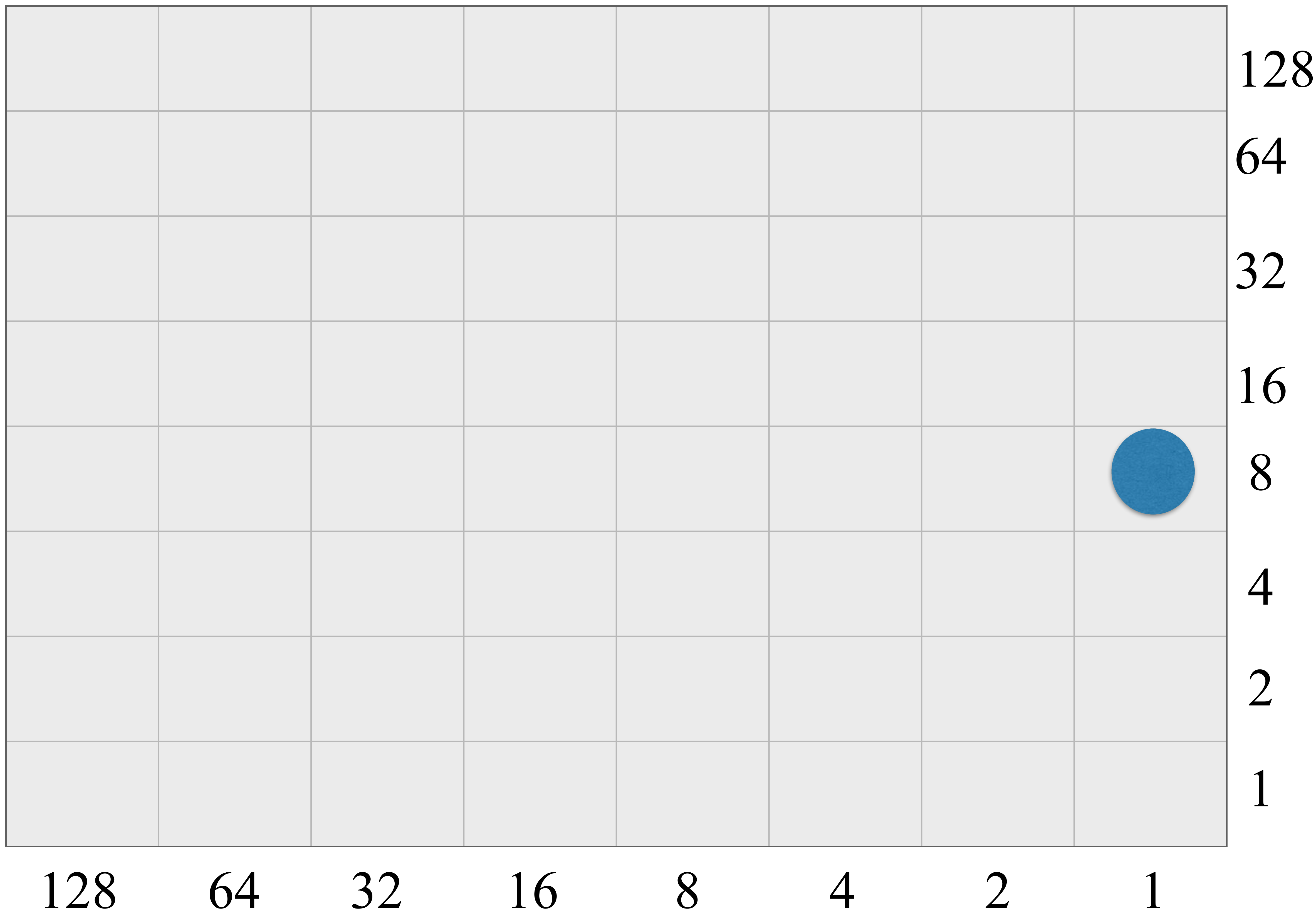


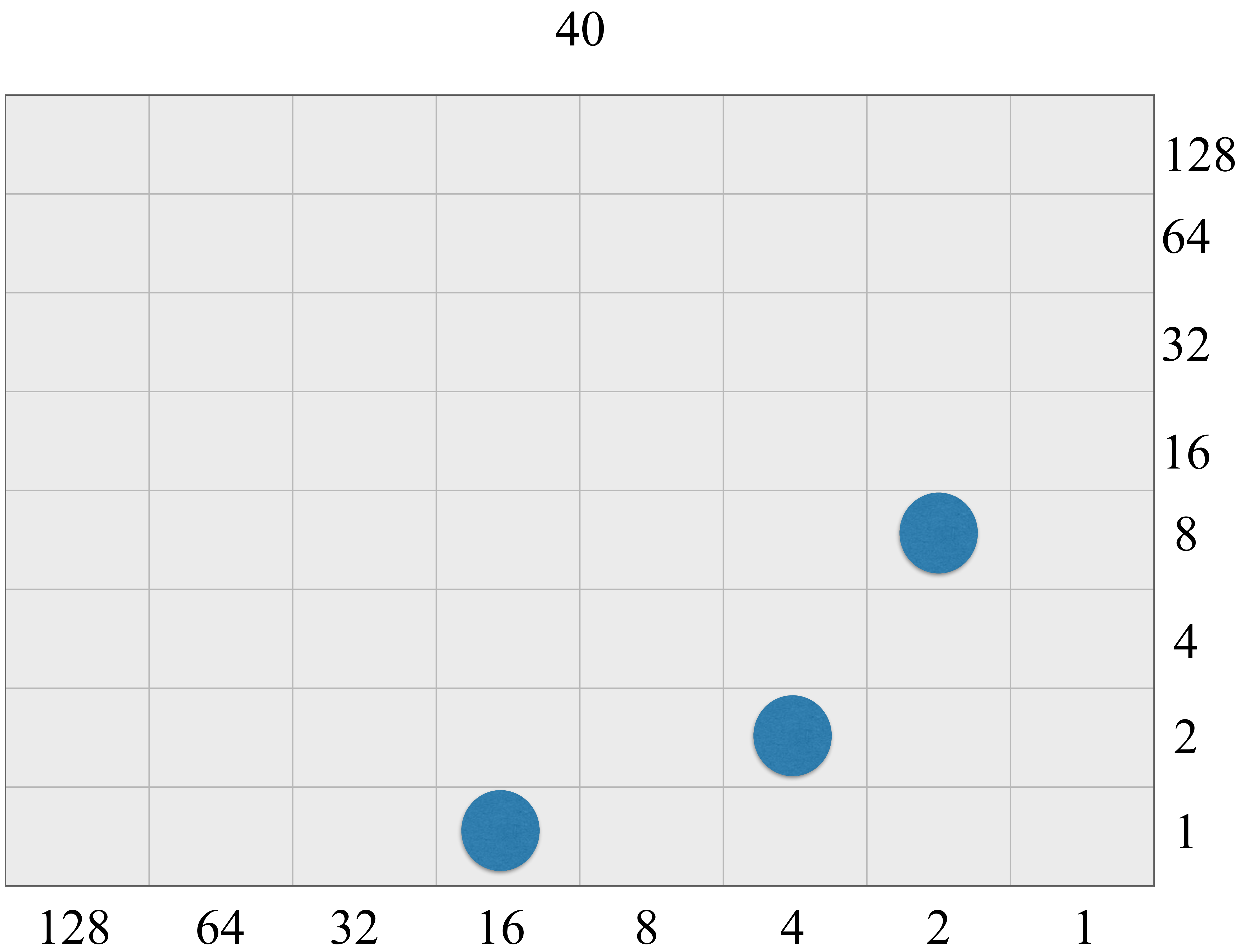
8




8
128
64
32
16
8
4
2
1
128
64
32
16
8
4
2
1

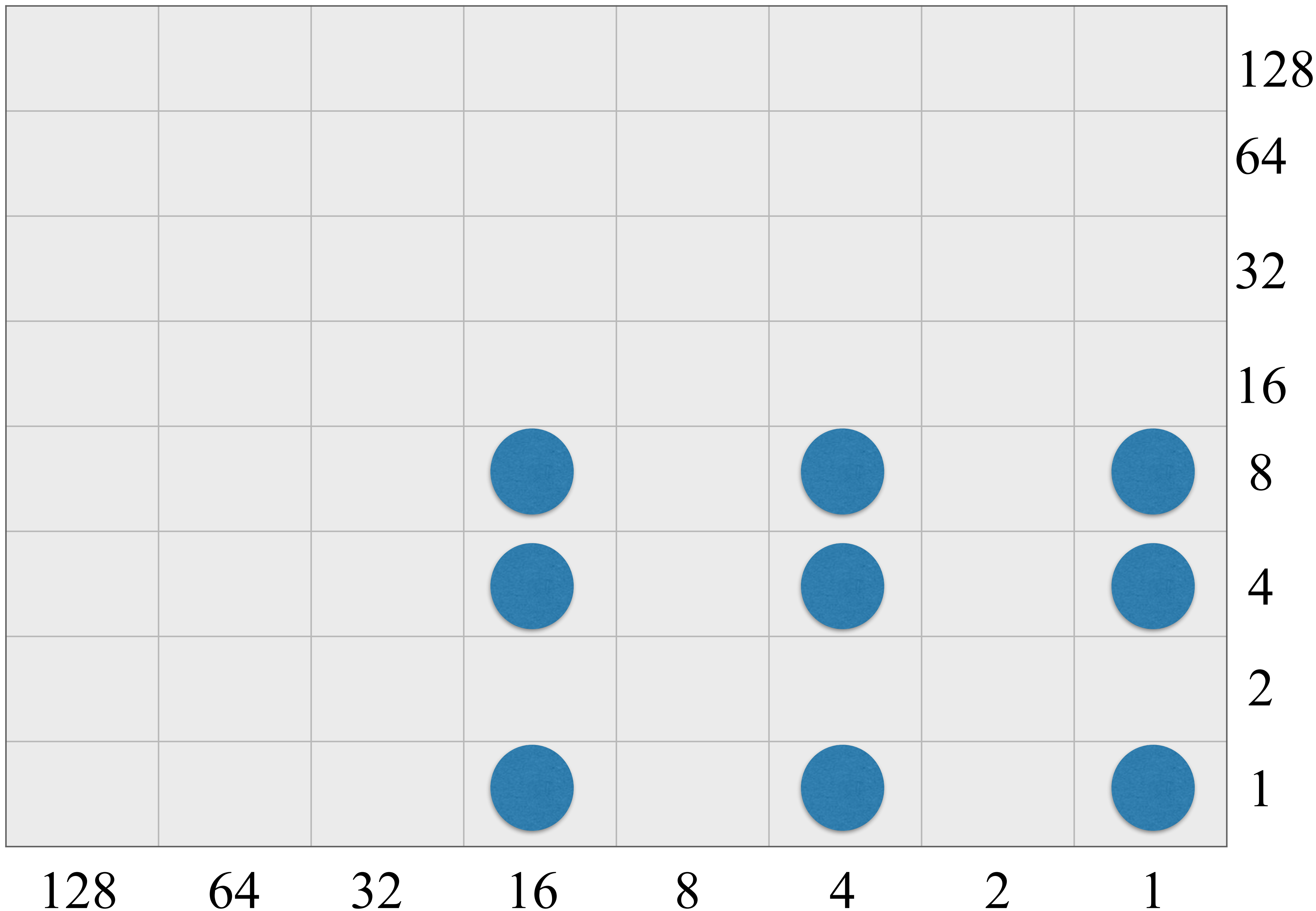
8



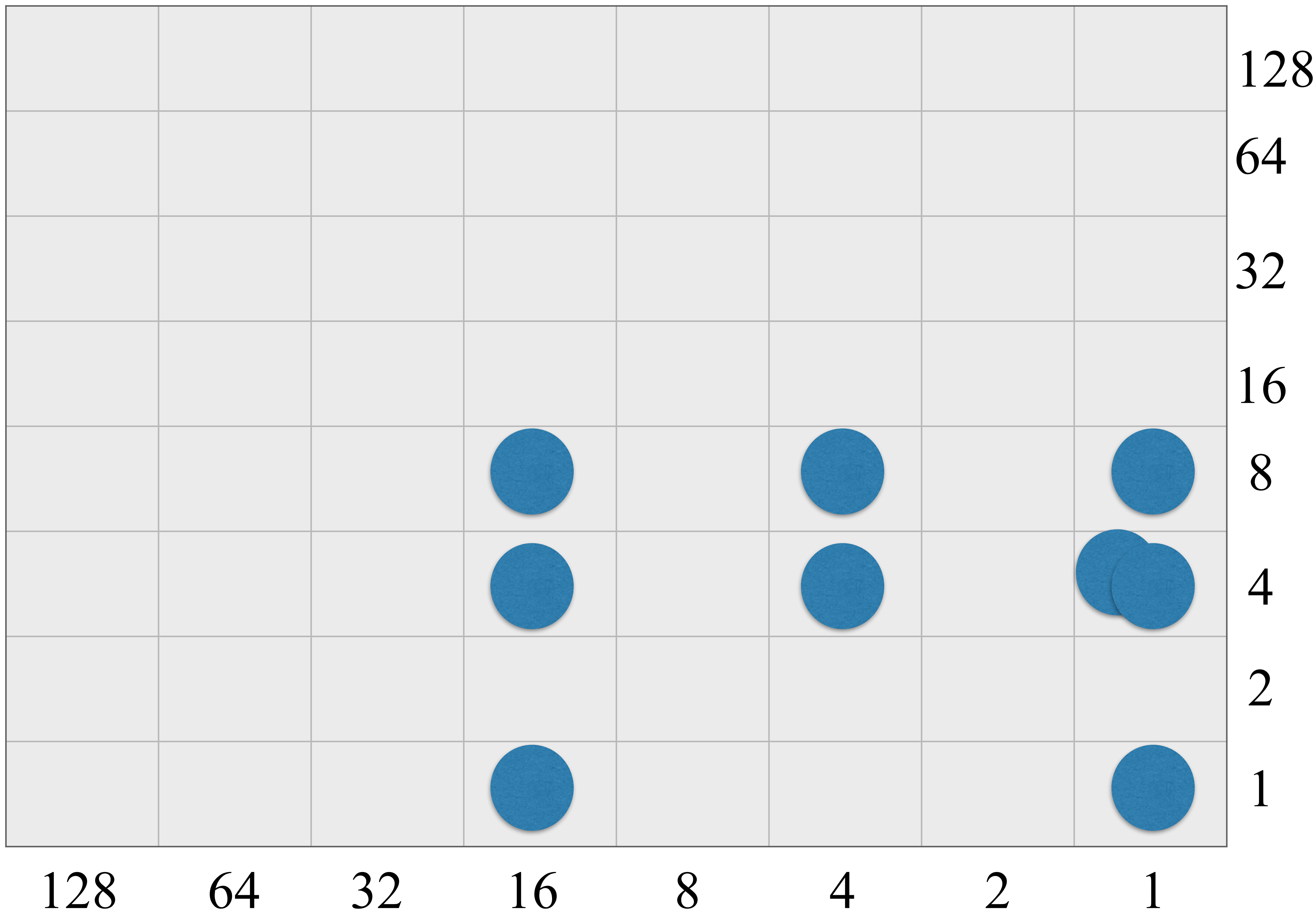

40
128
64
32
16
8
4
2
1
128
64
32
16
8
4
2
1

21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8

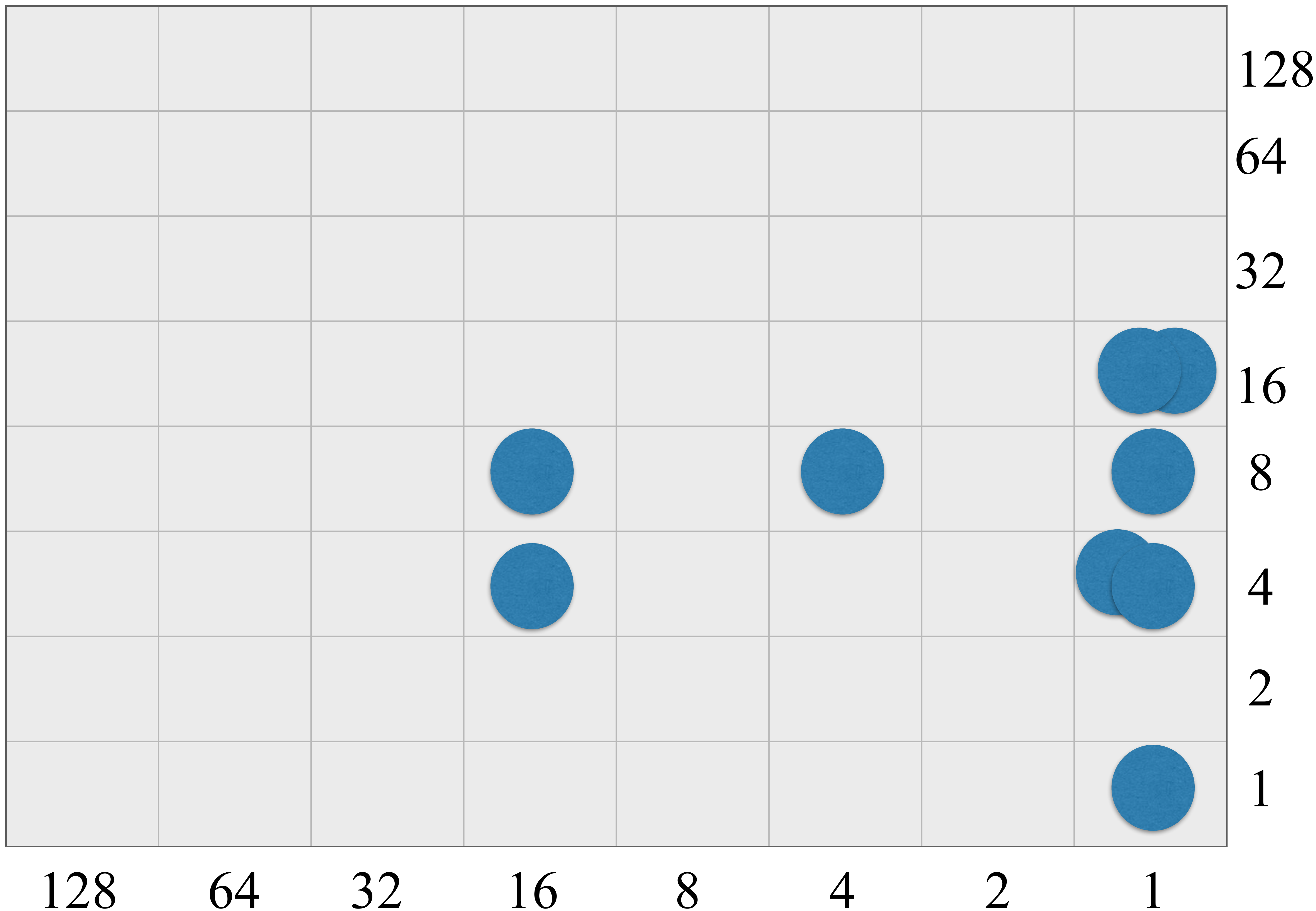
16x1+4x1+1x1+16x4+4x4+1x4+16x8+4x8+1x8



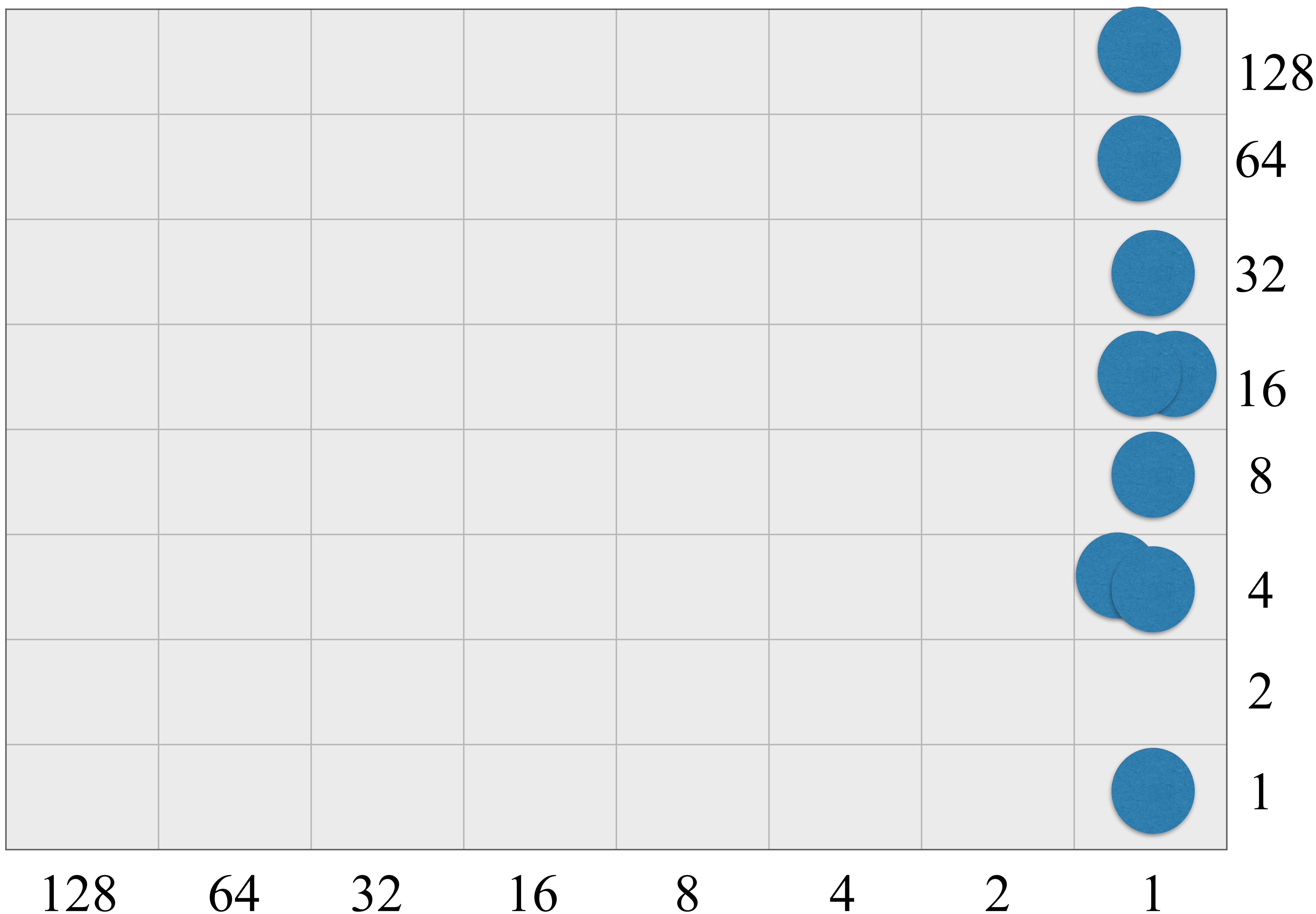
$$21 \times 13 = 21 \times (1+4+8) = 21 \times 1 + 21 \times 4 + 21 \times 8$$



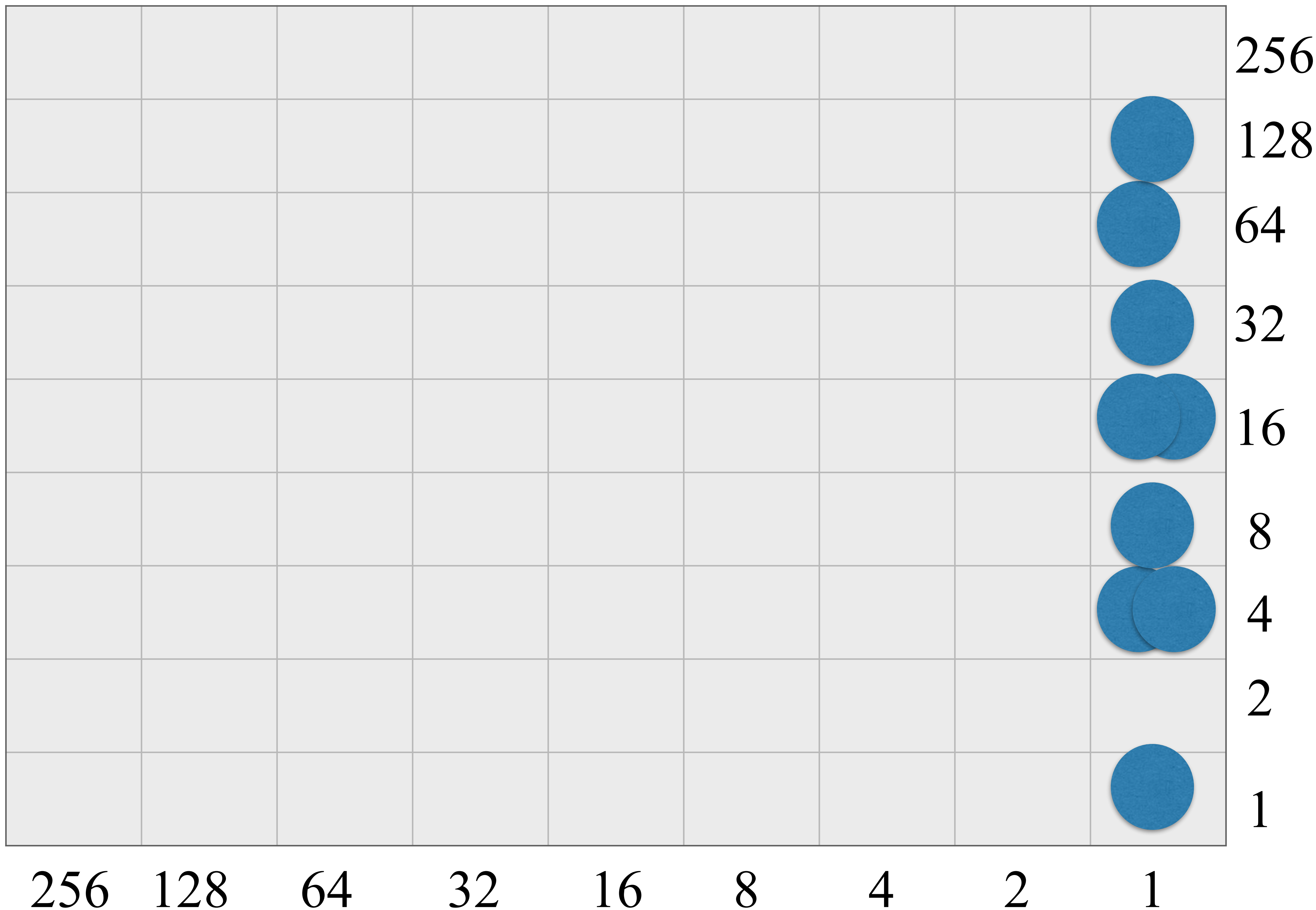
$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8$$



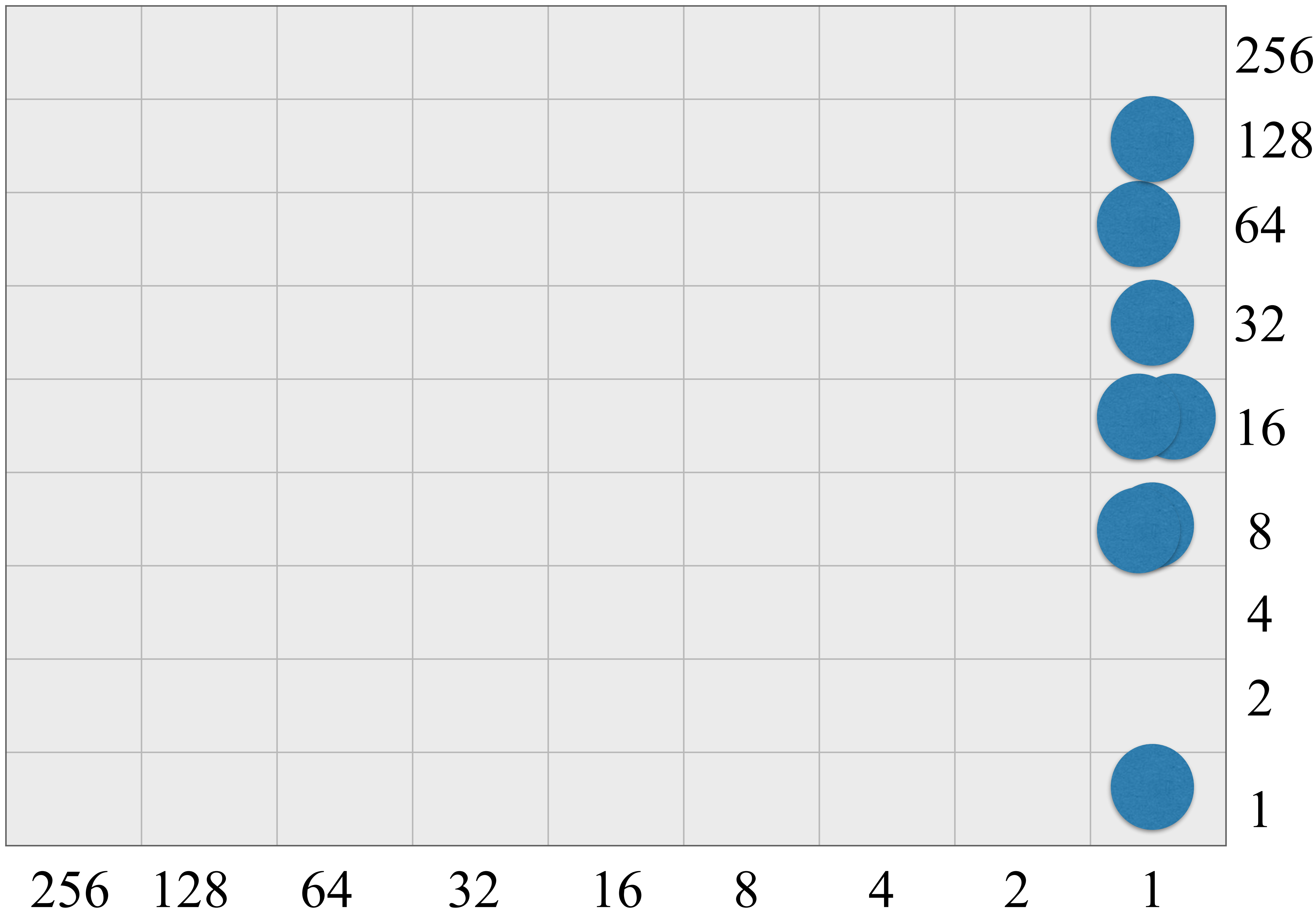
$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8$$



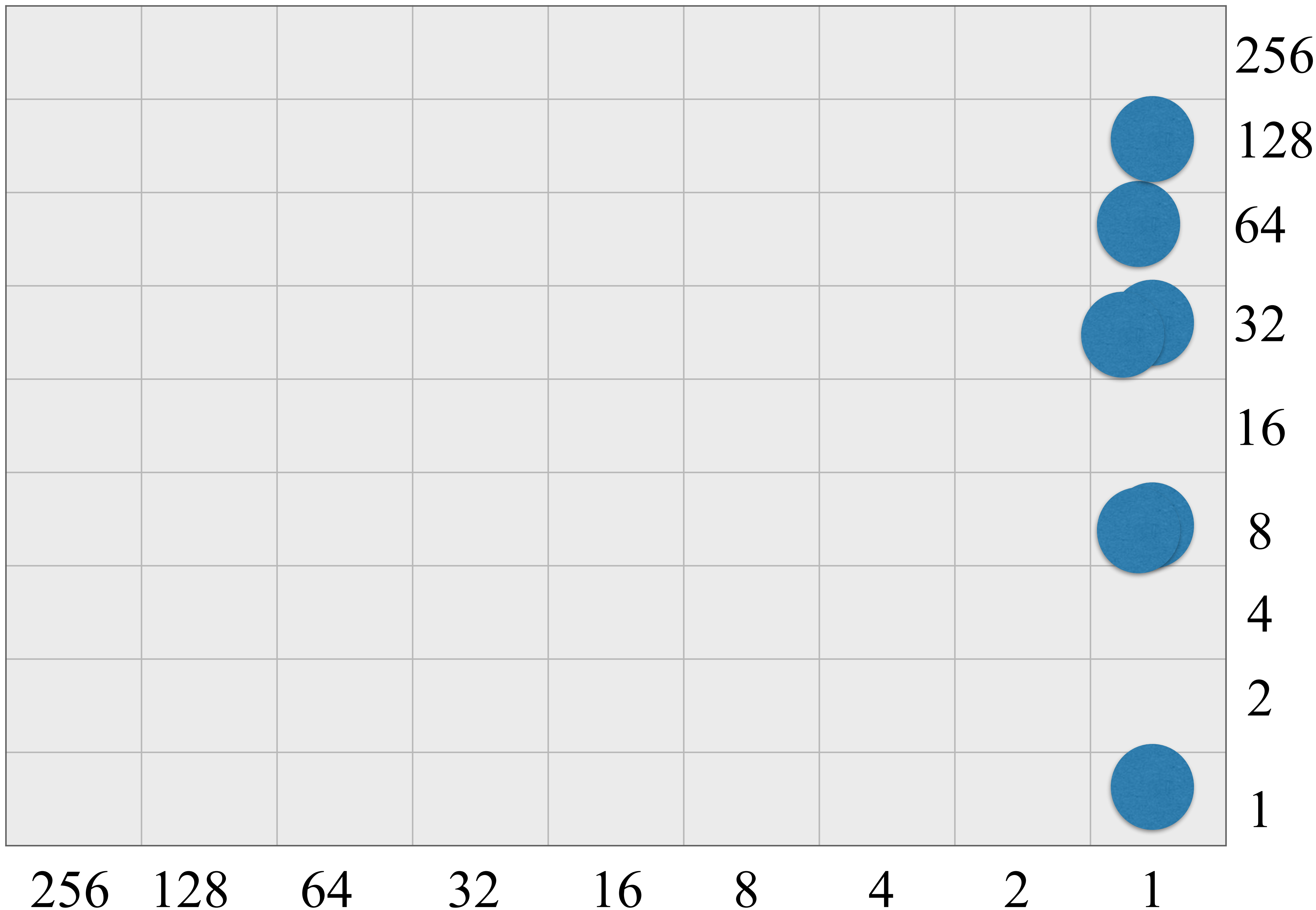
$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8$$



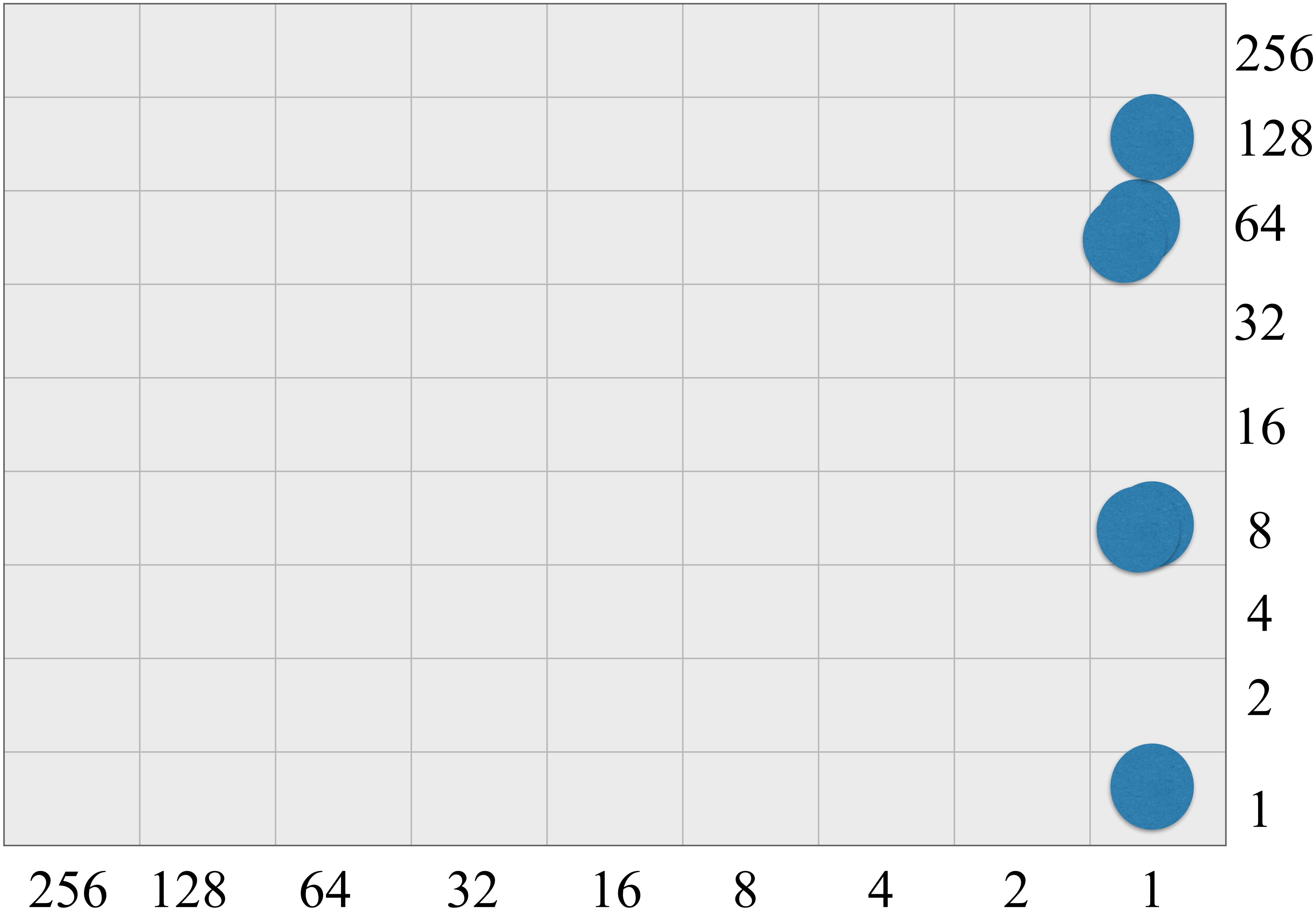
$$21 \times 13 = 21 \times (1+4+8) = 21 \times 1 + 21 \times 4 + 21 \times 8$$



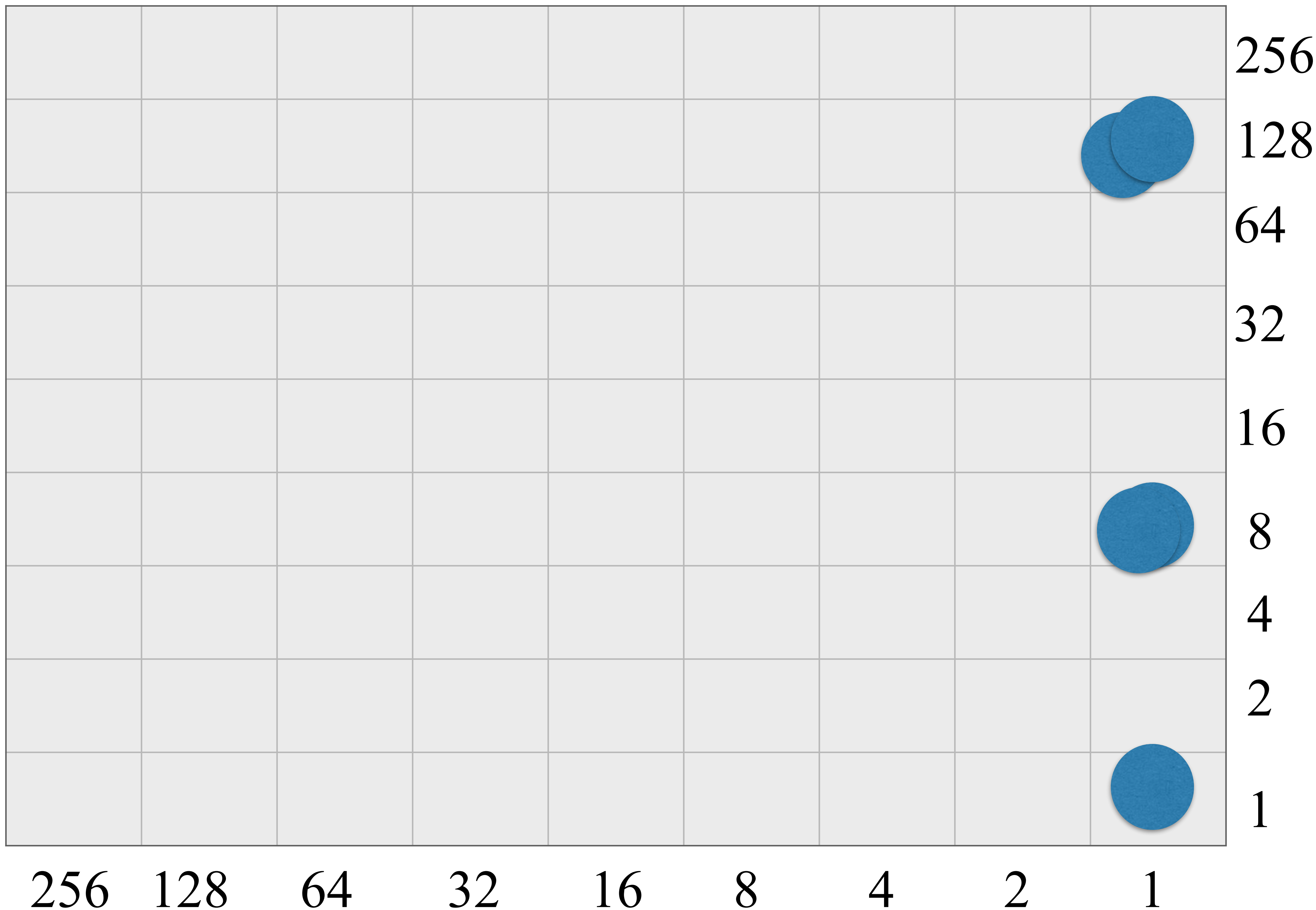
$$21 \times 13 = 21 \times (1+4+8) = 21 \times 1 + 21 \times 4 + 21 \times 8$$



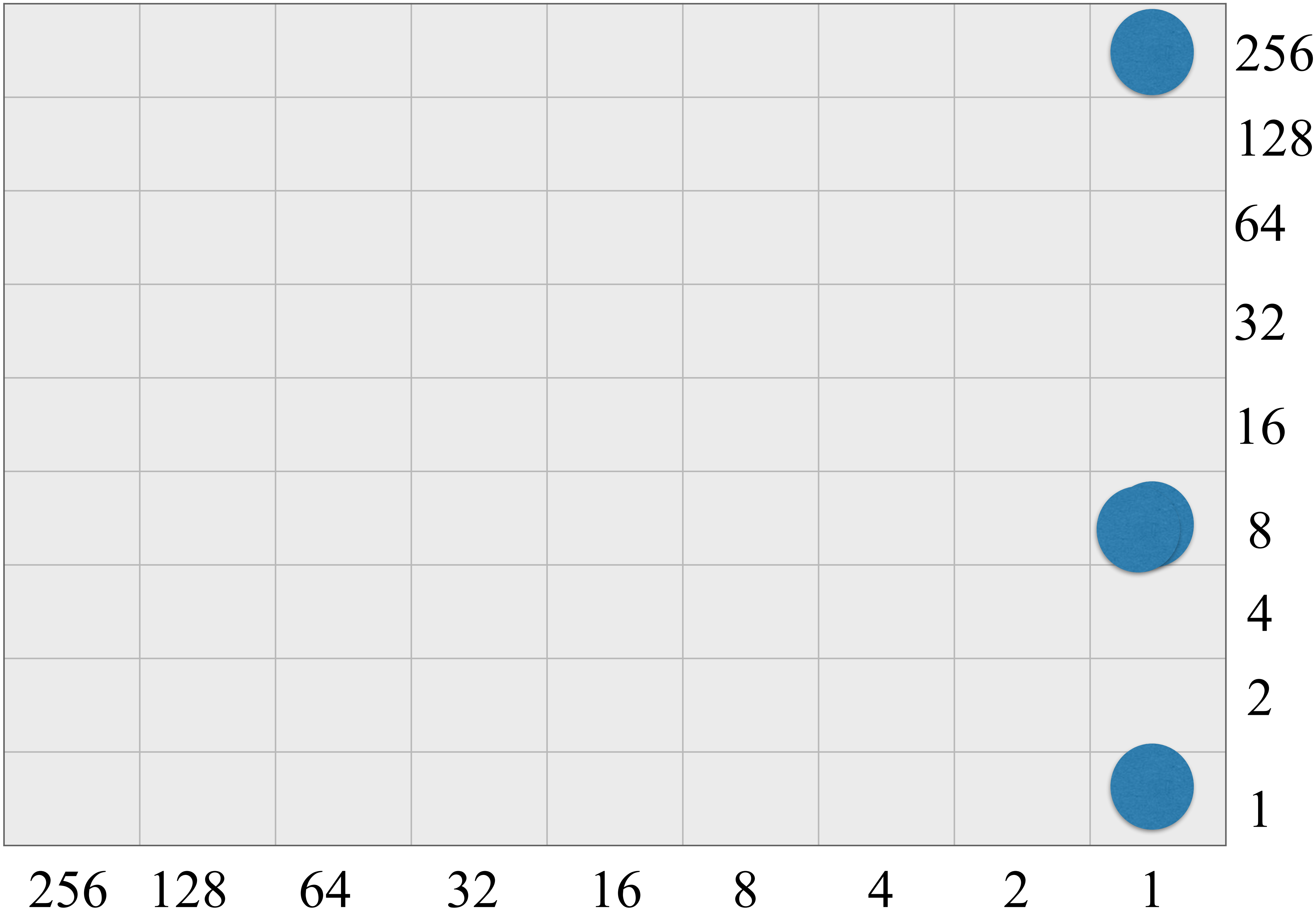
21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8



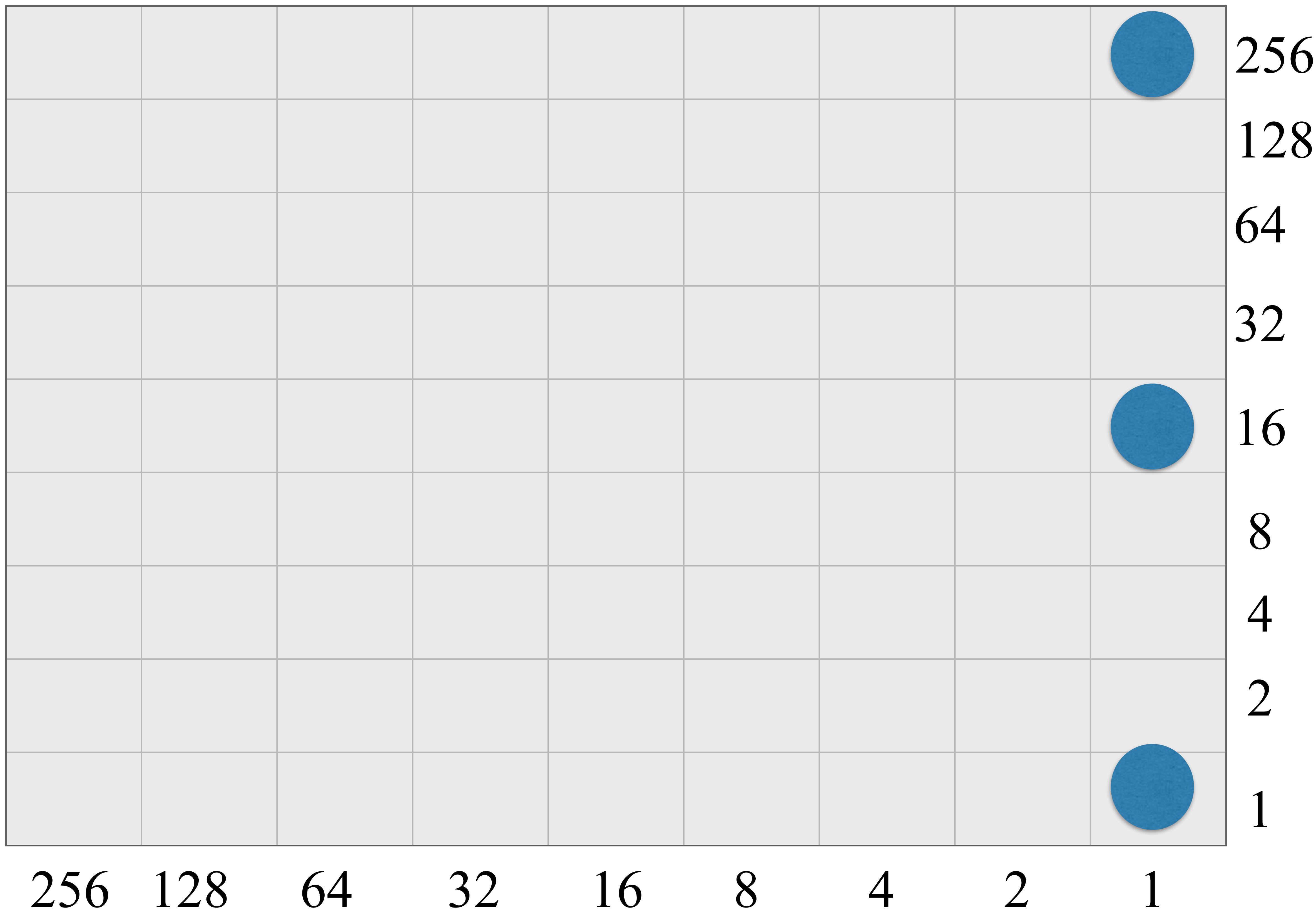
$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8$$



$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8$$



$$21x13 = 21x(1+4+8)=21x1+21x4+21x8=273$$

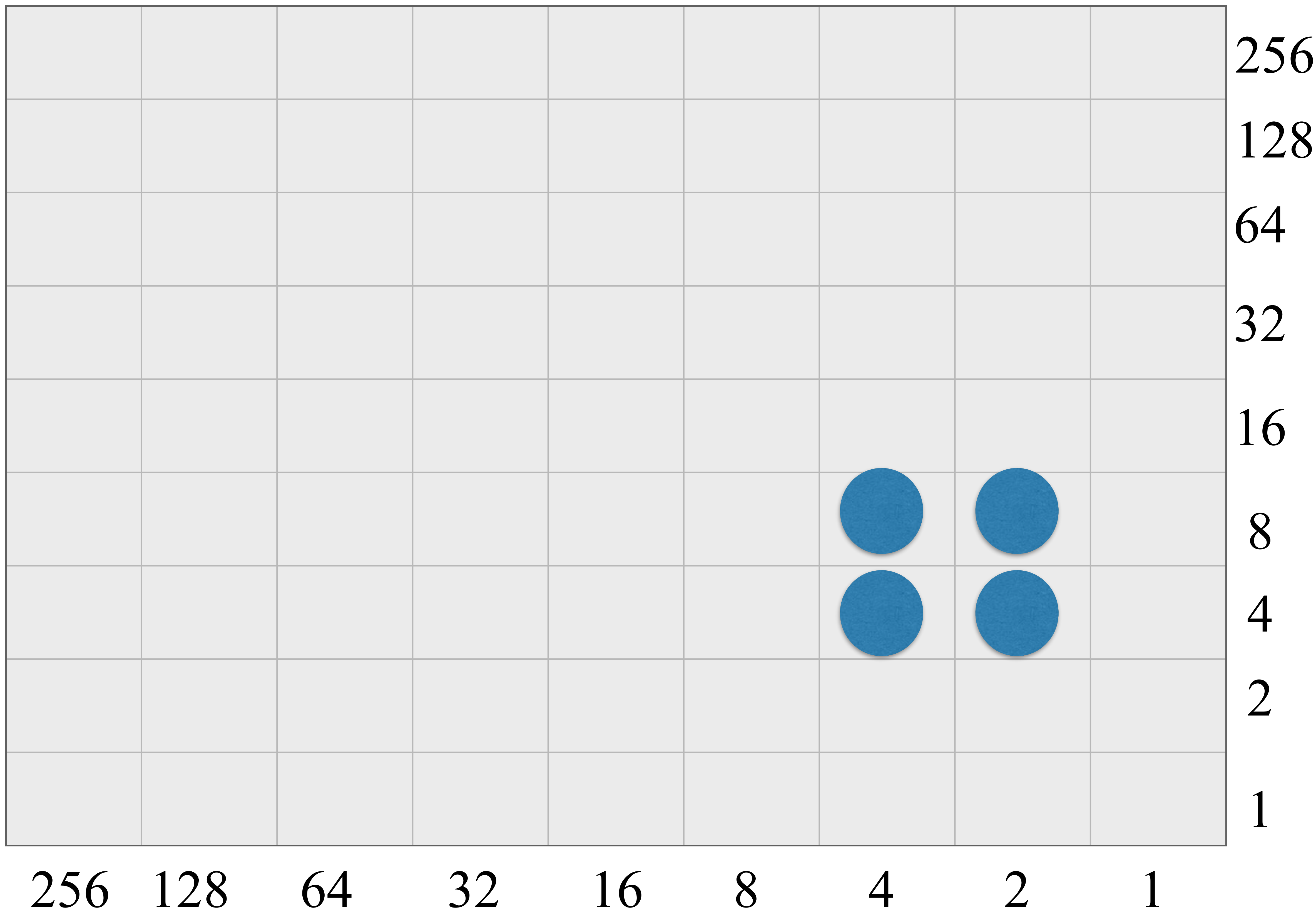


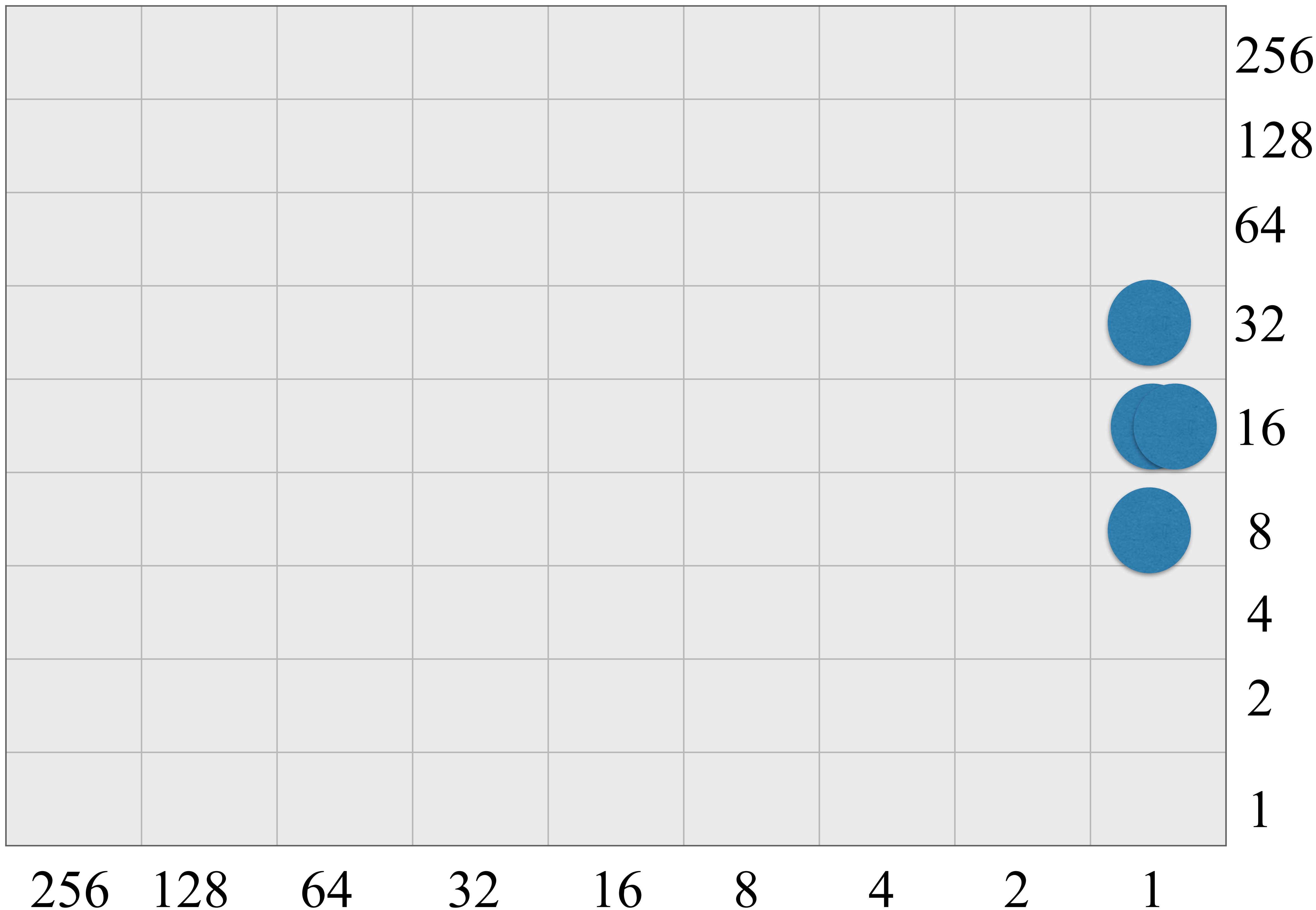
6x12

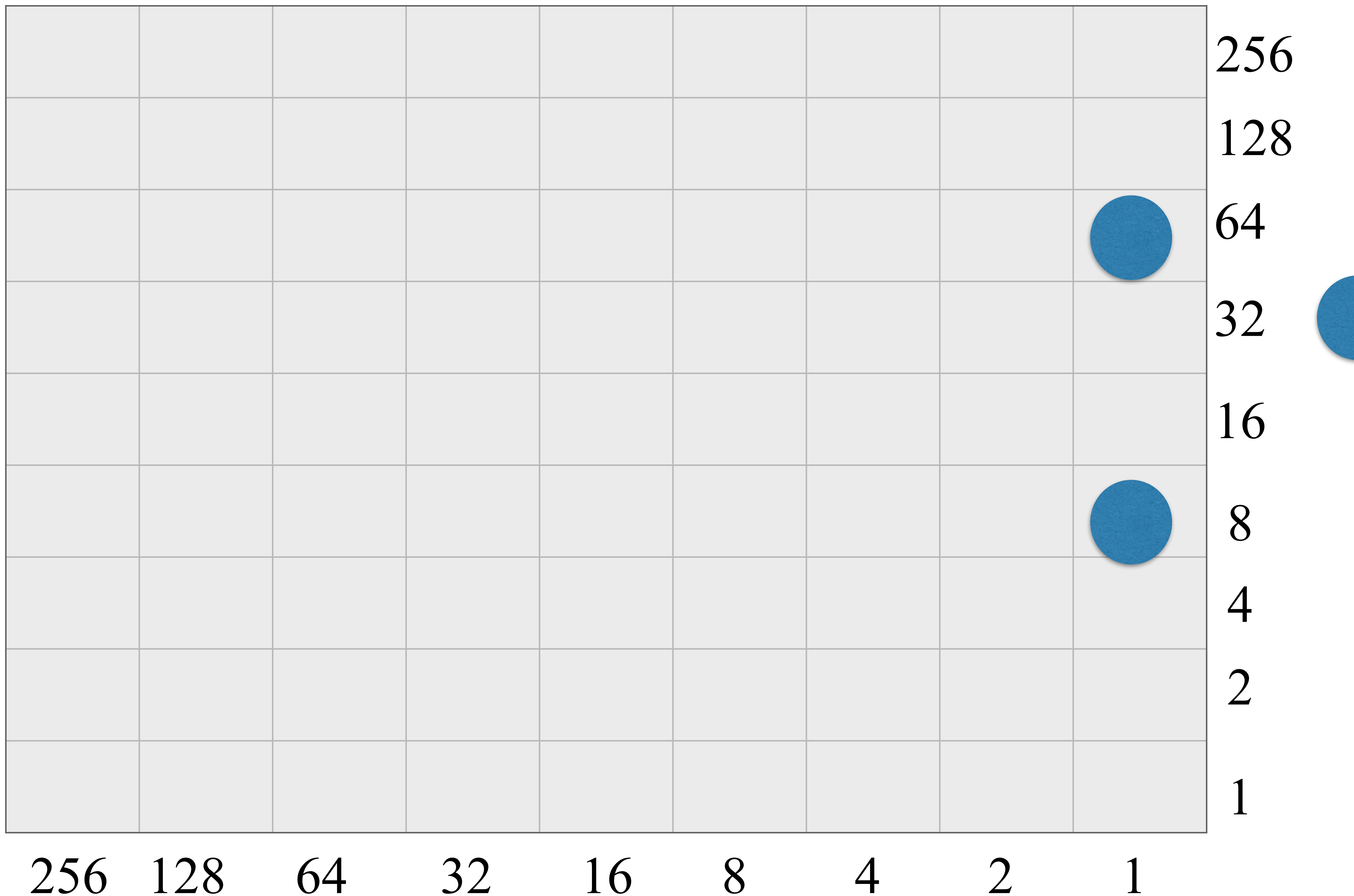
5x20

13x13

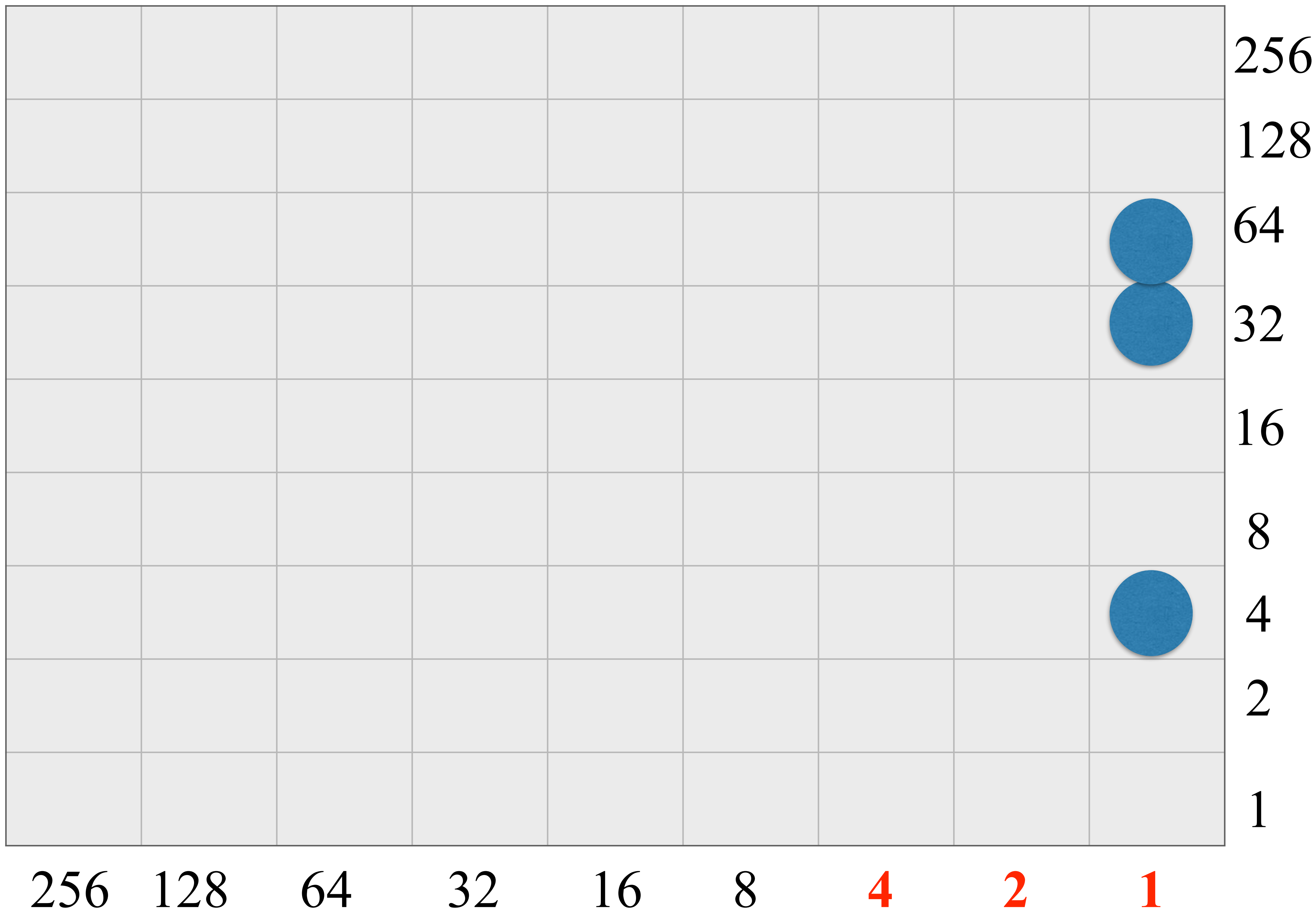
6 x 12



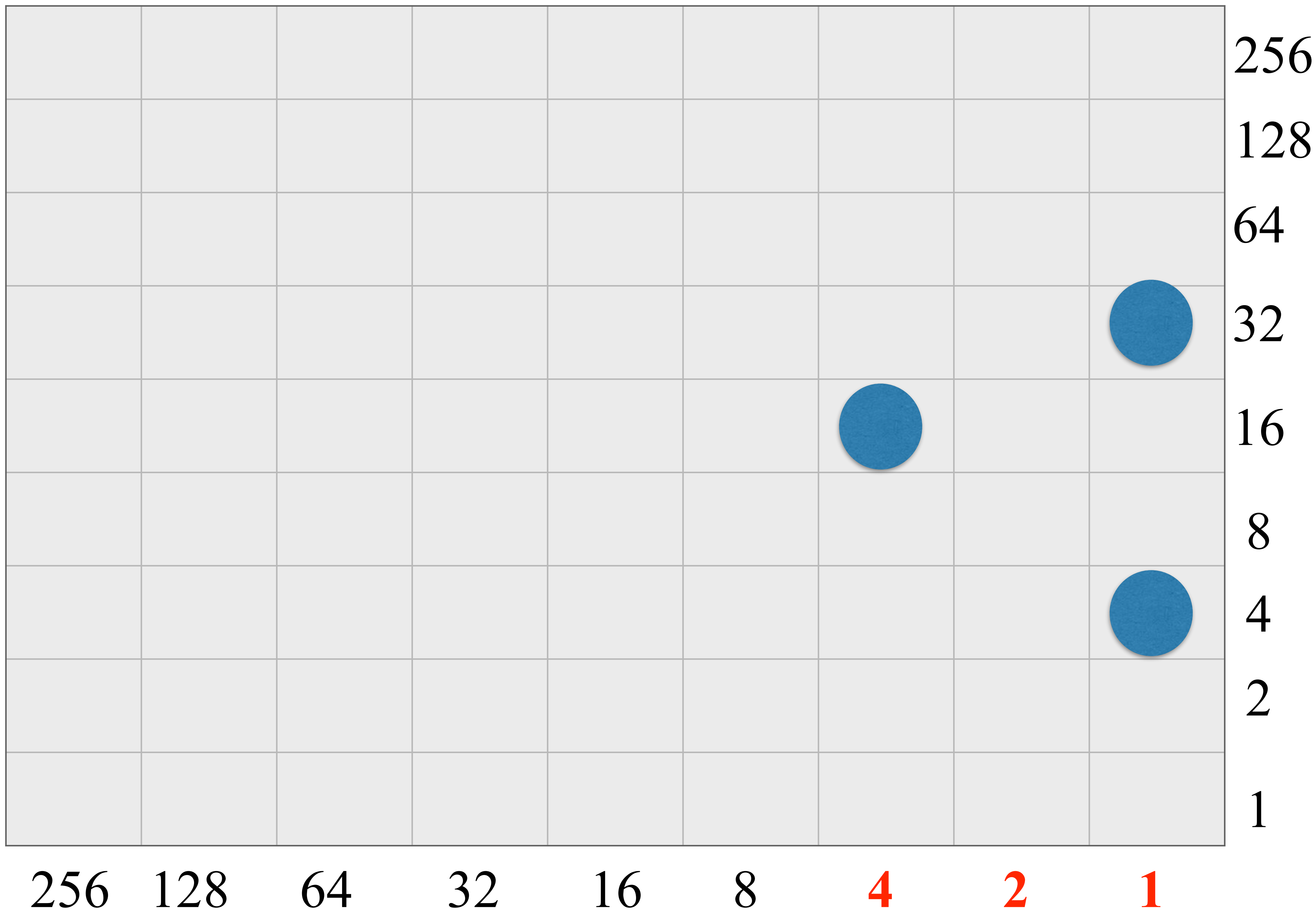

256
128
64
32
16
8
4
2
1
256
128
64
32
16
8
4
2
1


256
128
64
32
16
8
4
2
1
256
128
64
32
16
8
4
2
1

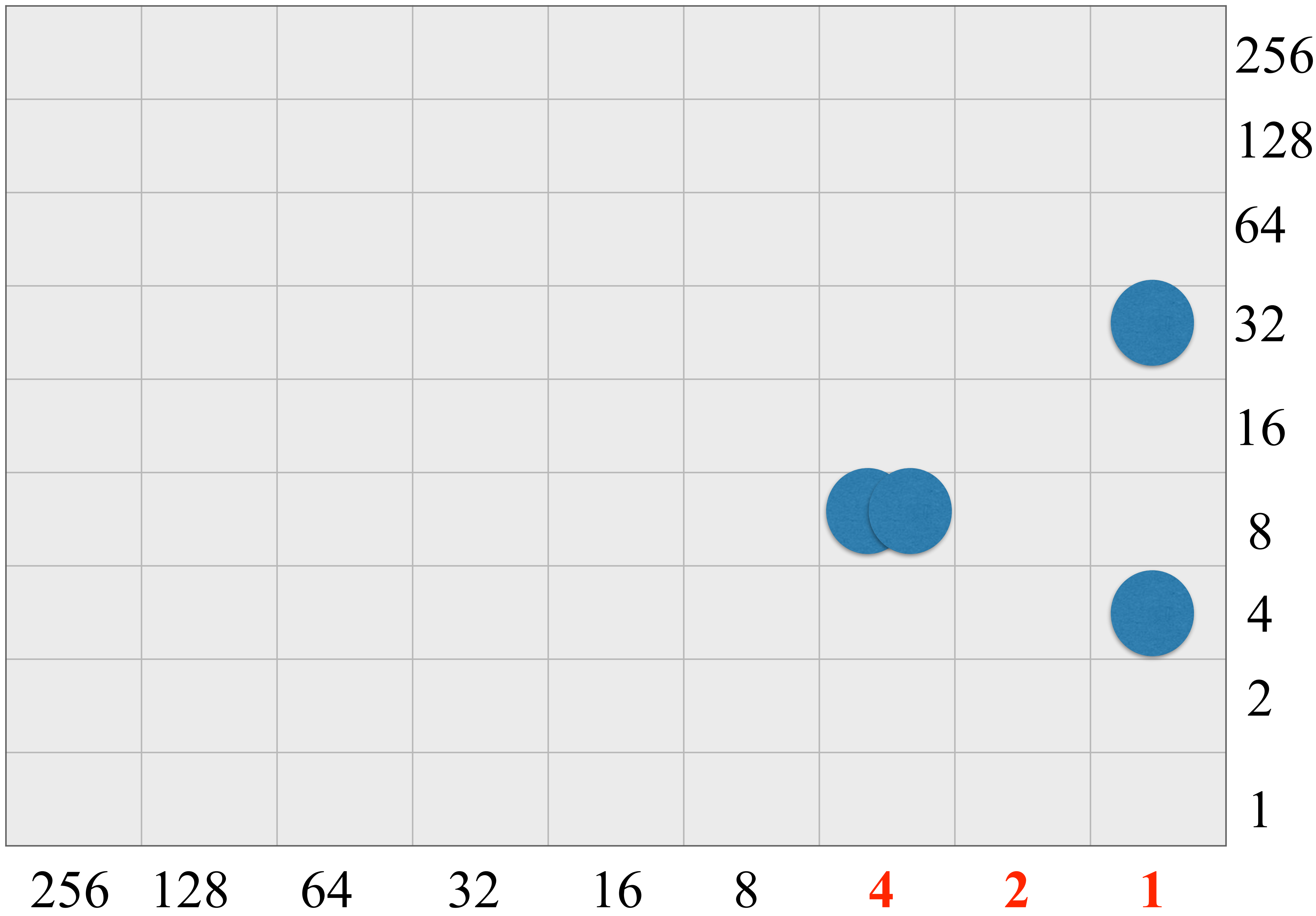
Como dividir? 100/7



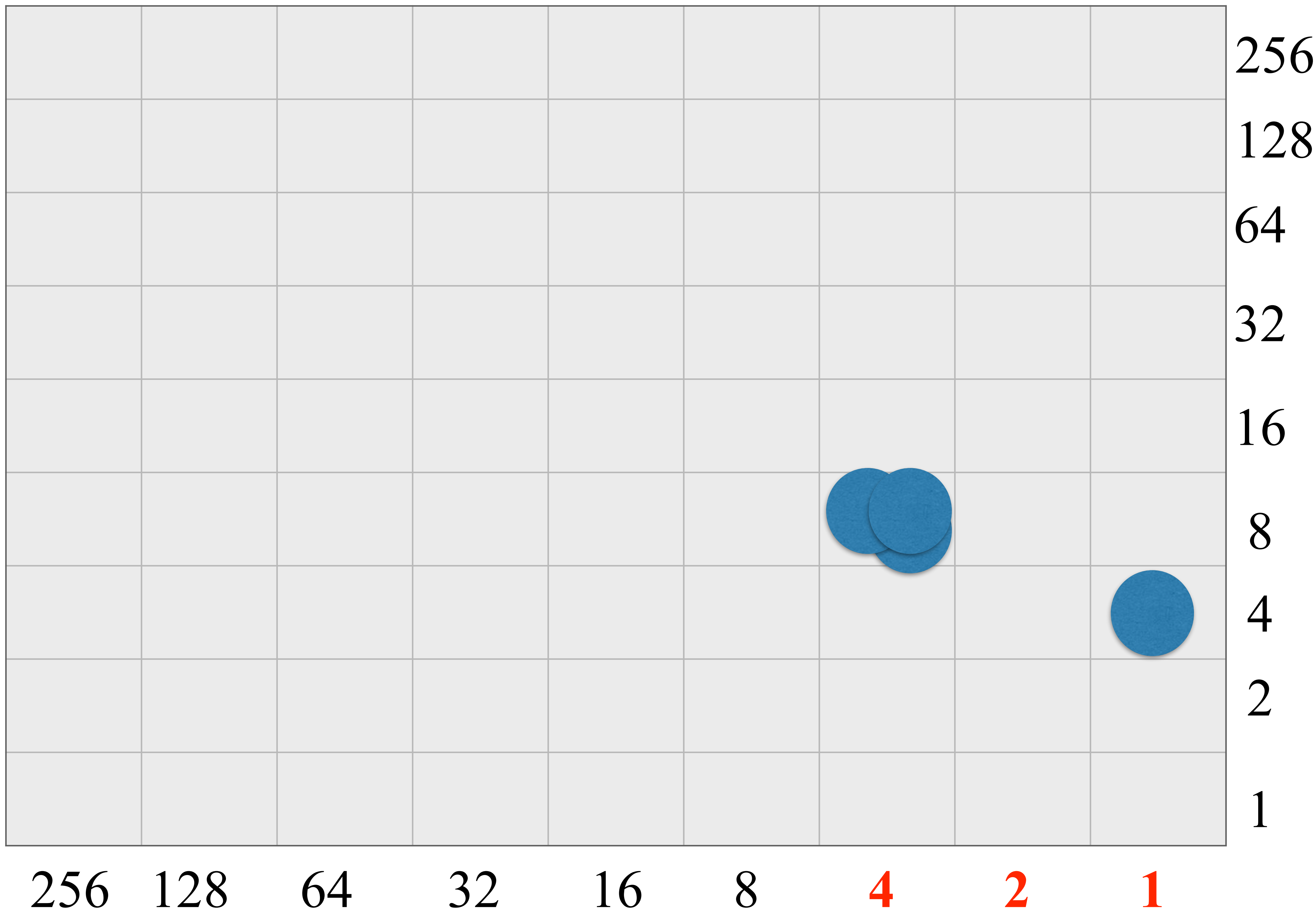
Como dividir? 100/7



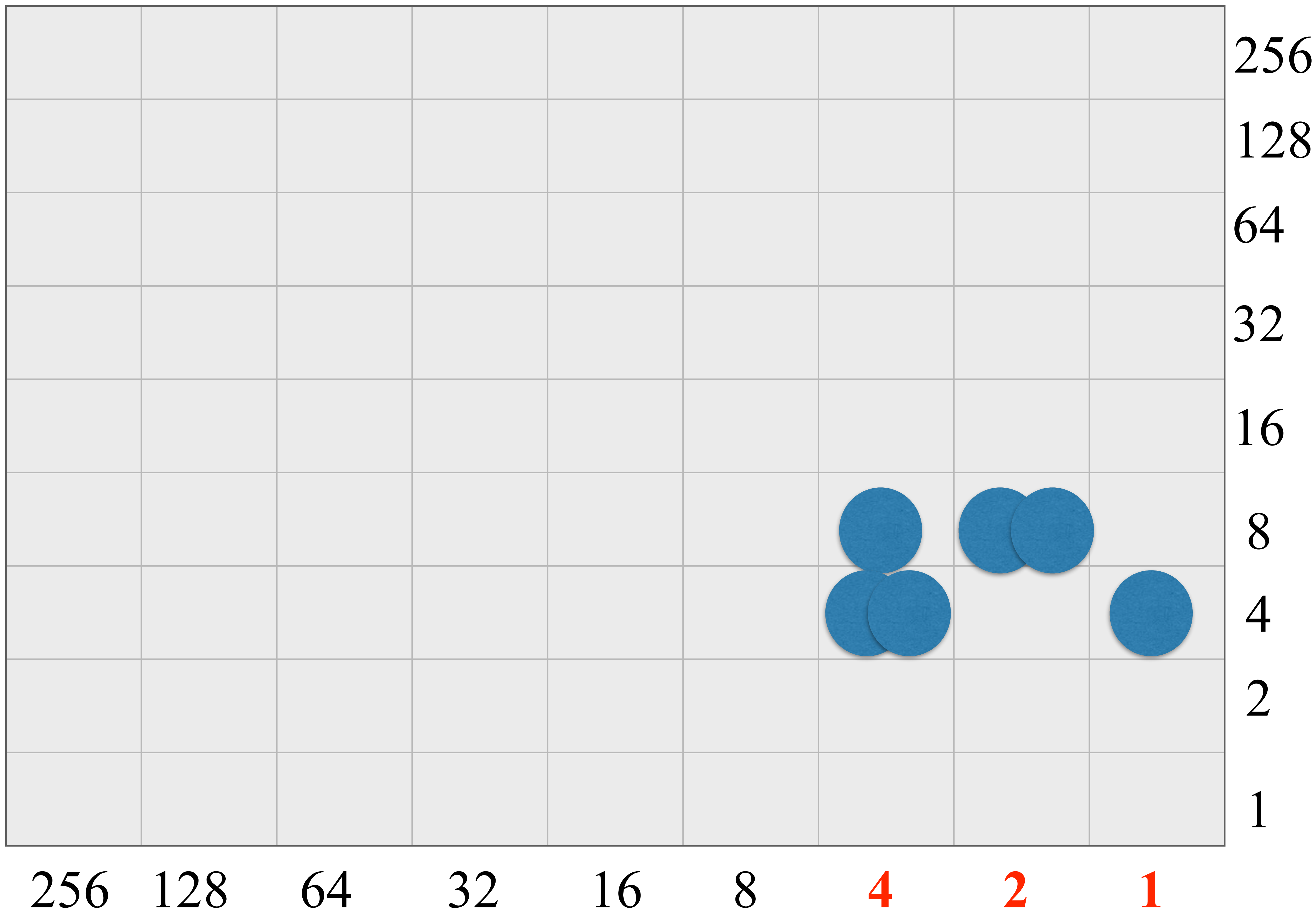
Como dividir? 100/7



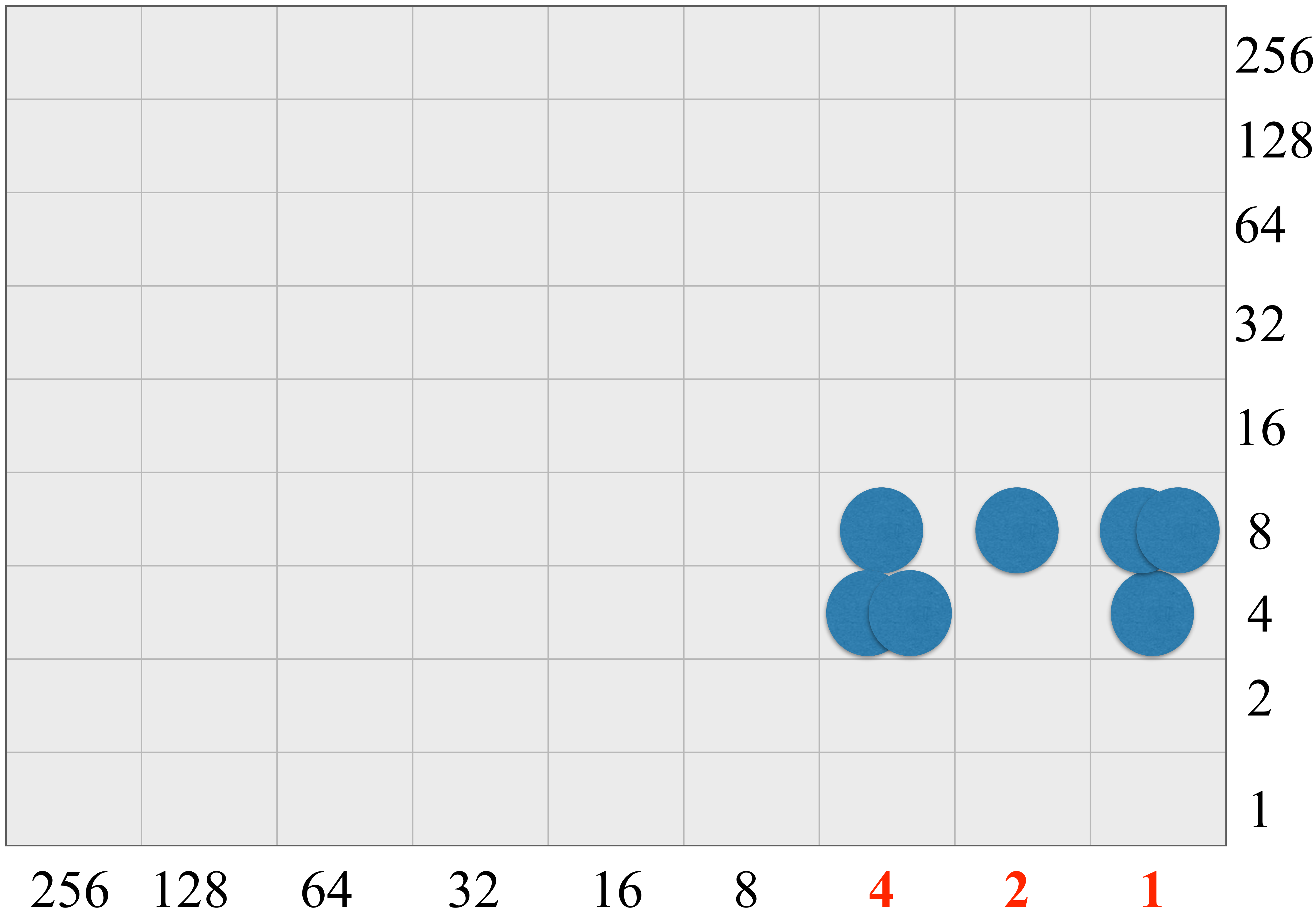
Como dividir? 100/7



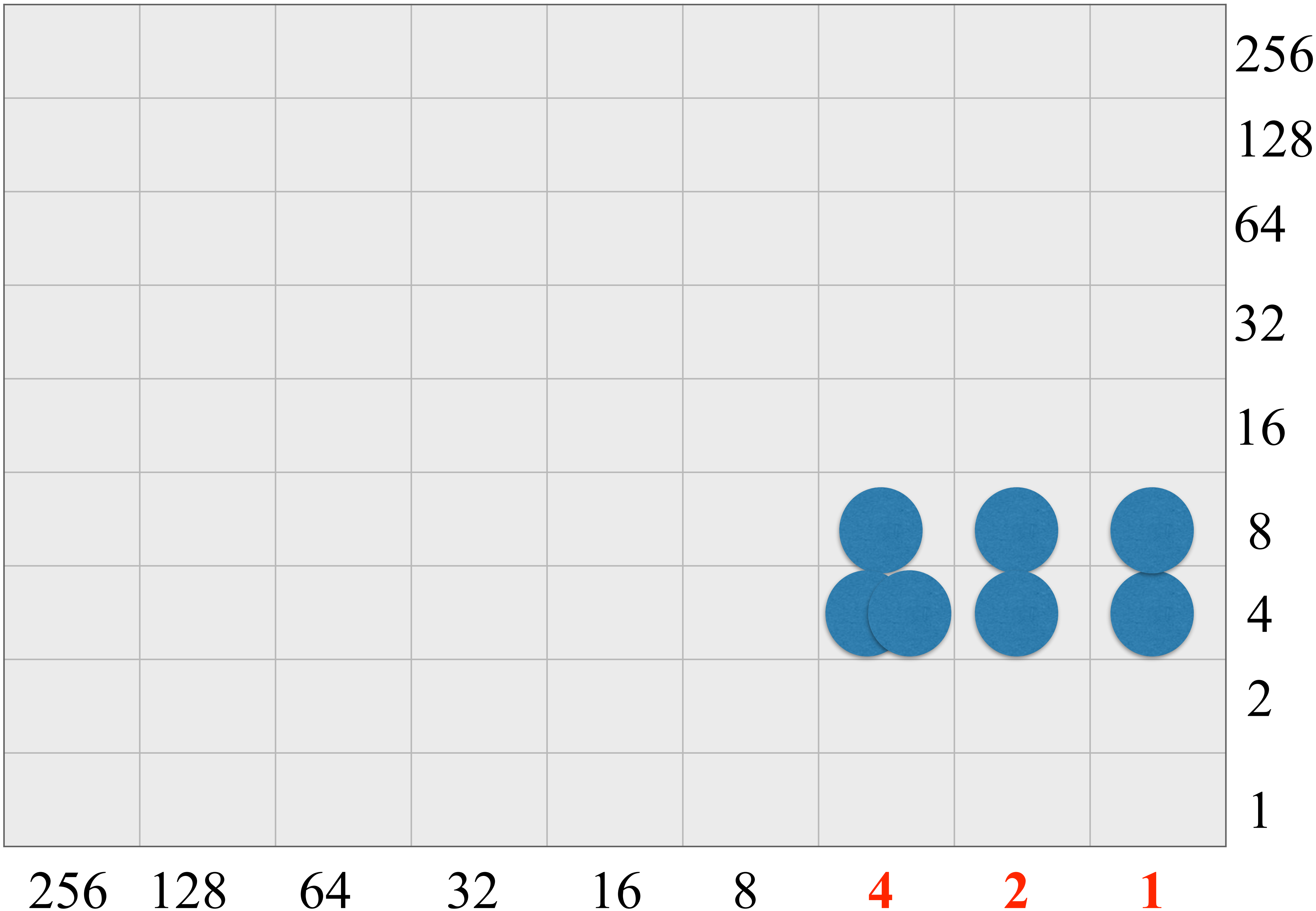
Como dividir? 100/7



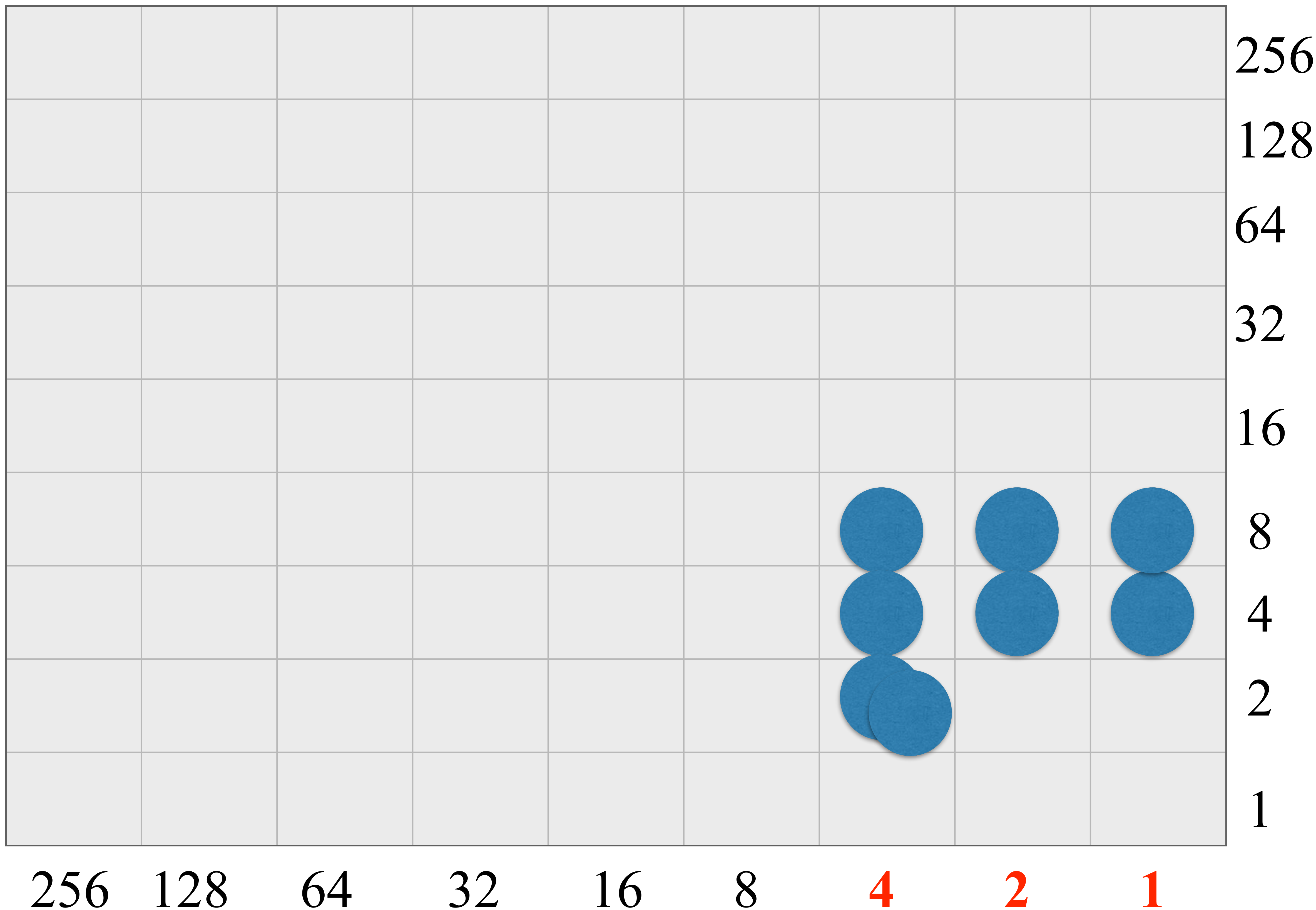
Como dividir? 100/7



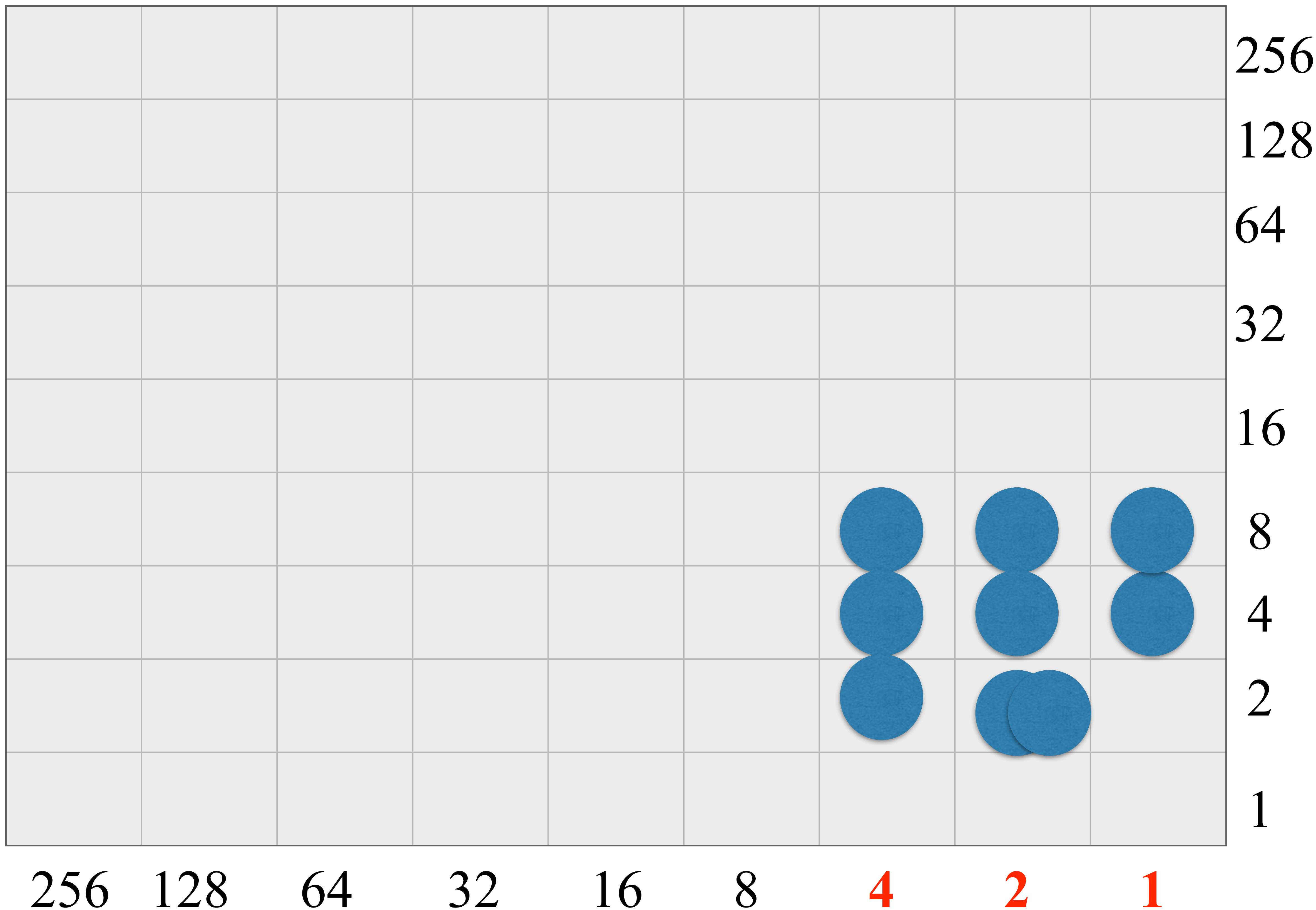
Como dividir? 100/7



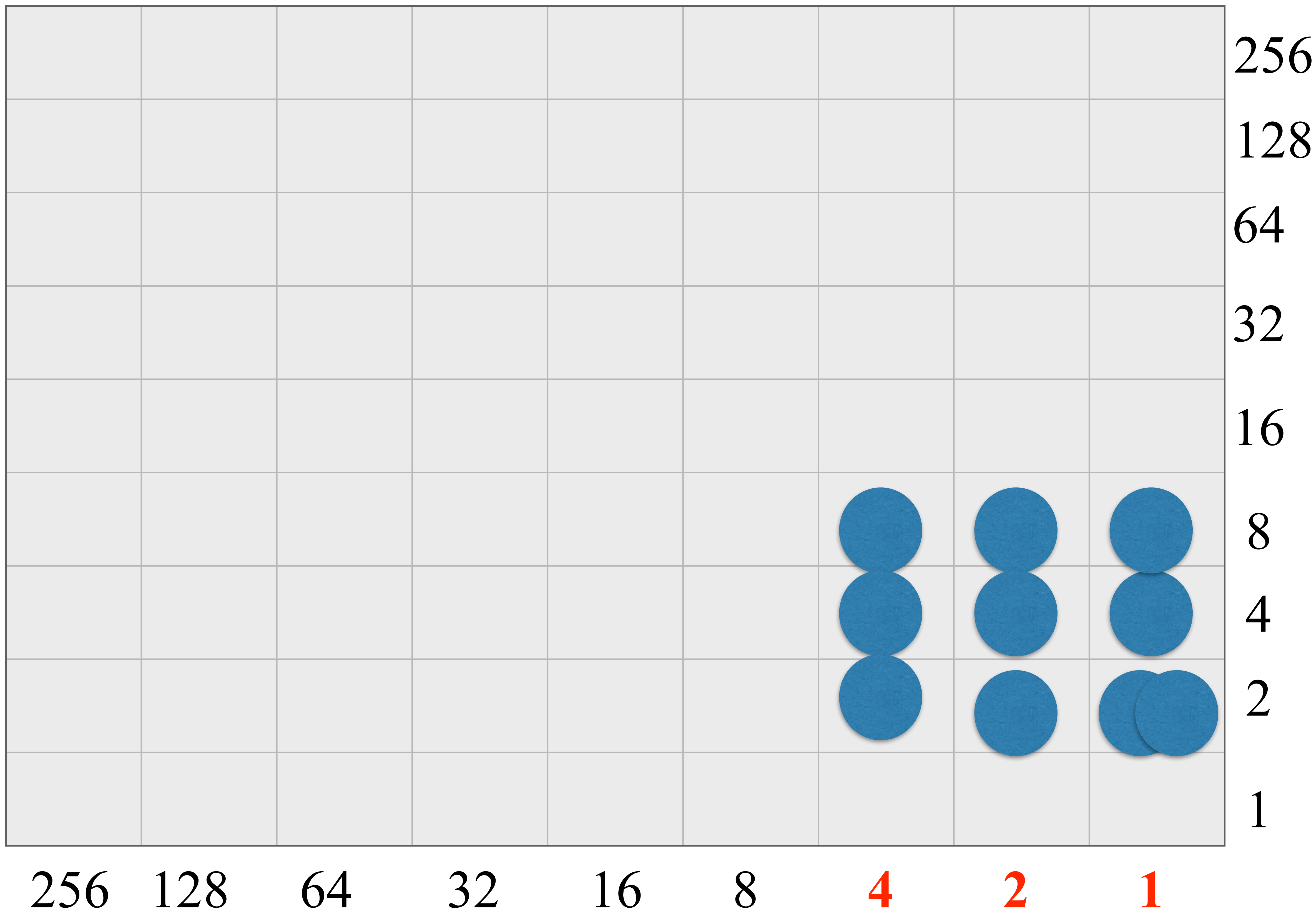
Como dividir? 100/7



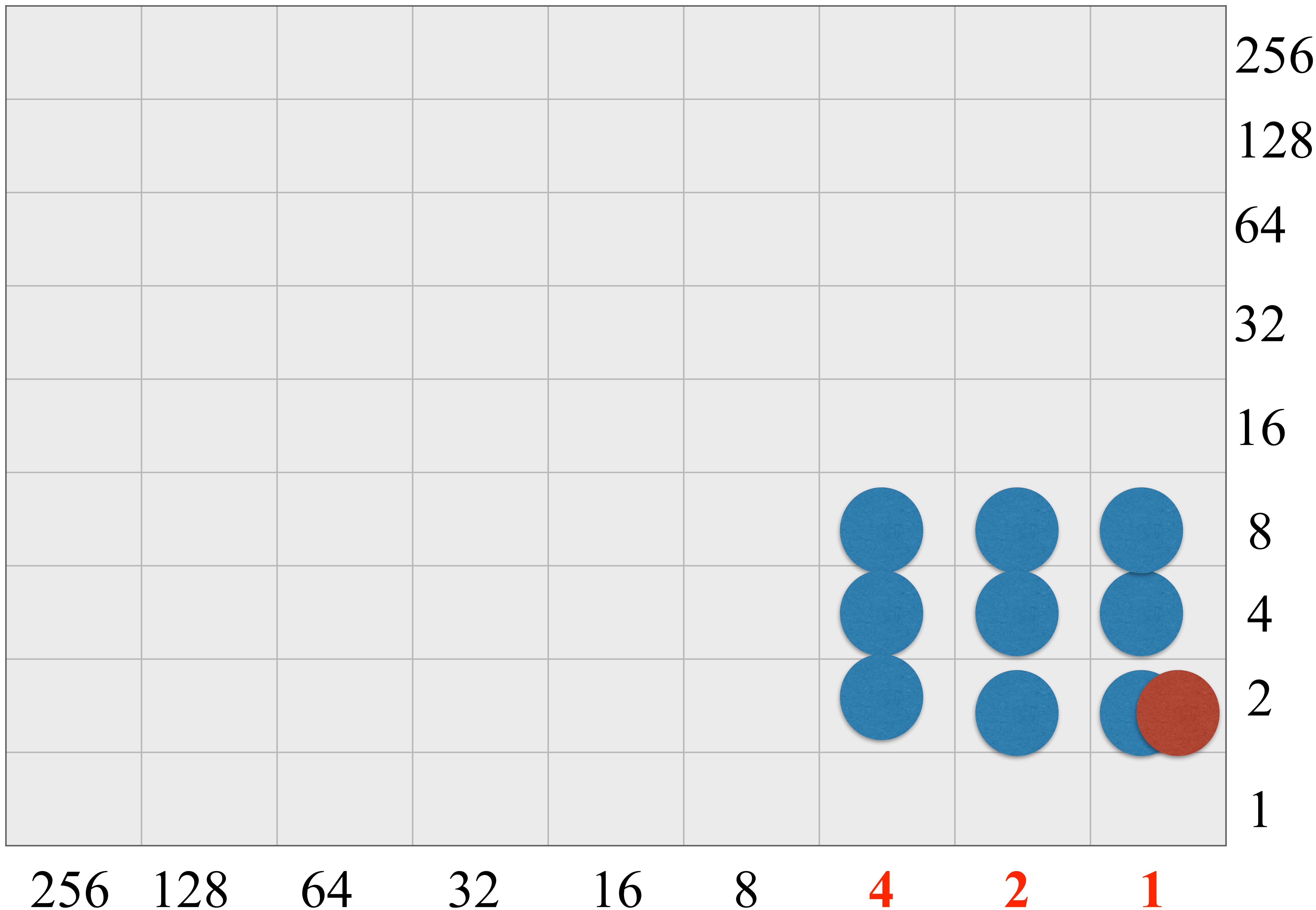
Como dividir? 100/7



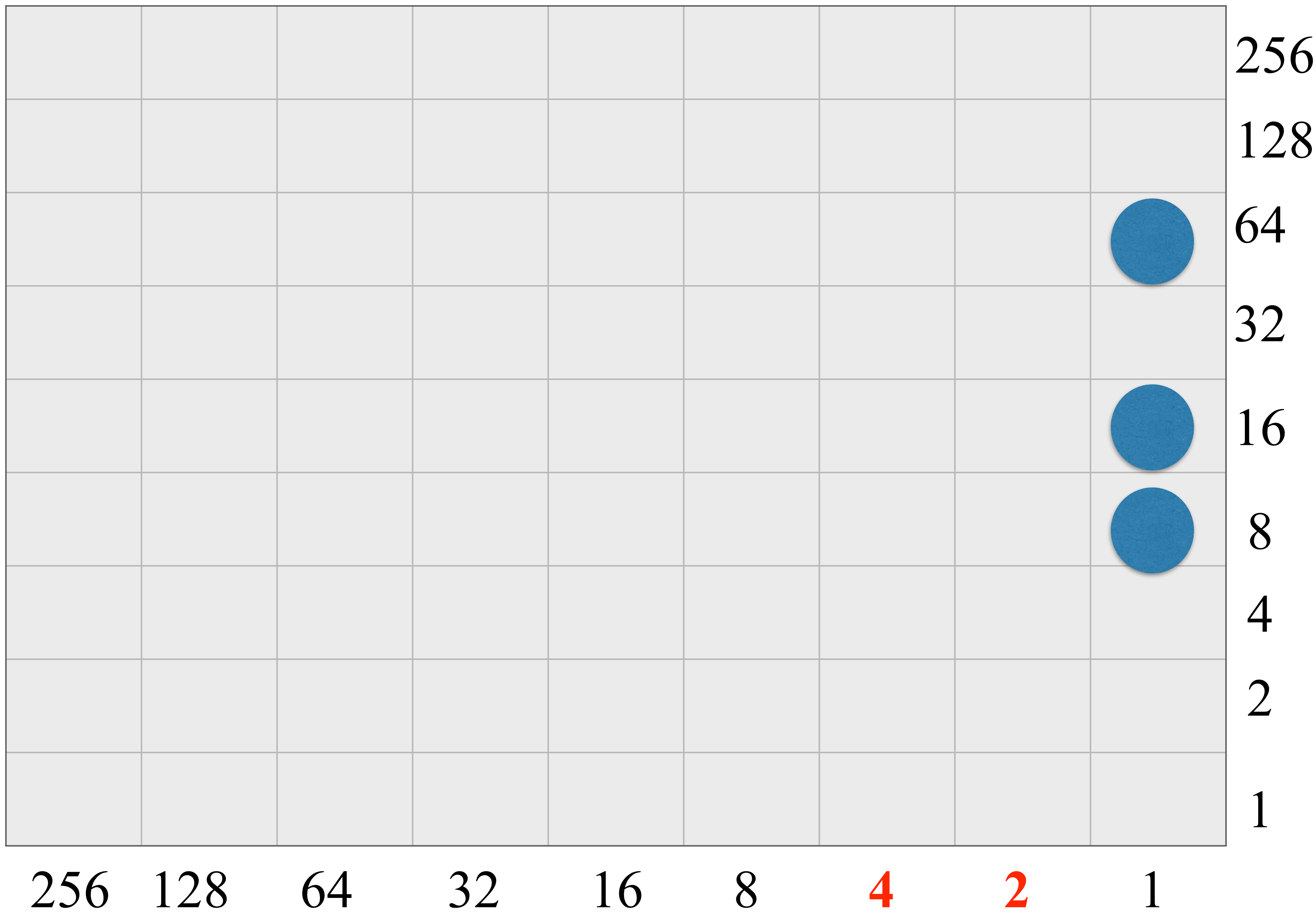
Como dividir? 100/7



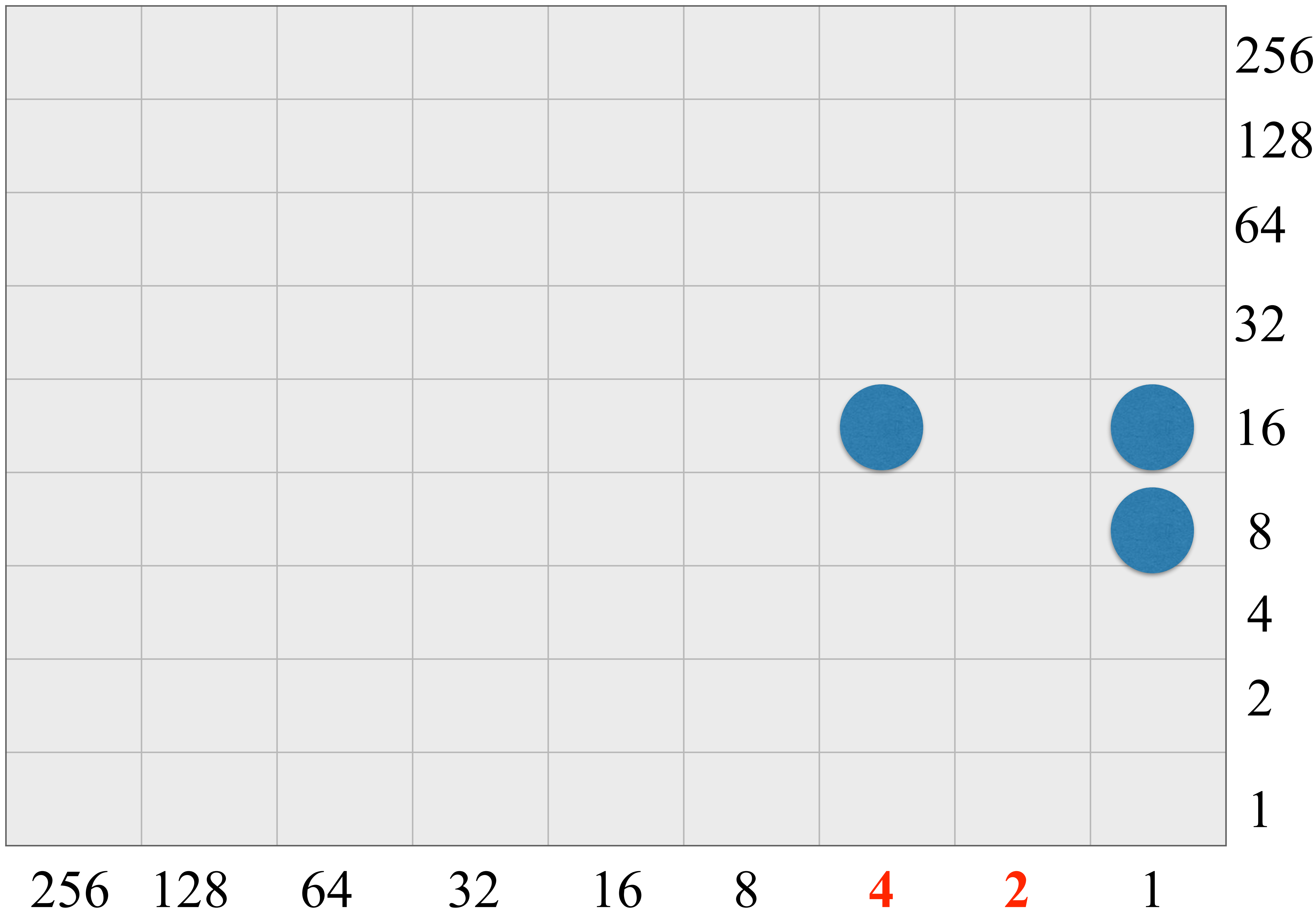
100 = 14x7+**2**



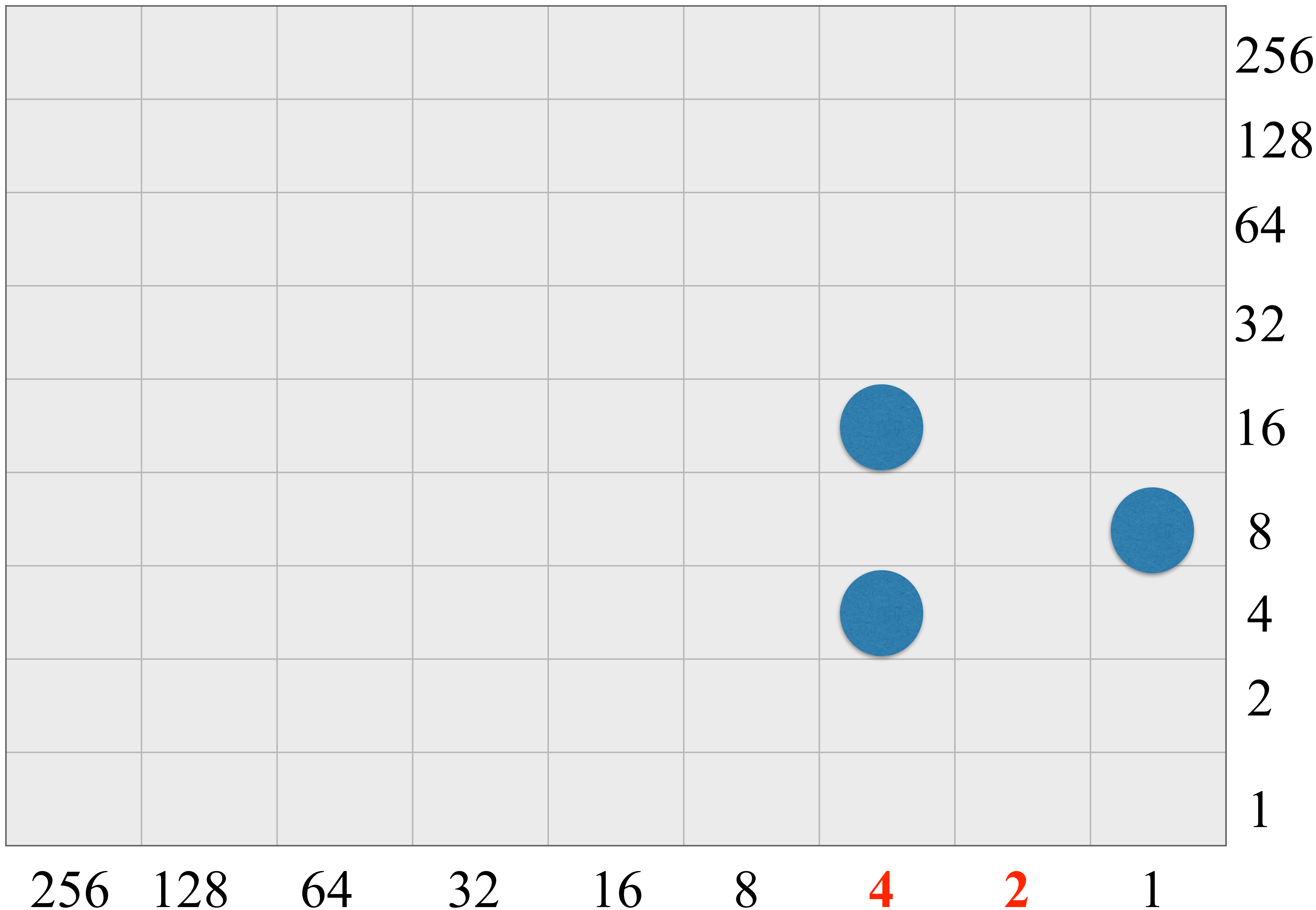
$88 \div 6$



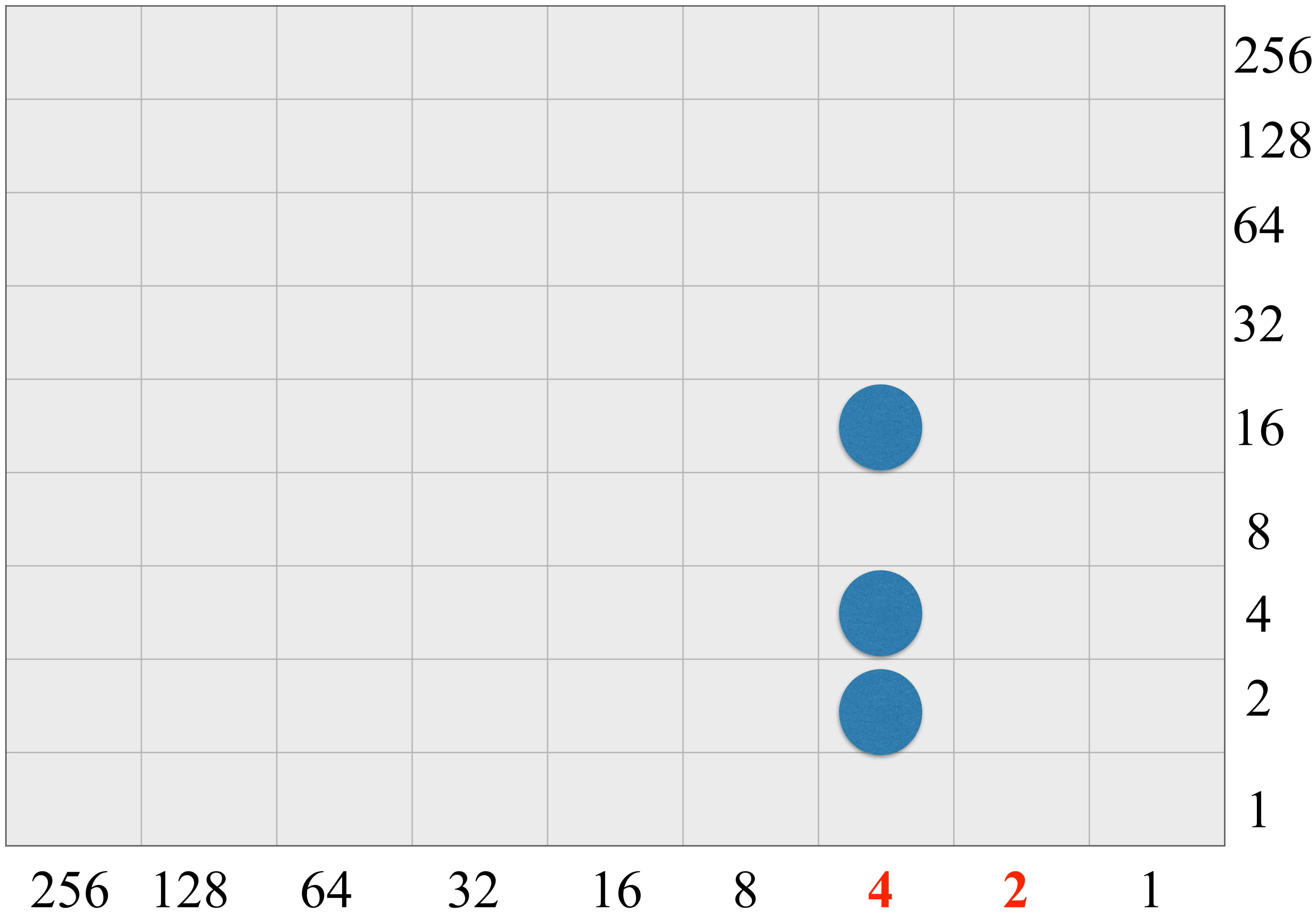
$88 \div 6$



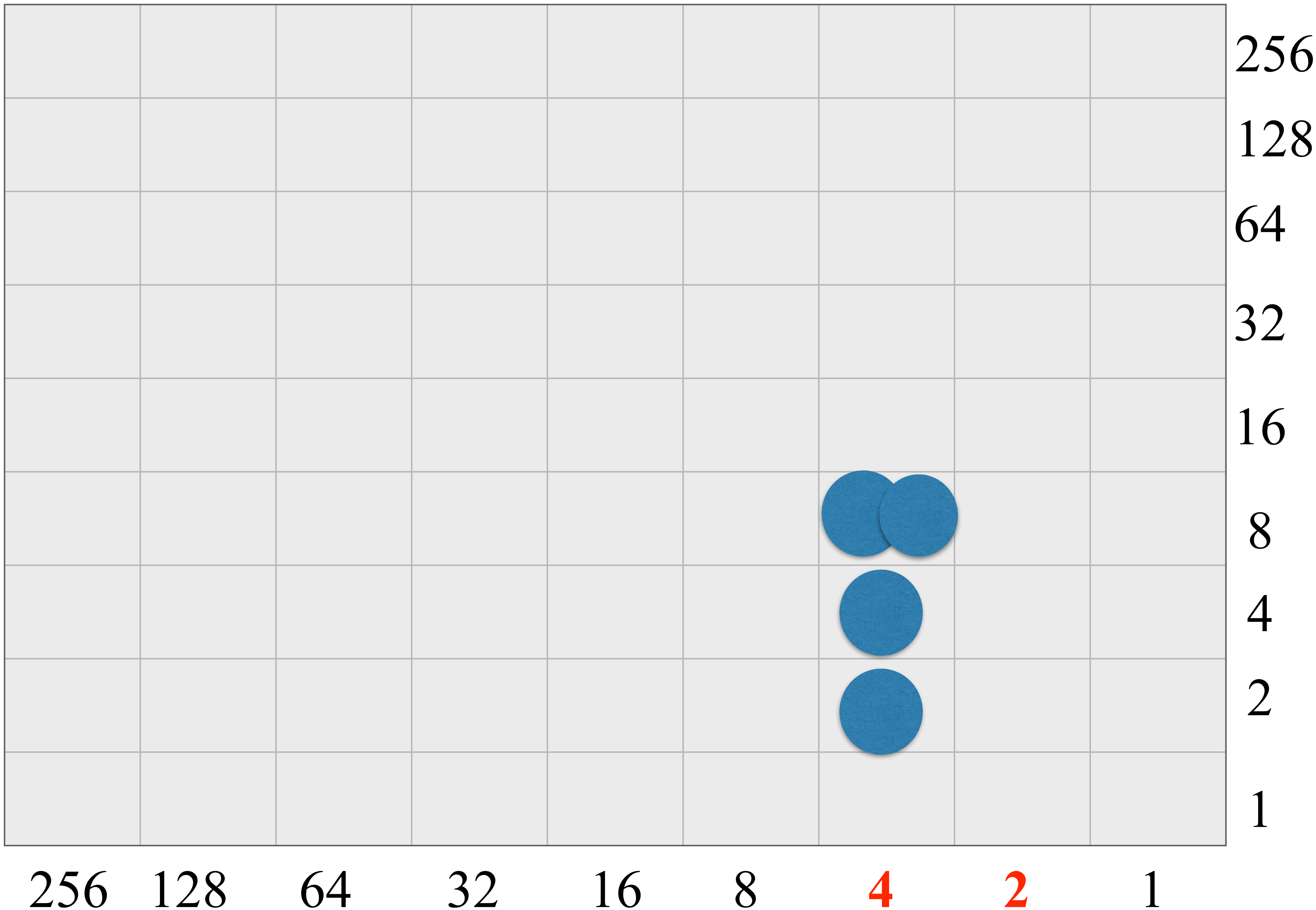
$88 \div 6$



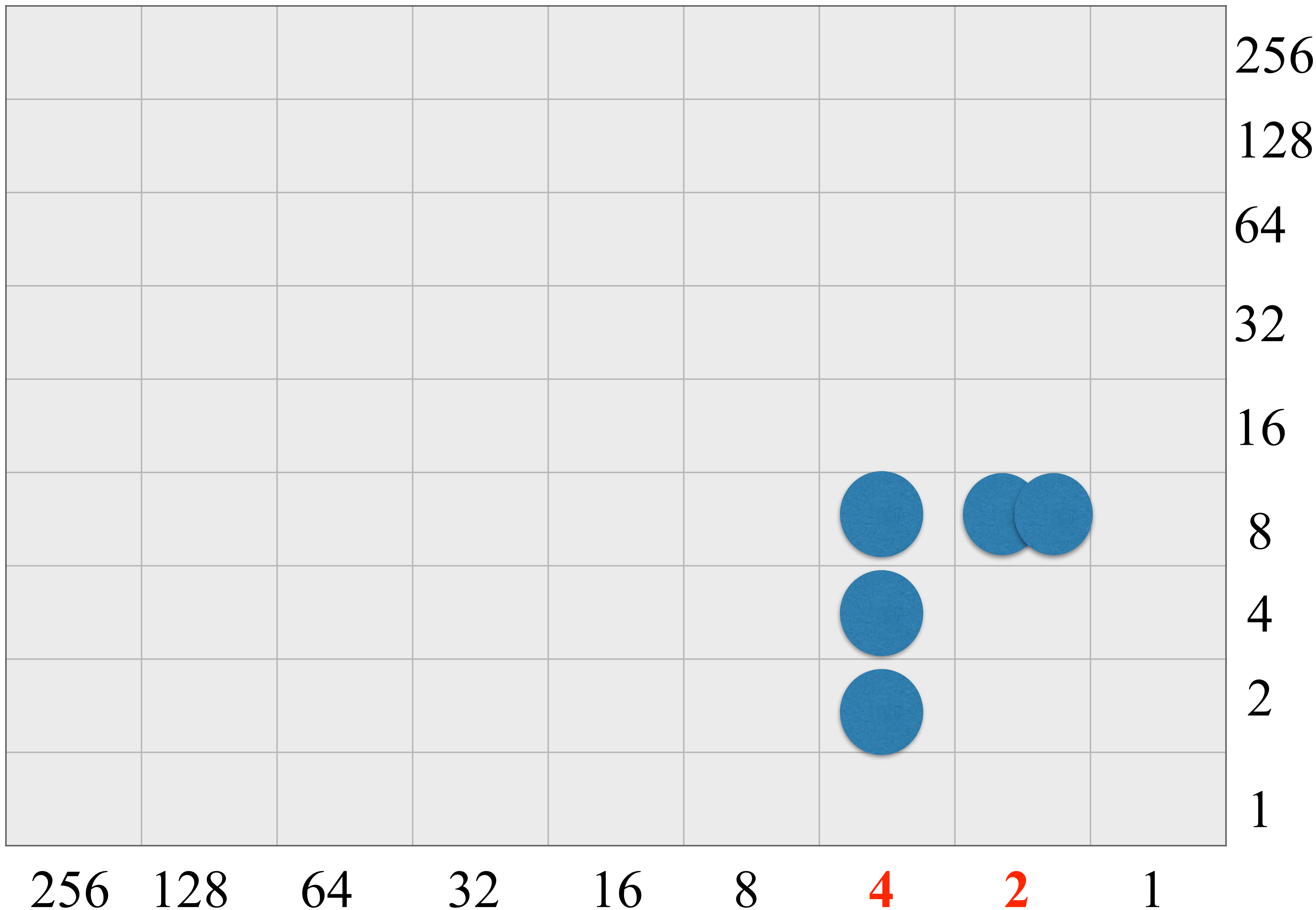
$88 \div 6$



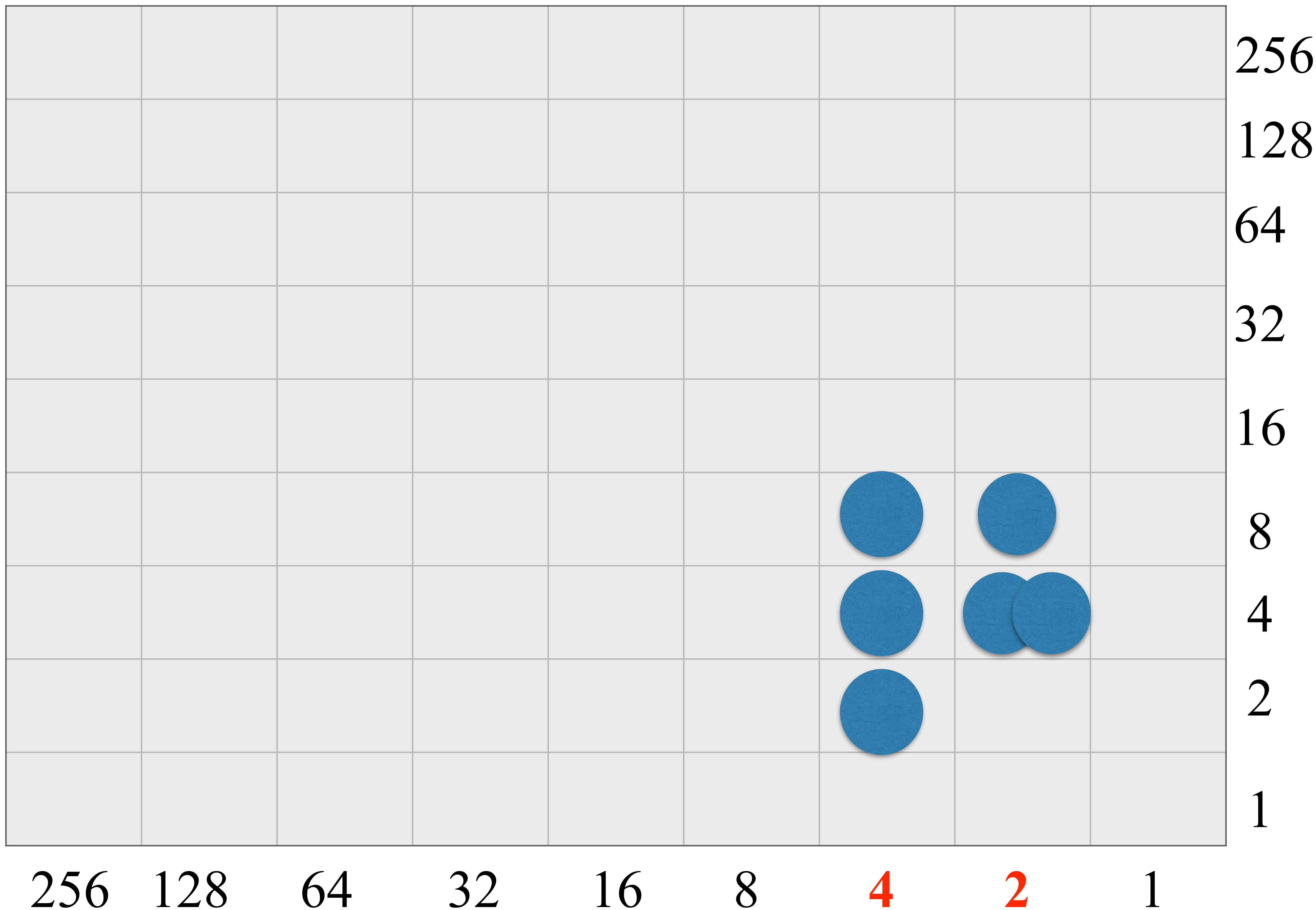
$88 \div 6$



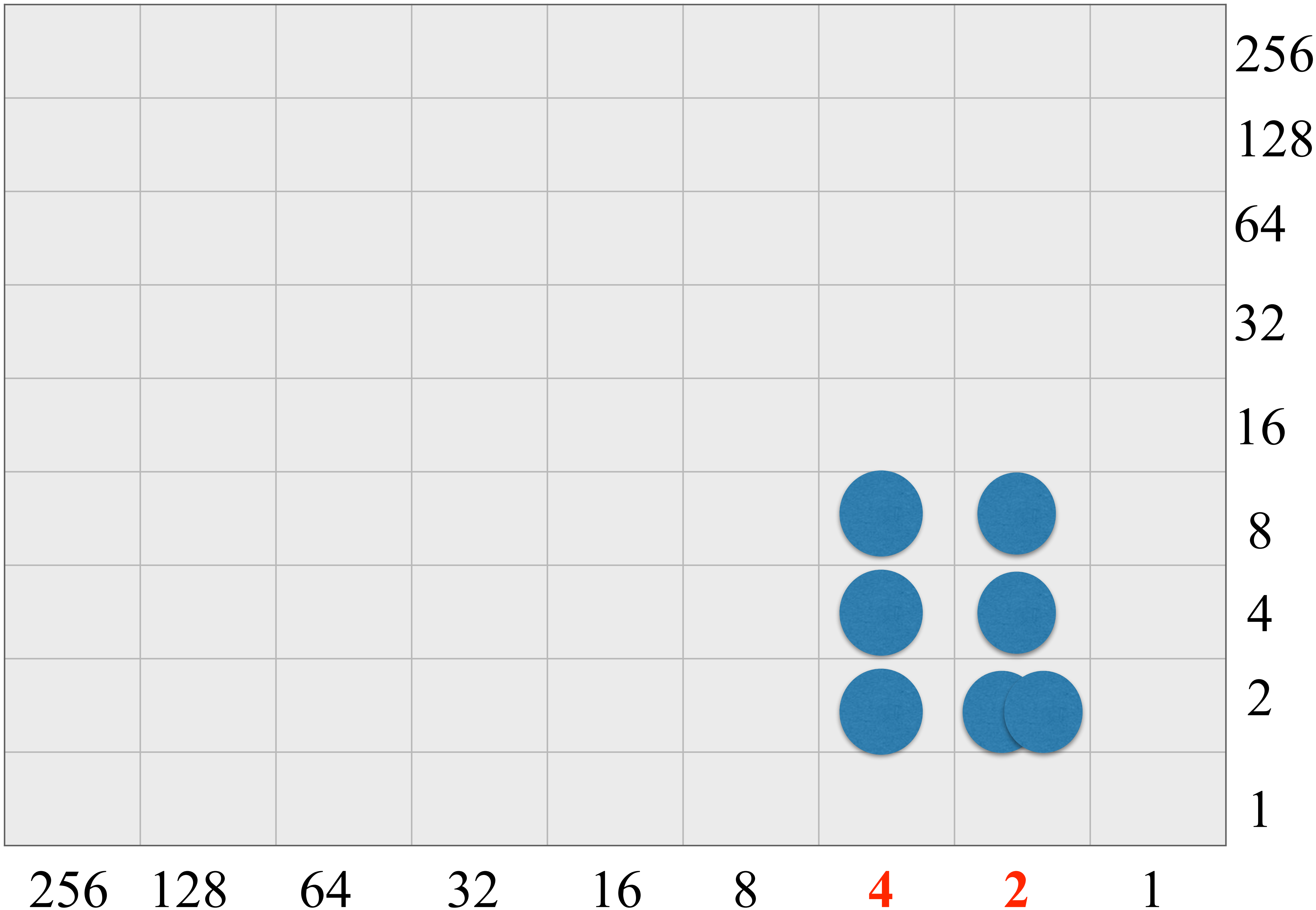
$88 \div 6$



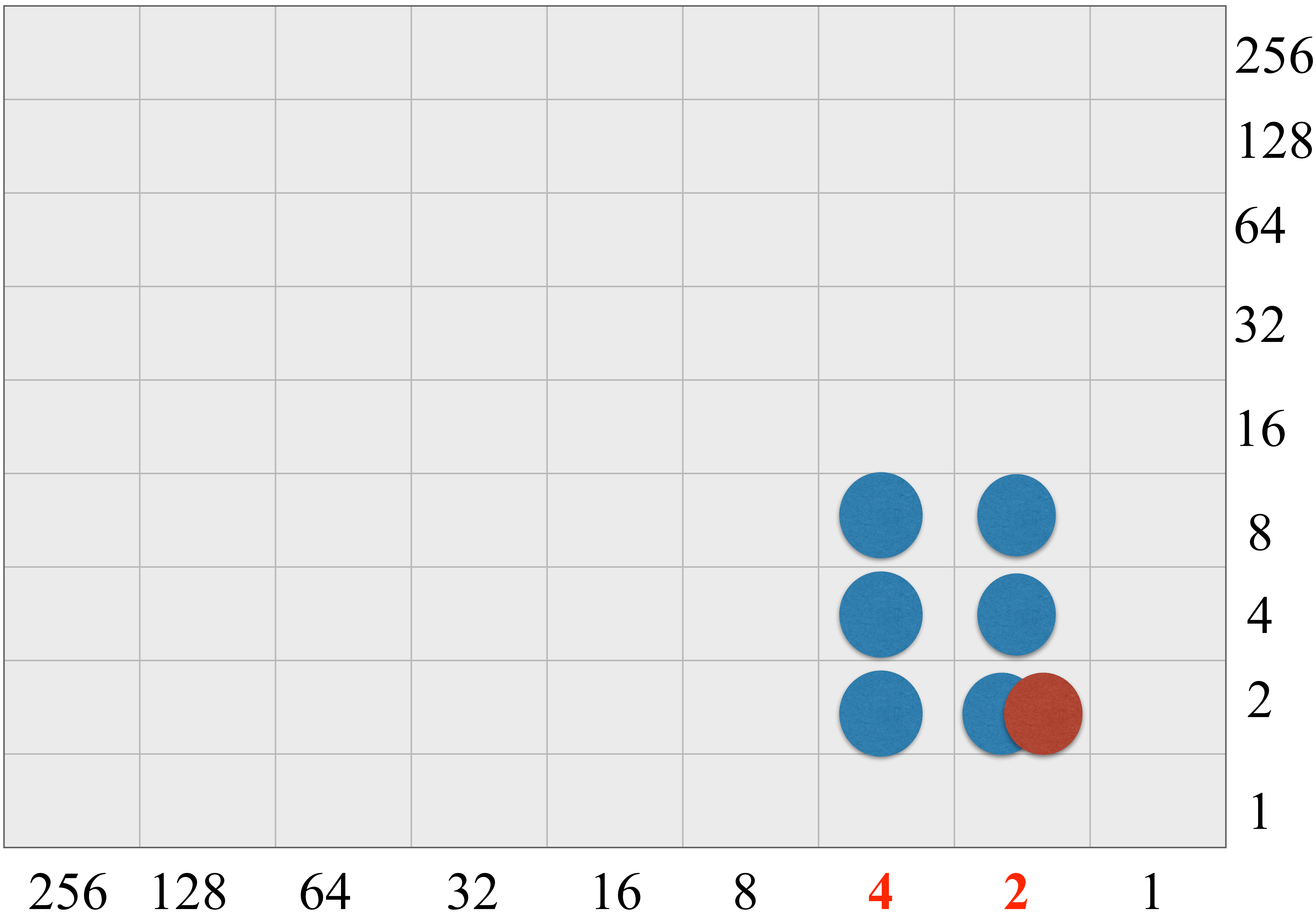
$88 \div 6$



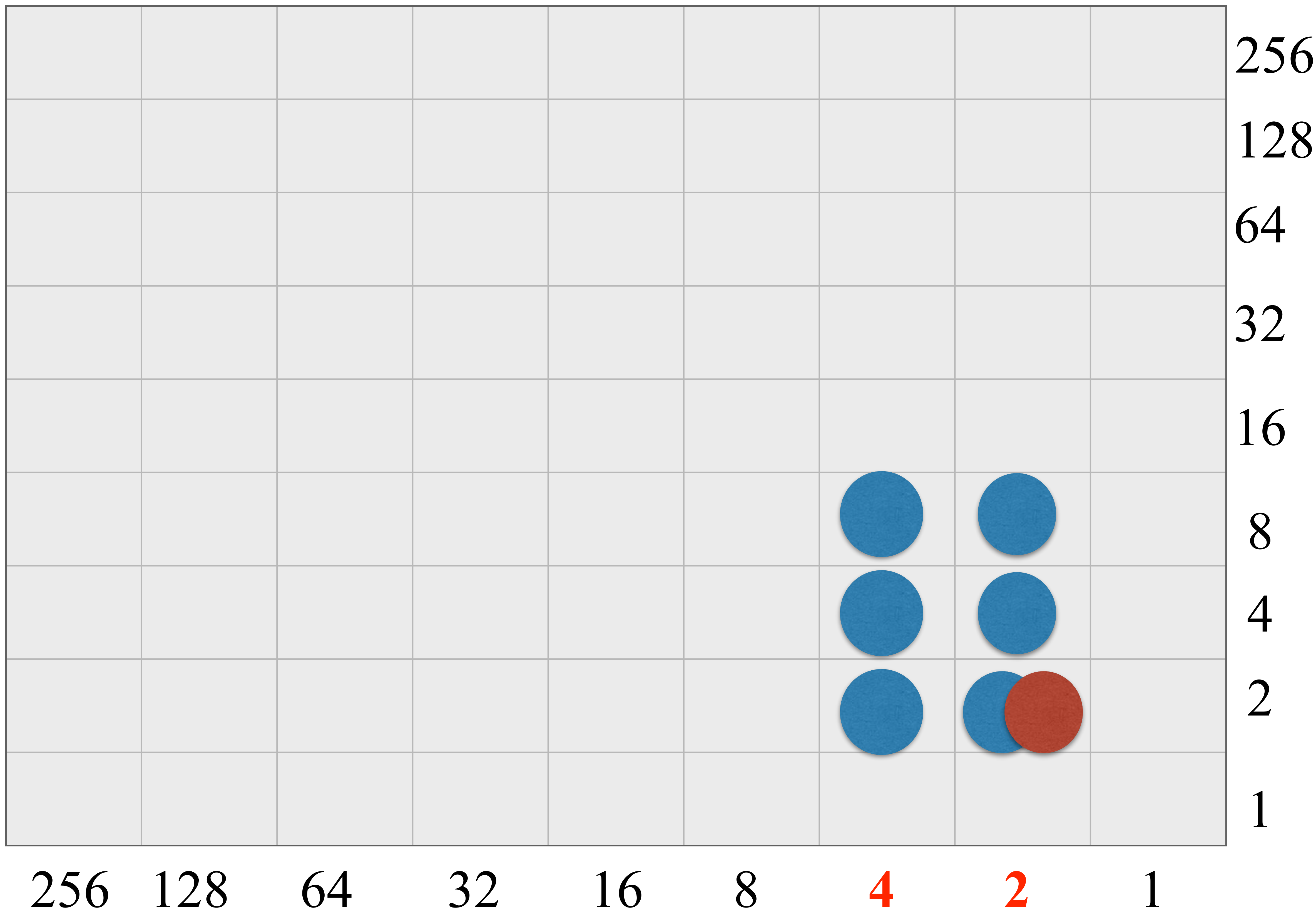
$88 \div 6$



$88 \div 6$



$$88 \div 6 = 14\ (\textit{Resto}\ 4)$$



90 / 9

90 / 10

50 / 5

61 / 6

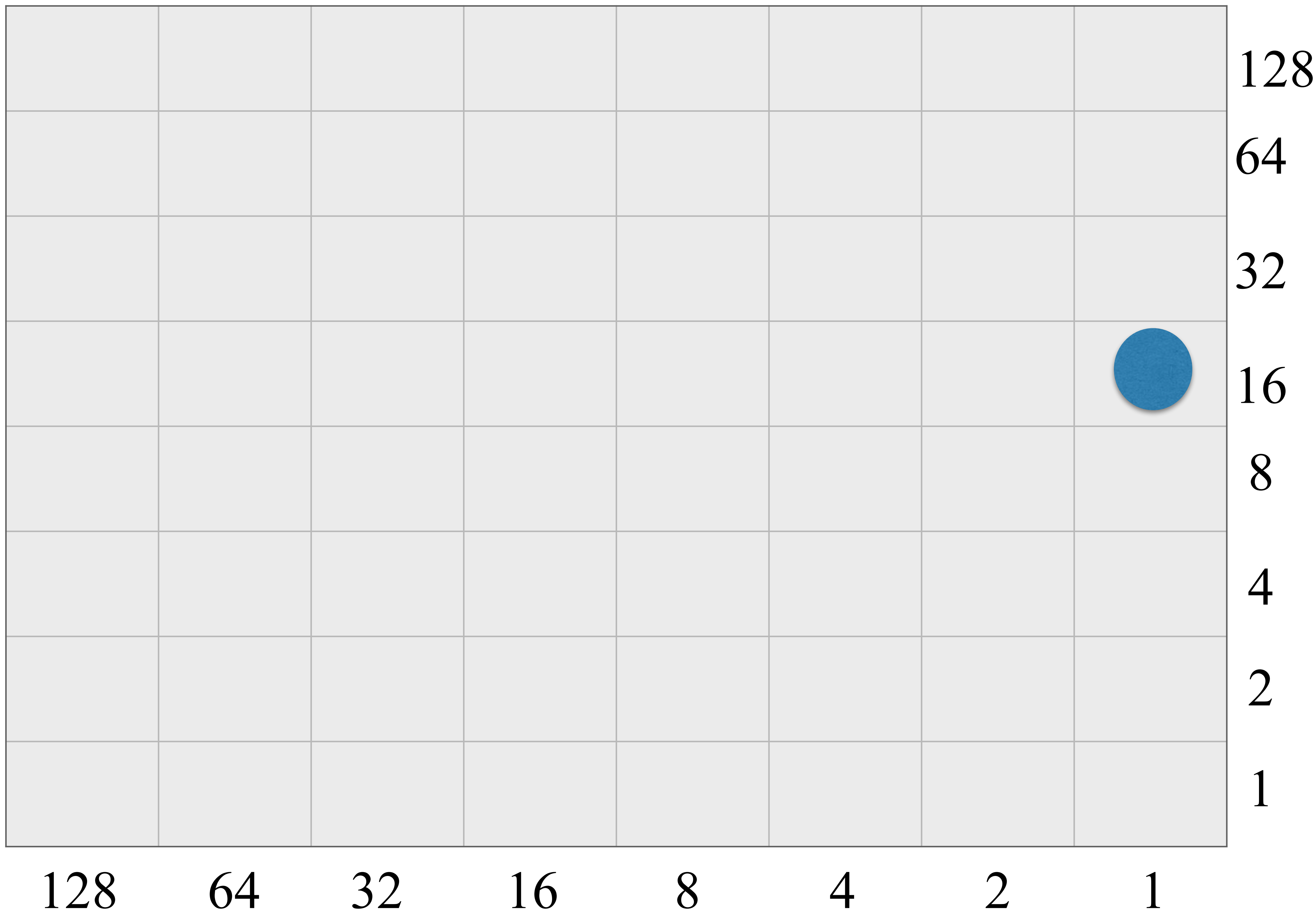
Raiz quadrada

								128
								64
								32
								16
								8
								4
								2
								1
128	64	32	16	8	4	2	1	

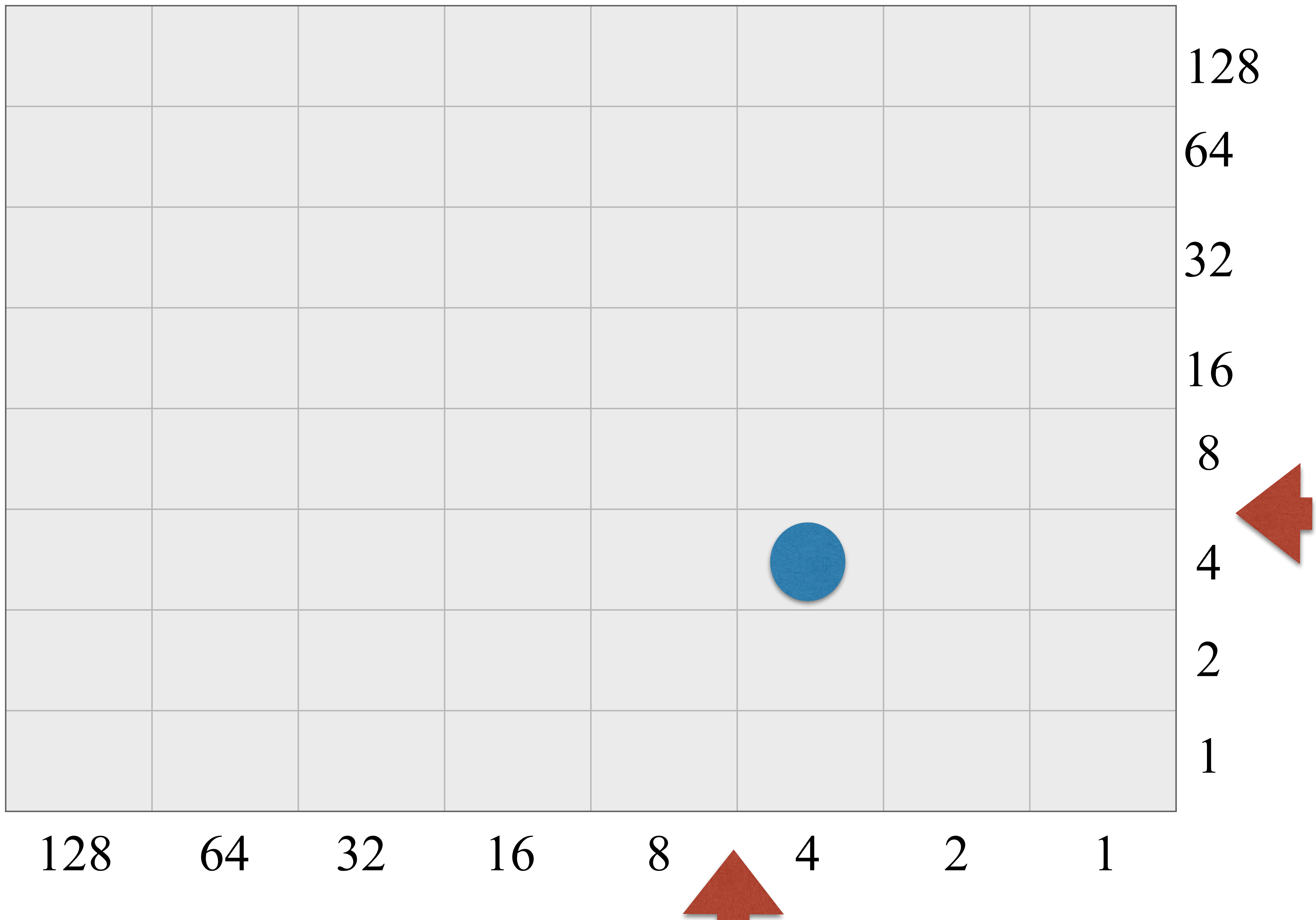
$\sqrt{16}$

128	64	32	16	8	4	2	1	
								128
								64
								32
								16
								8
								4
								2
								1

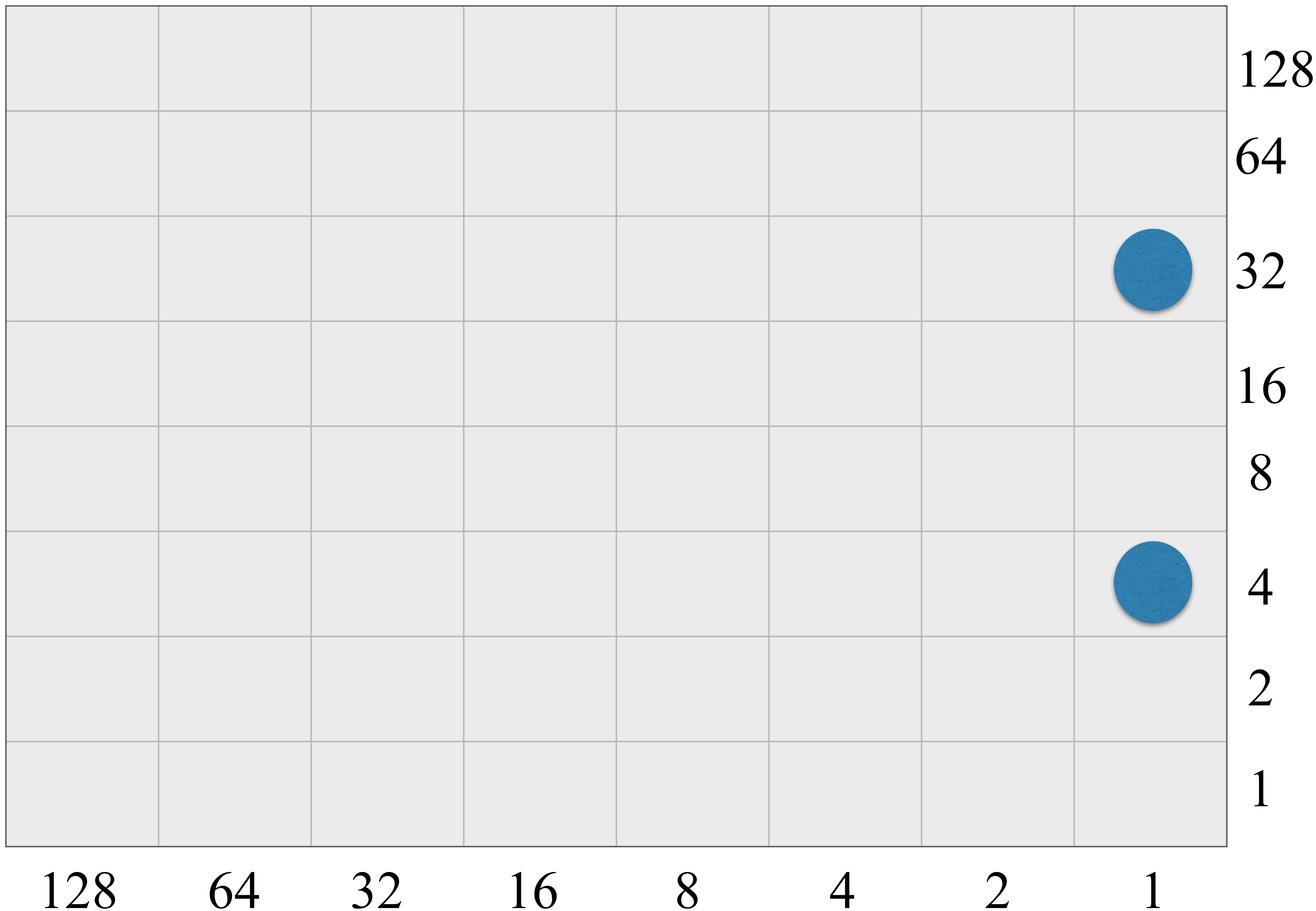
$\sqrt{16}$



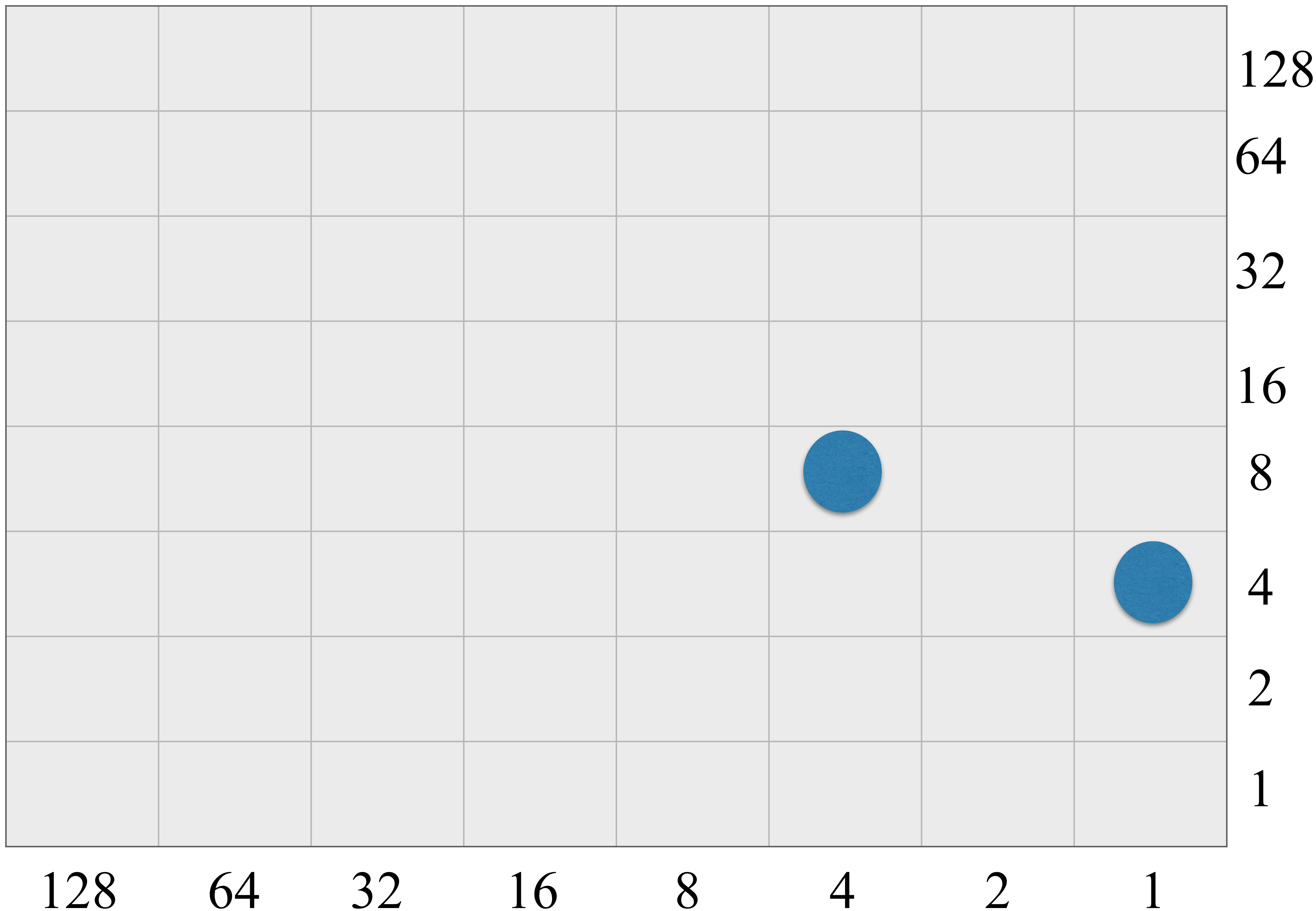
$$\sqrt{16} = 4$$



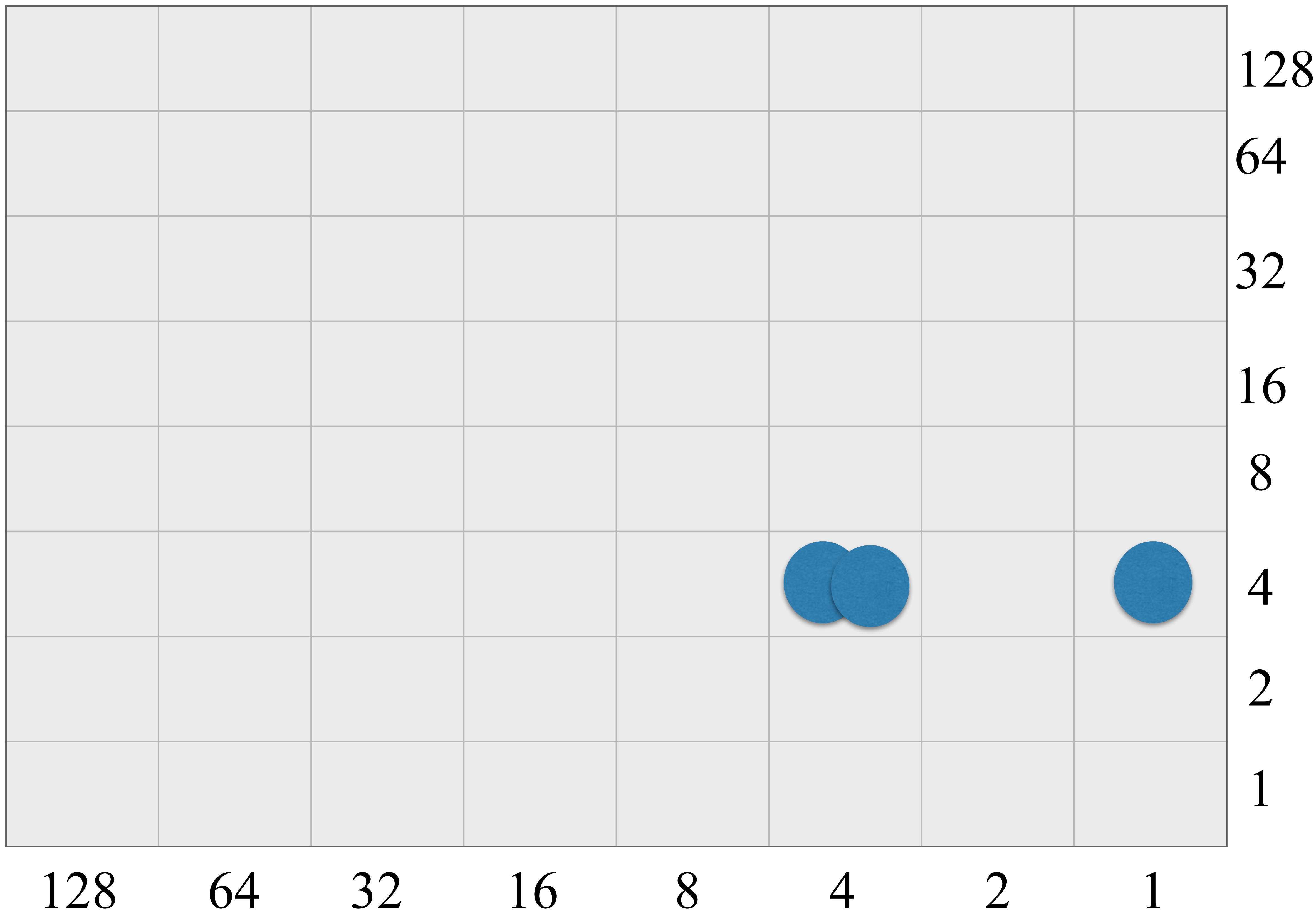
$$\sqrt{36}$$



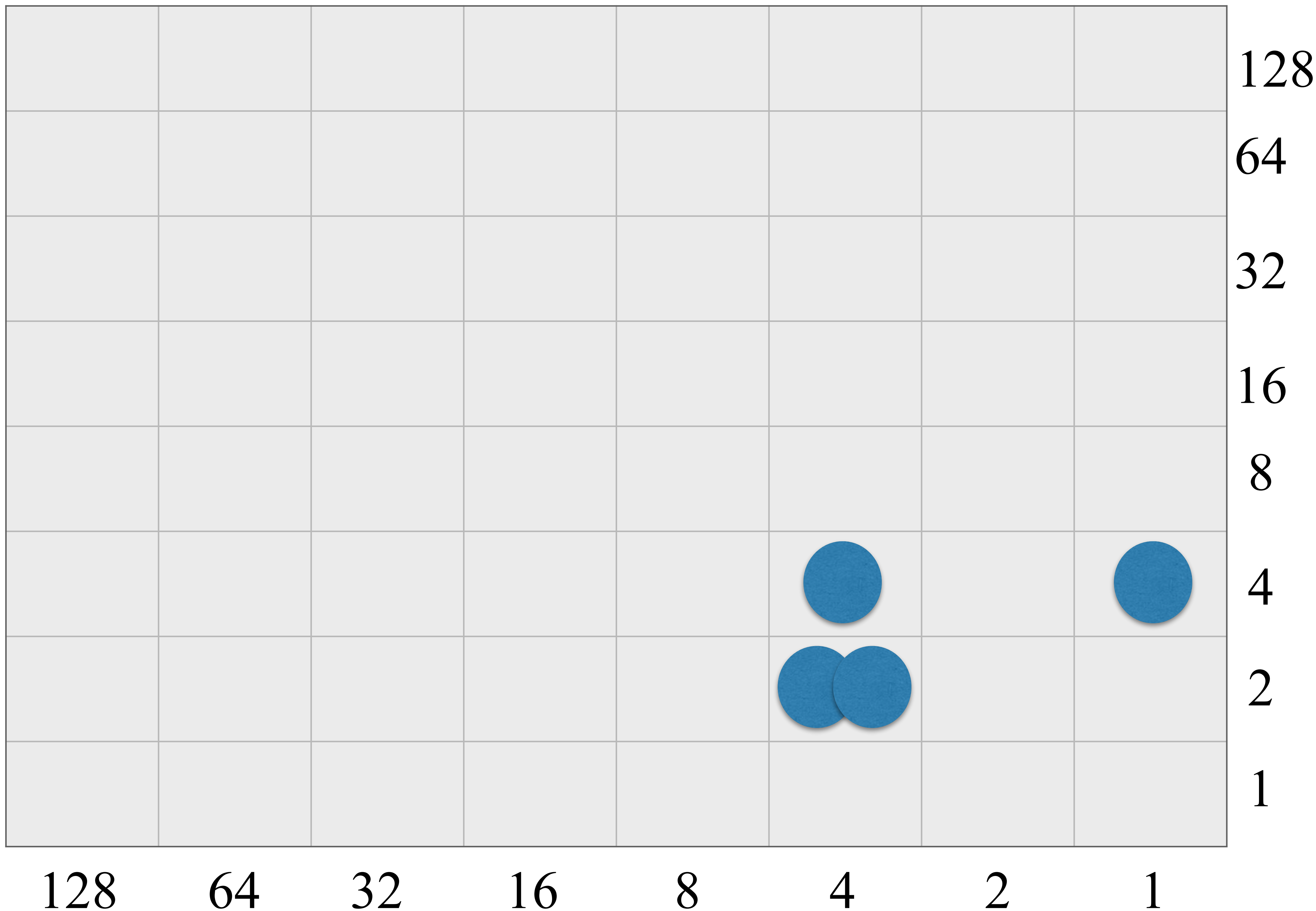
$\sqrt{36}$



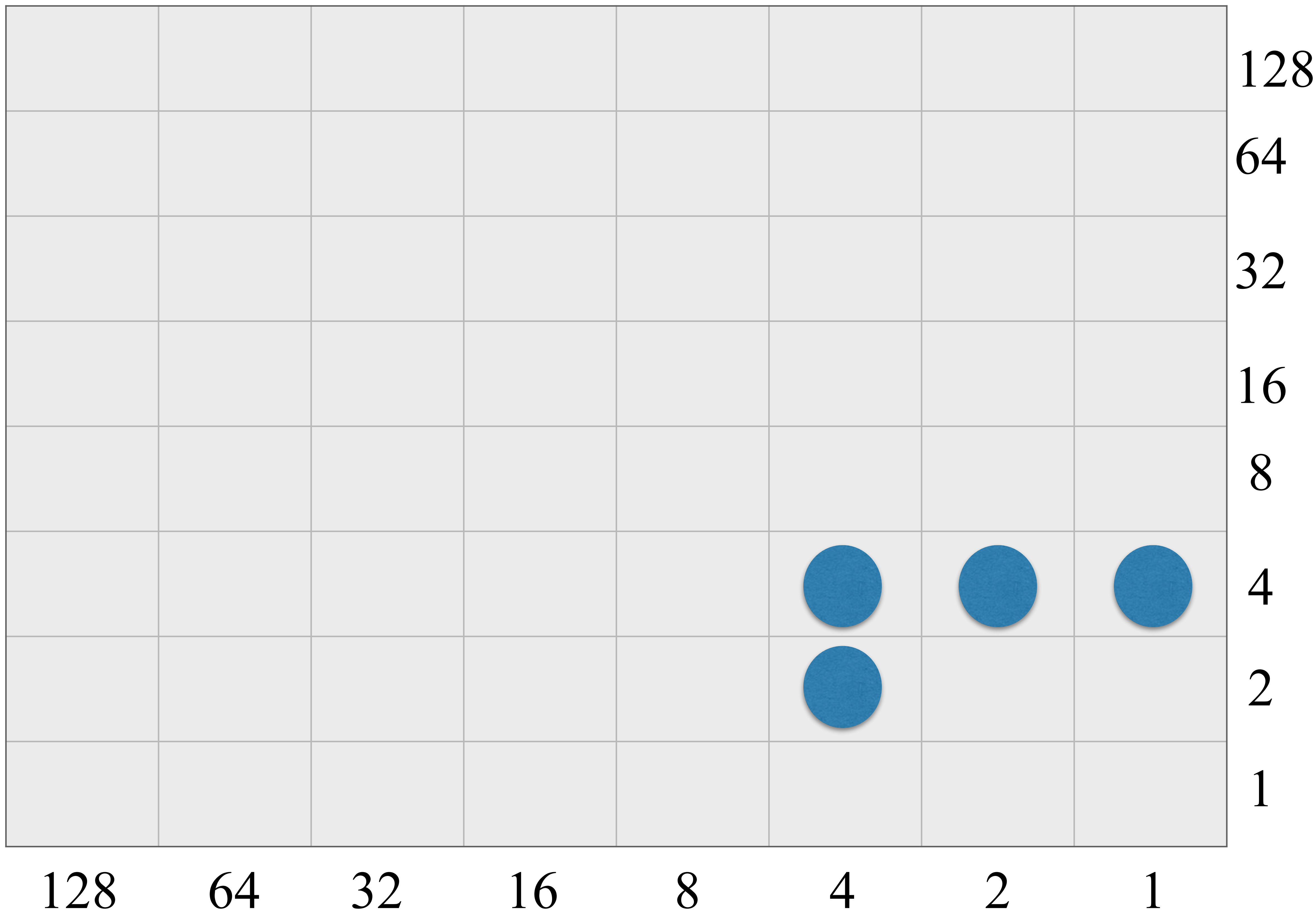
$\sqrt{36}$



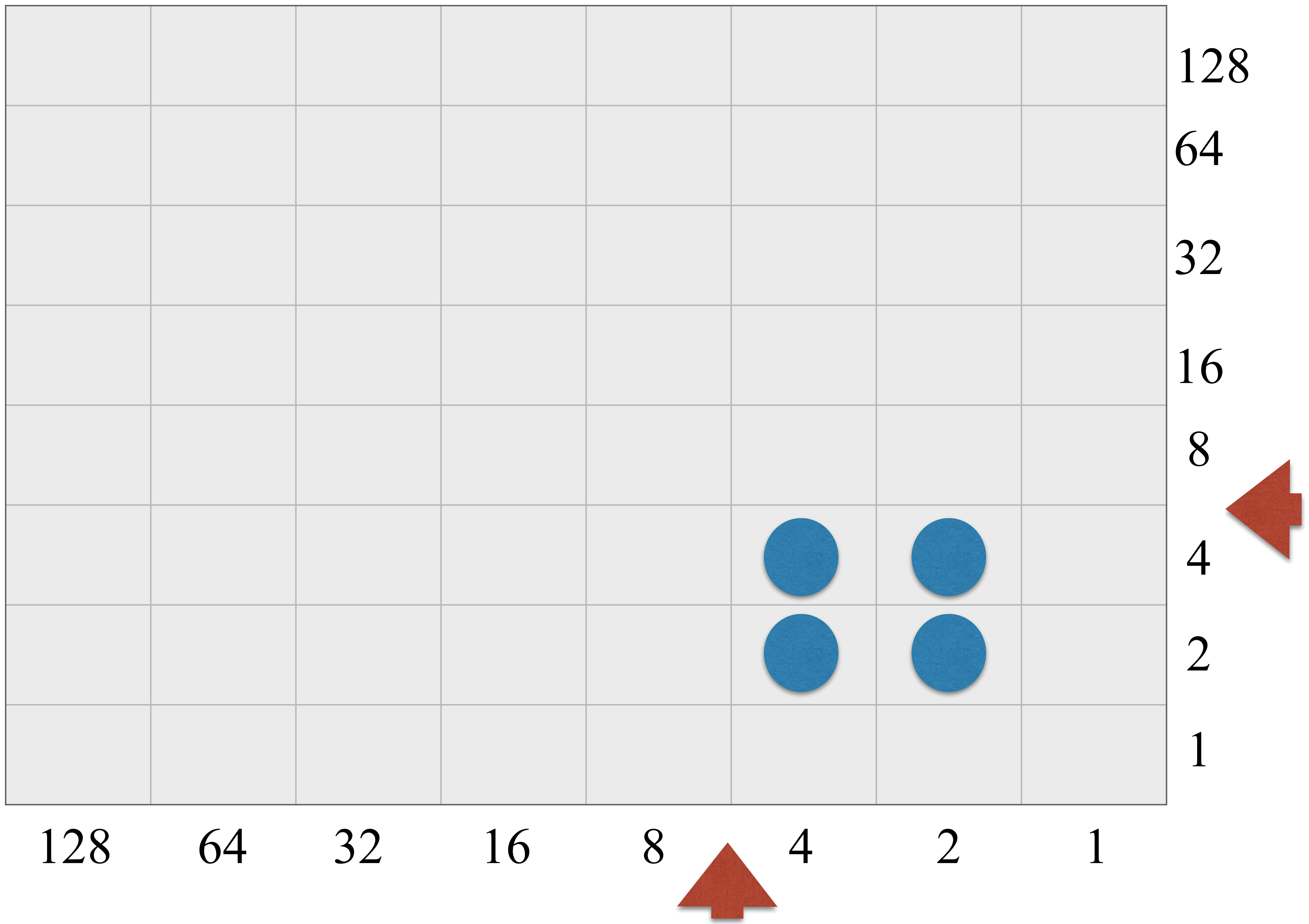
$\sqrt{36}$



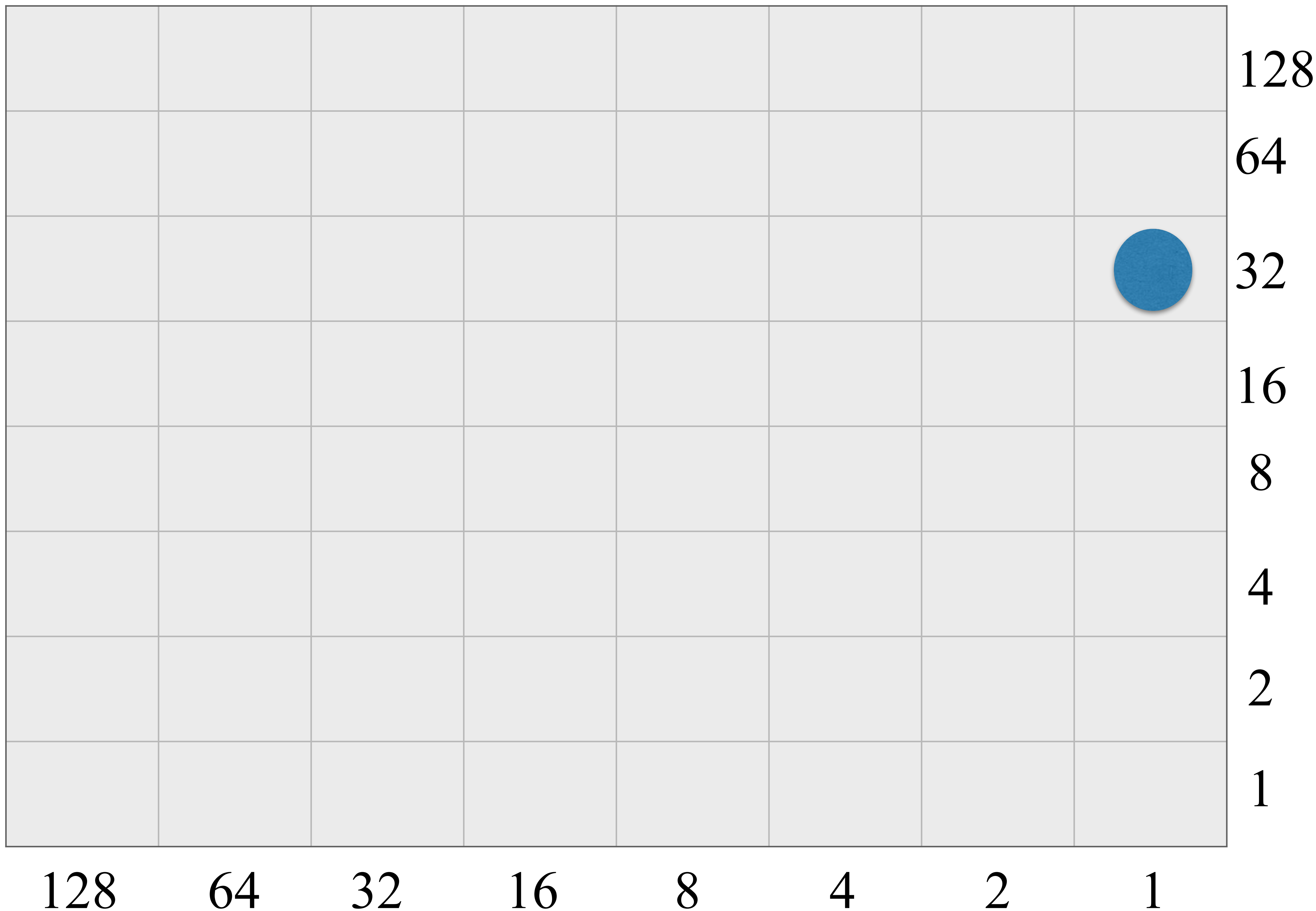
$\sqrt{36}$



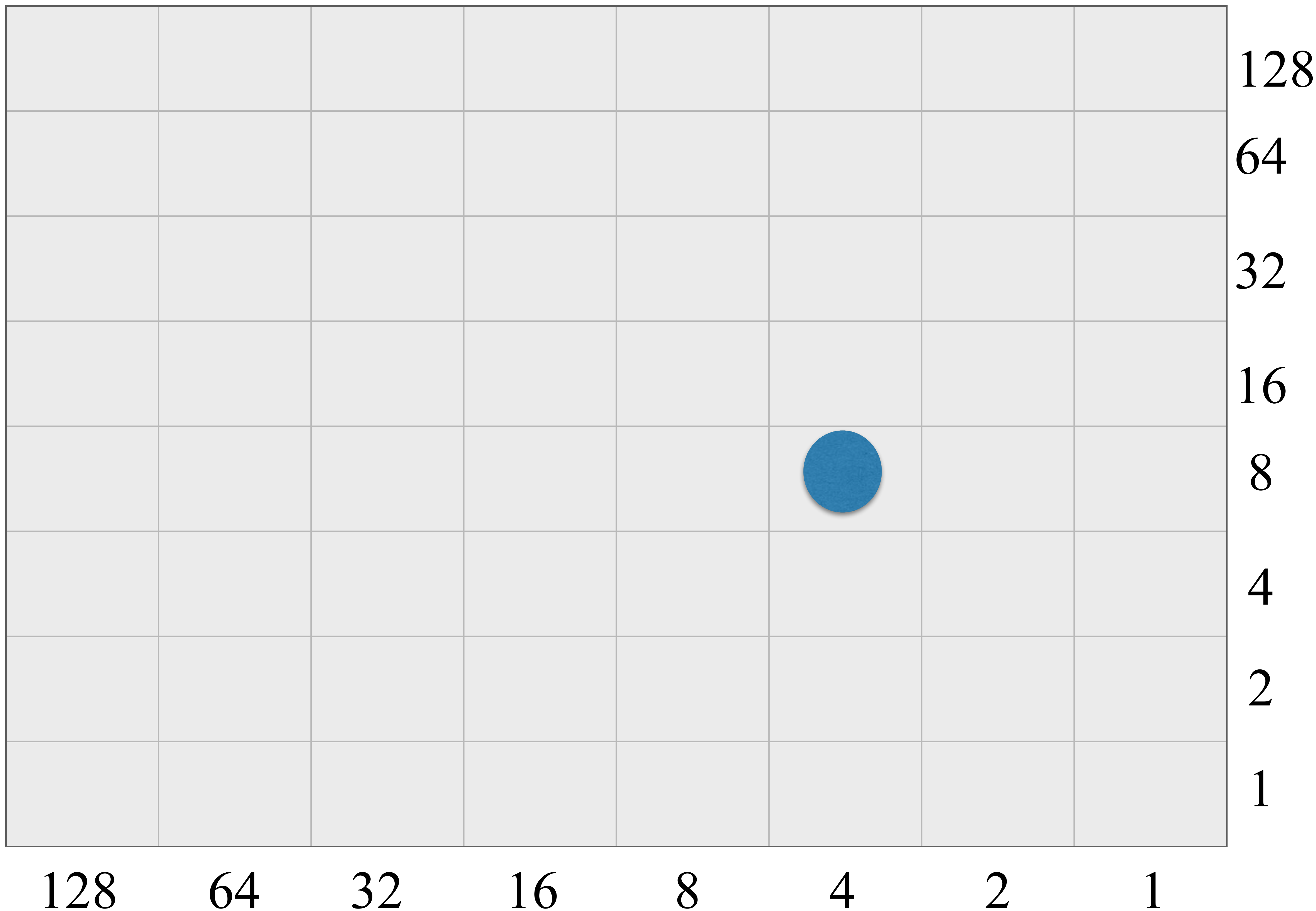
$$\sqrt{36} = 6$$



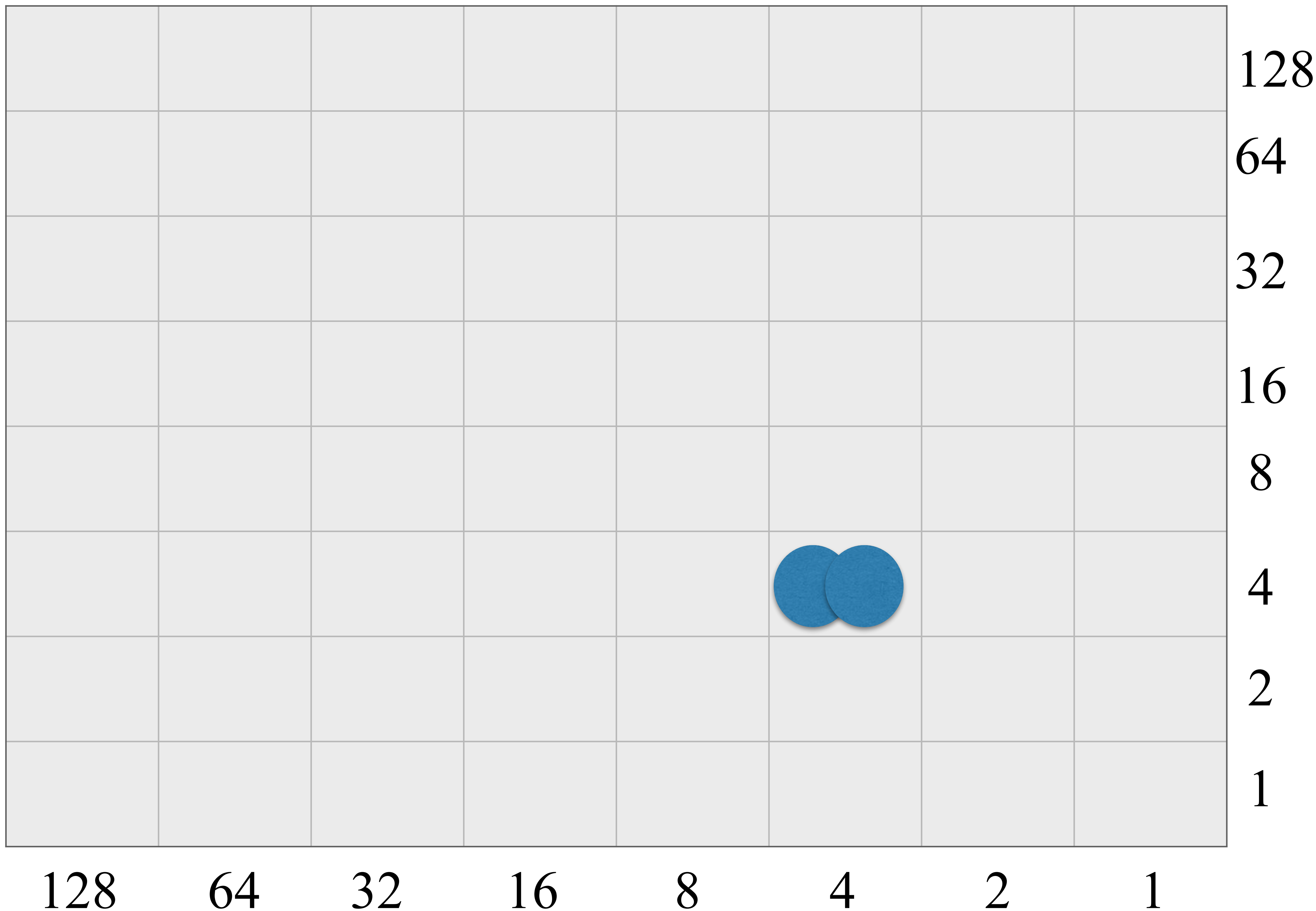
$$\sqrt{32}$$



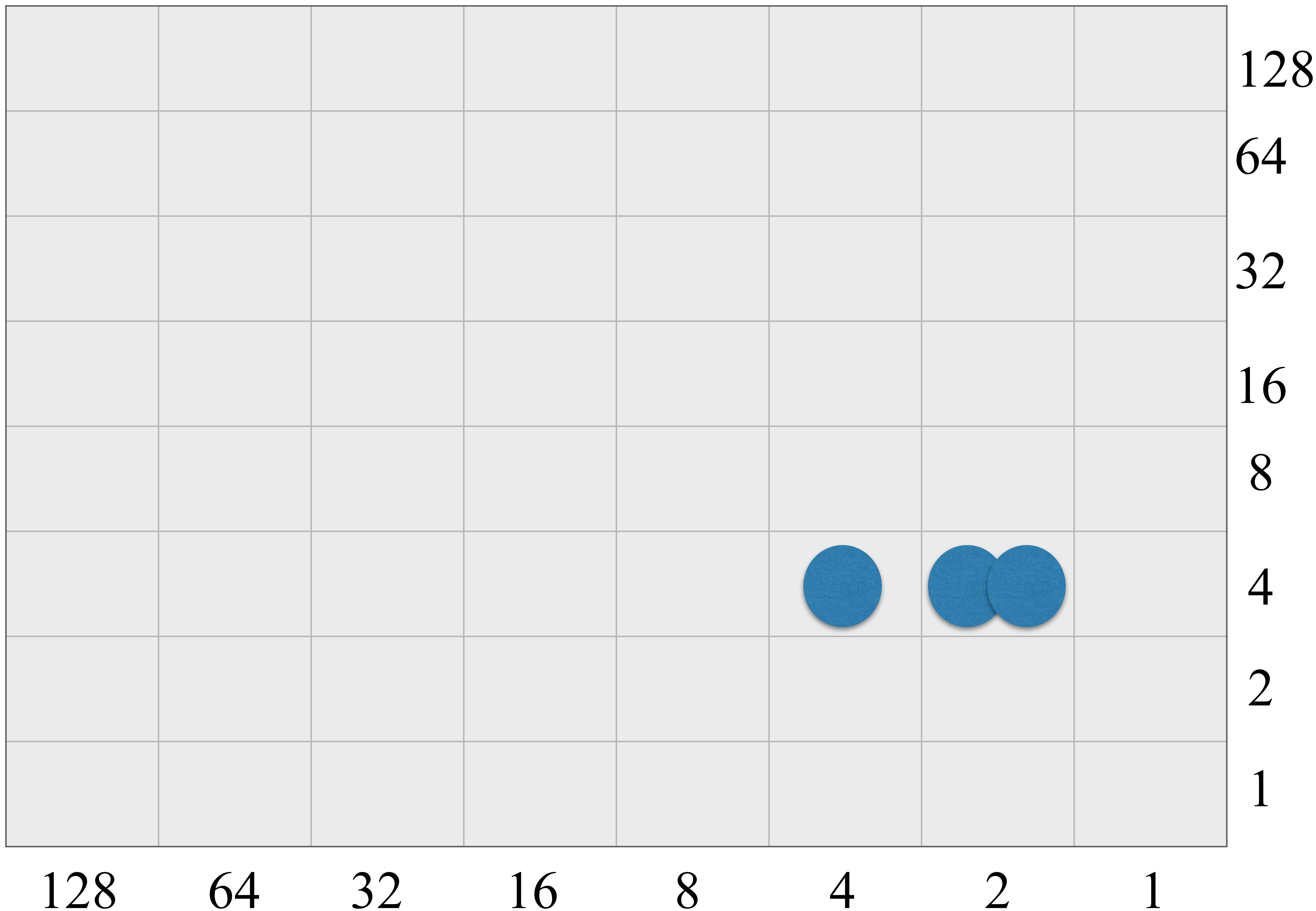
$\sqrt{32}$



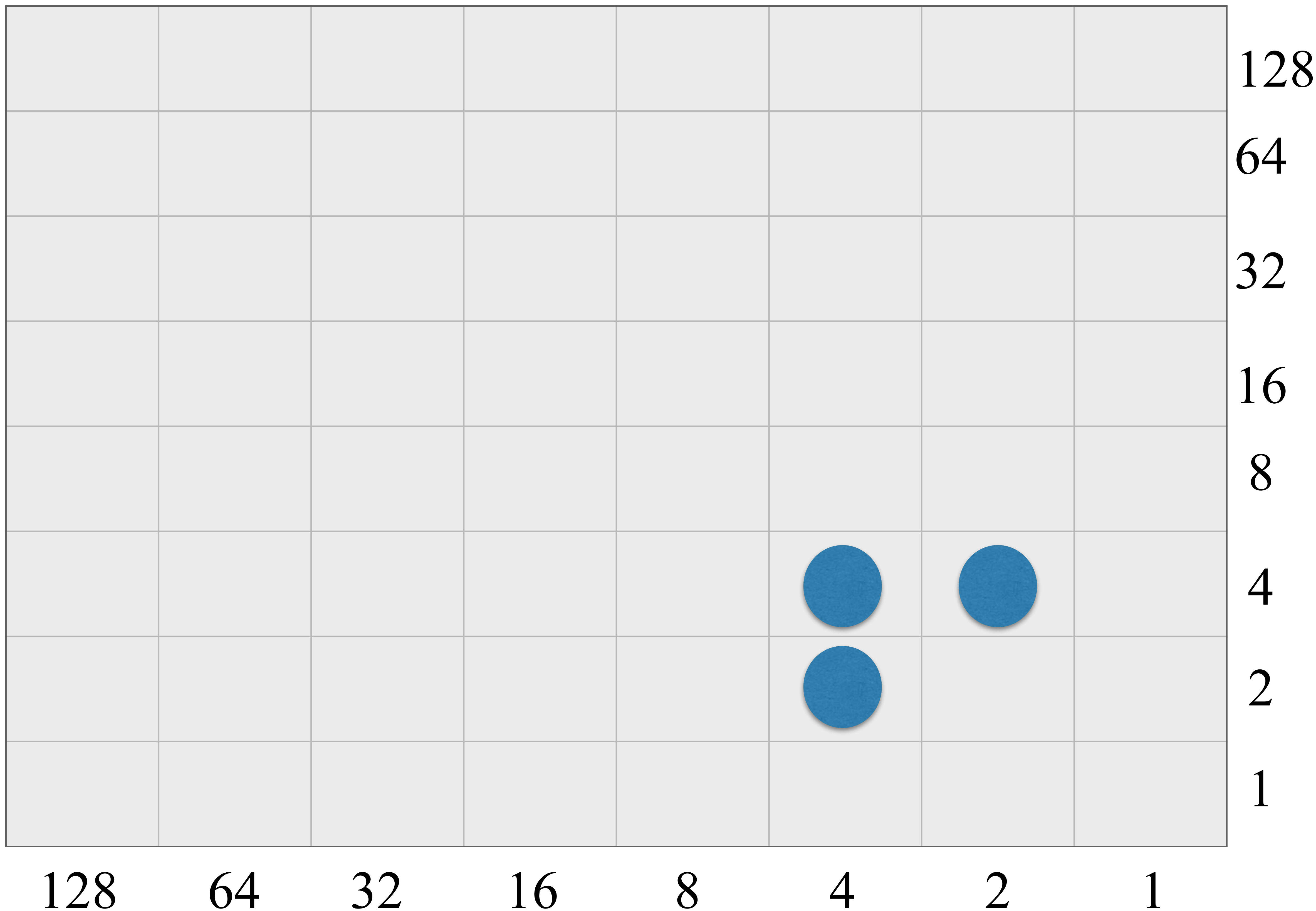
$\sqrt{32}$



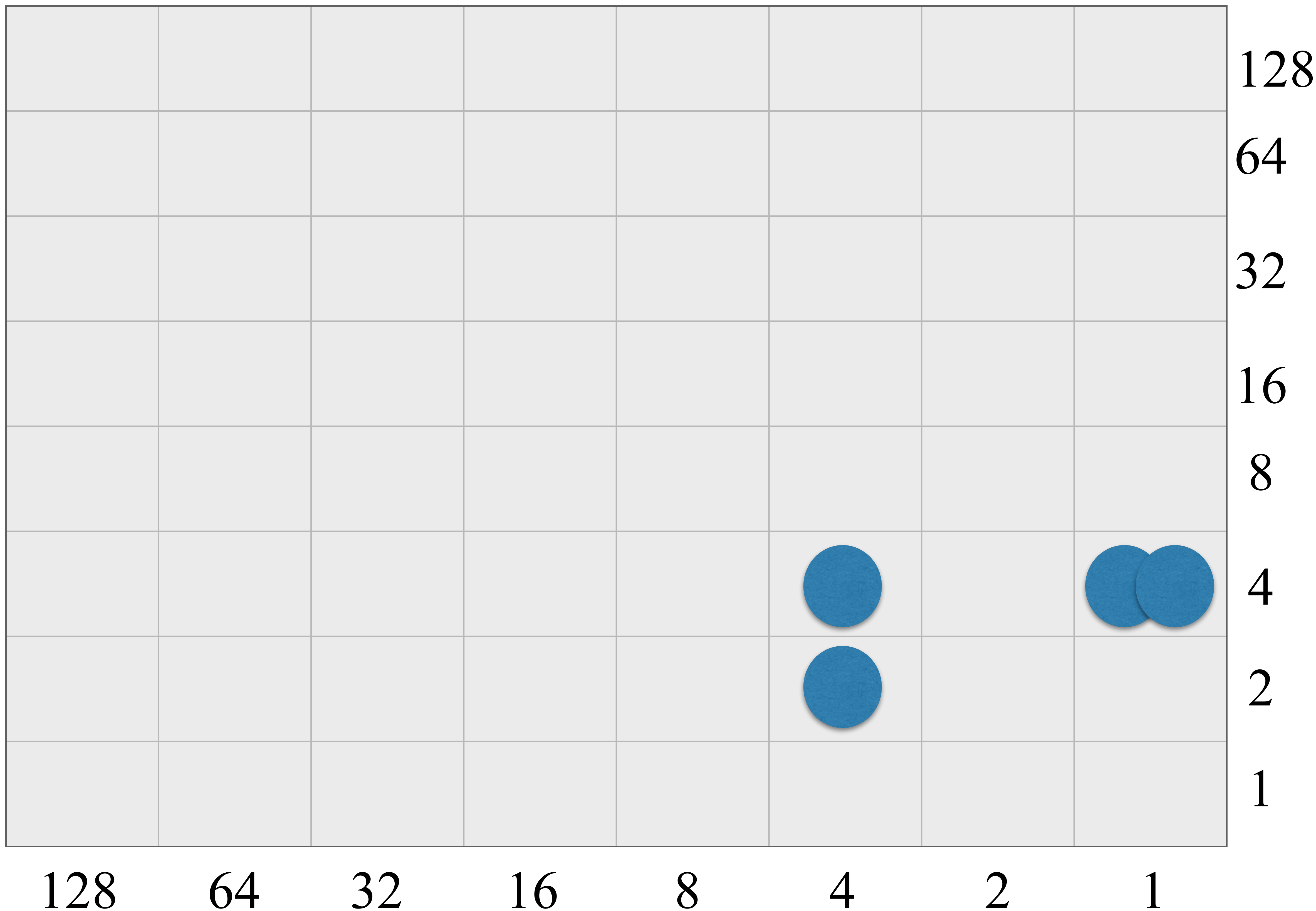
$\sqrt{32}$



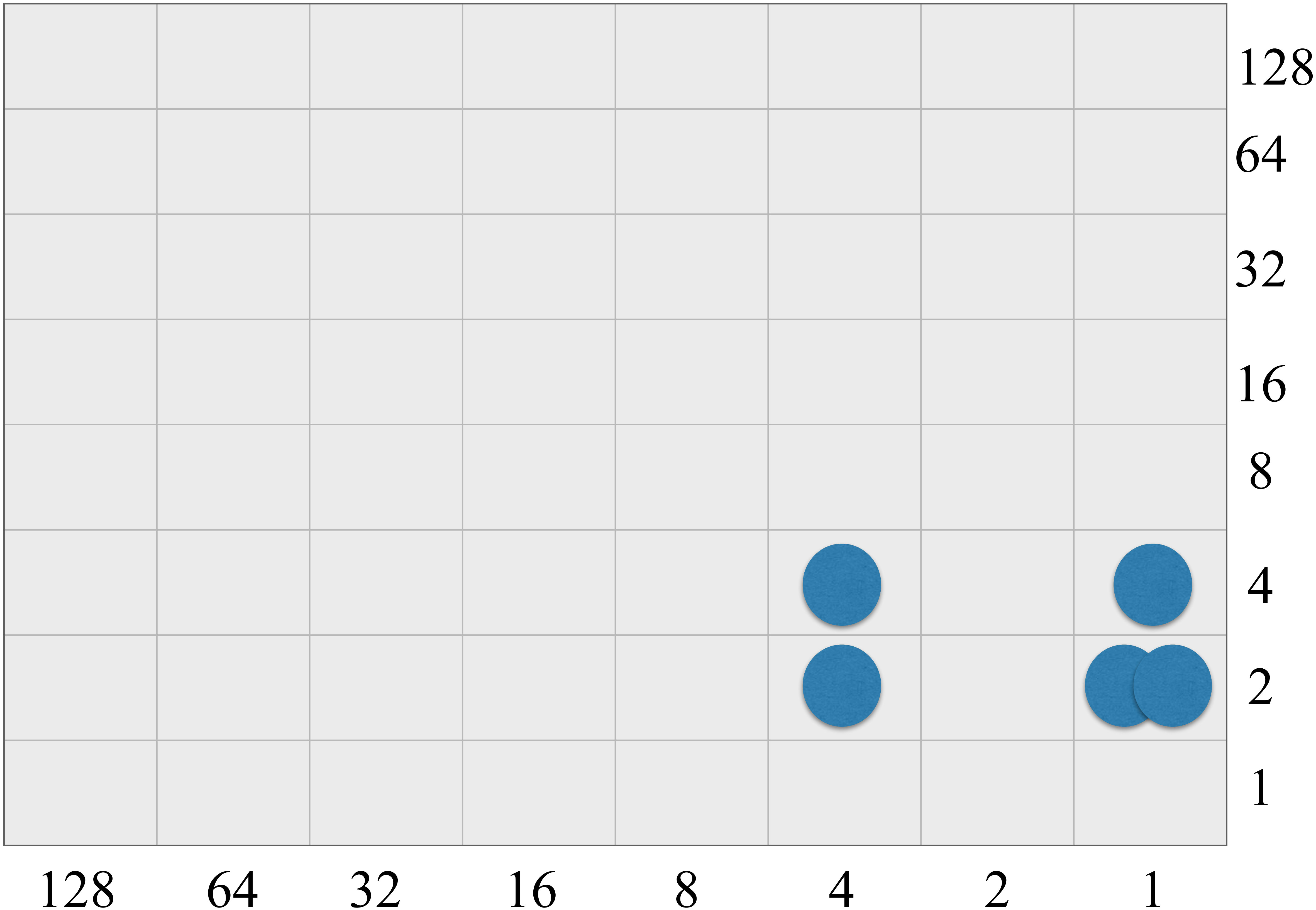
$\sqrt{32}$



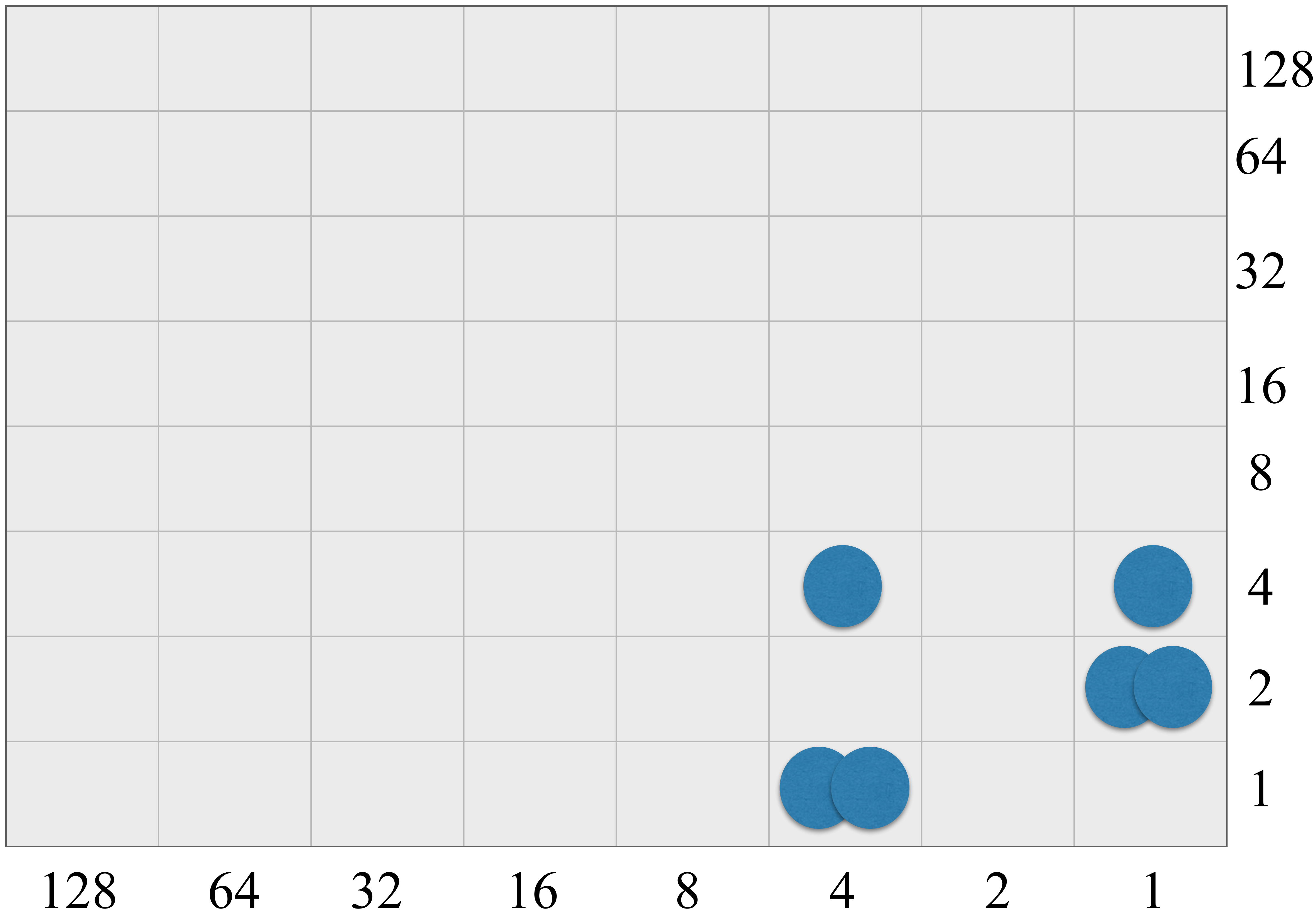
$\sqrt{32}$



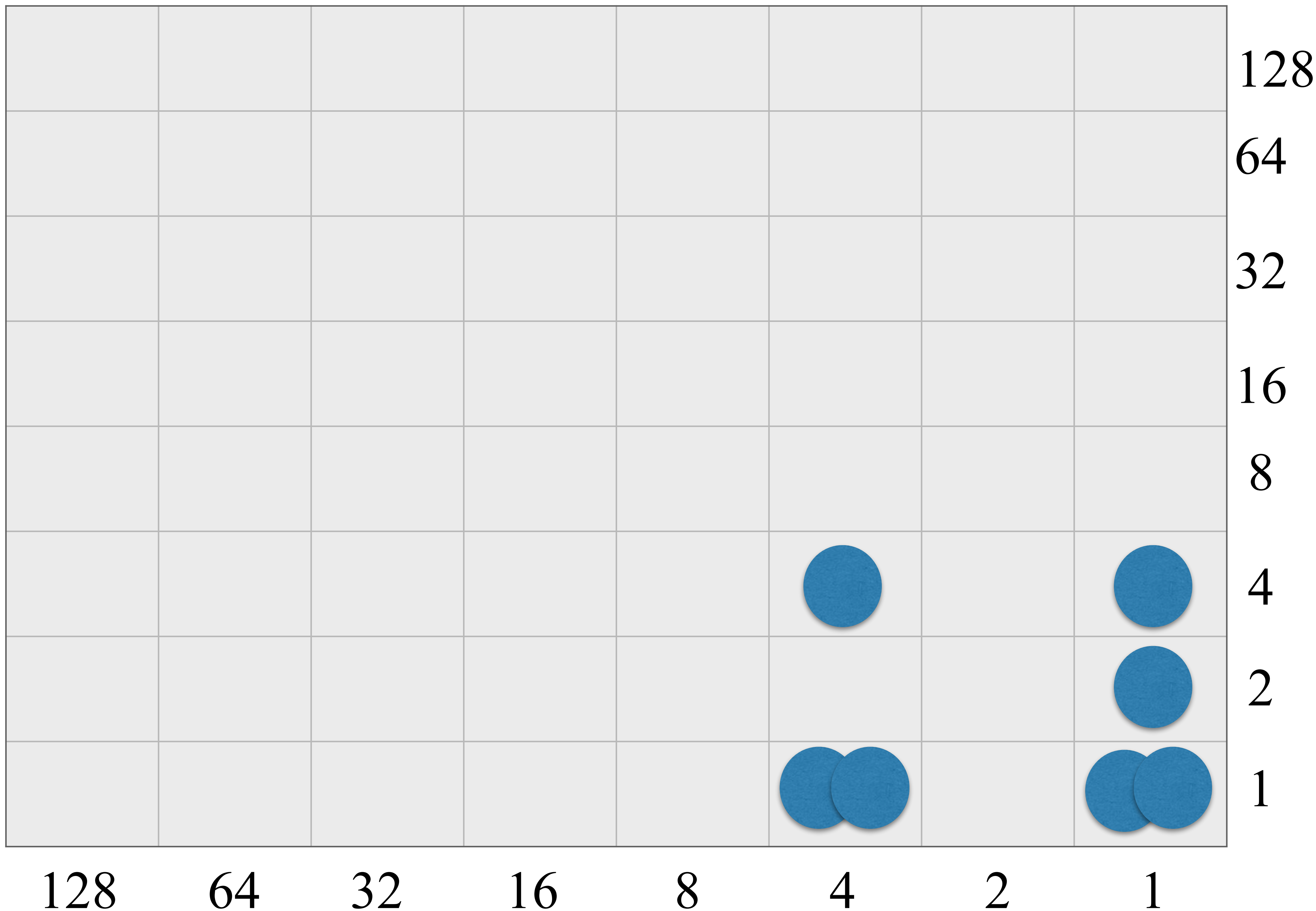
$\sqrt{32}$



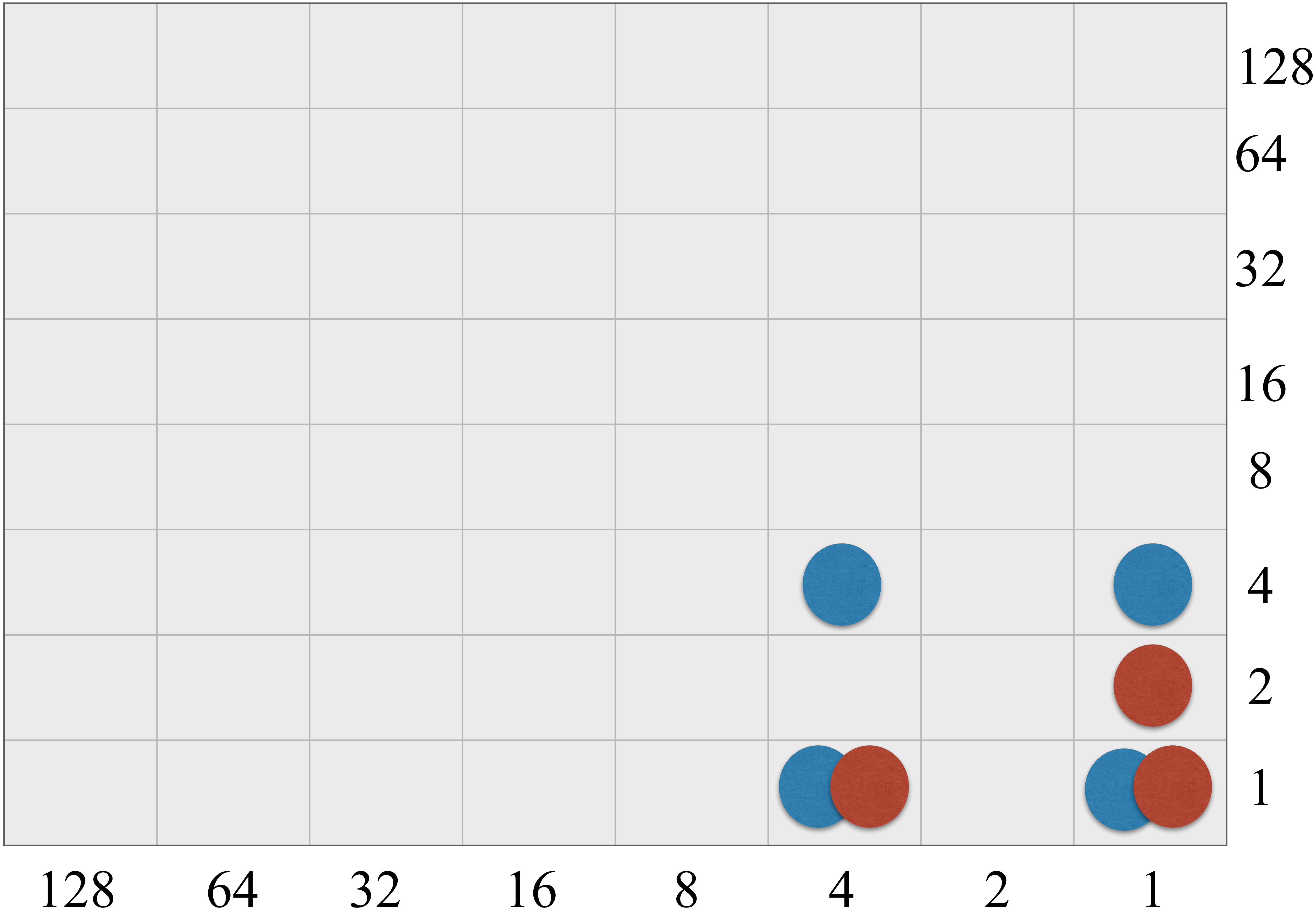
$\sqrt{32}$



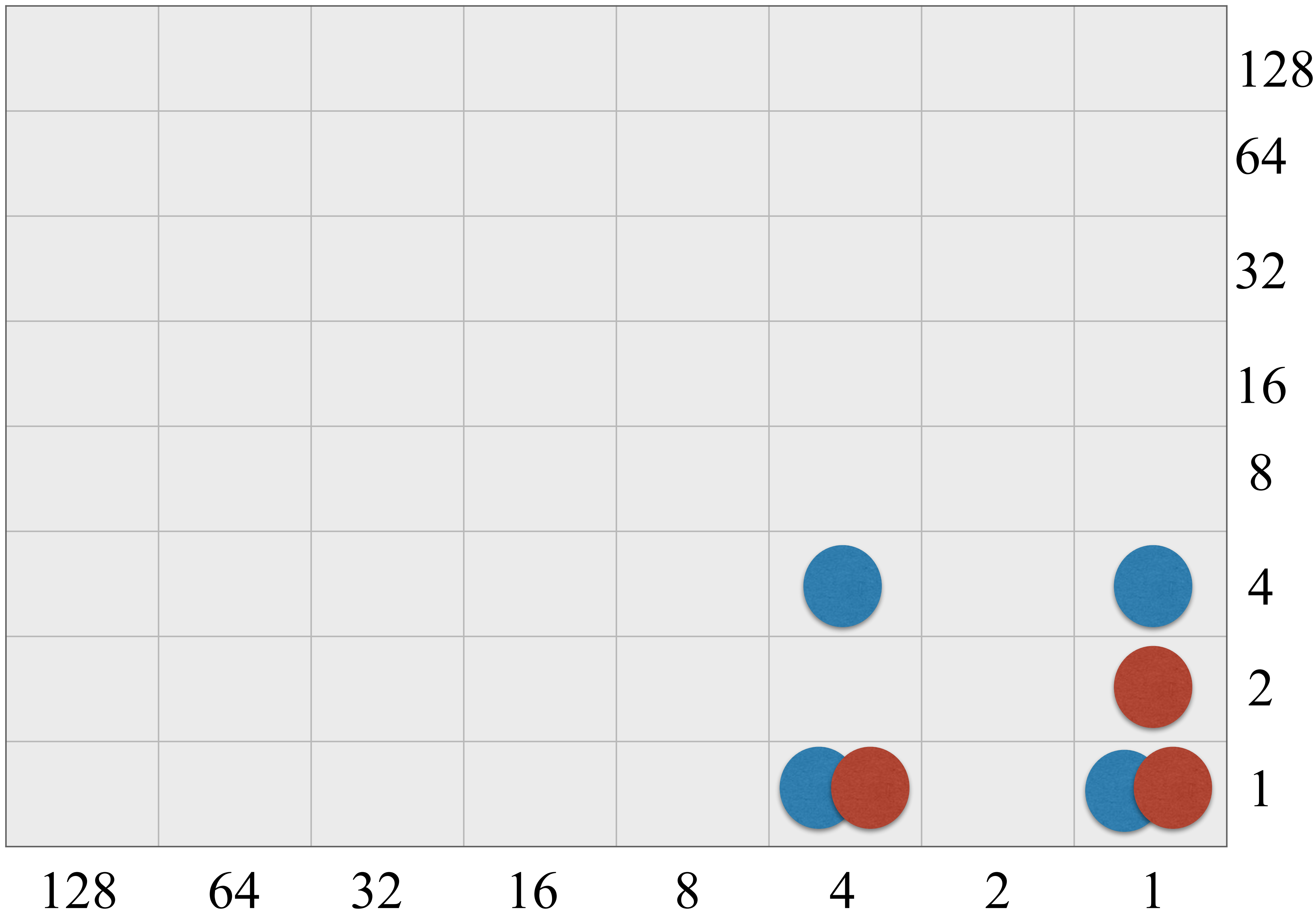
$\sqrt{32}$



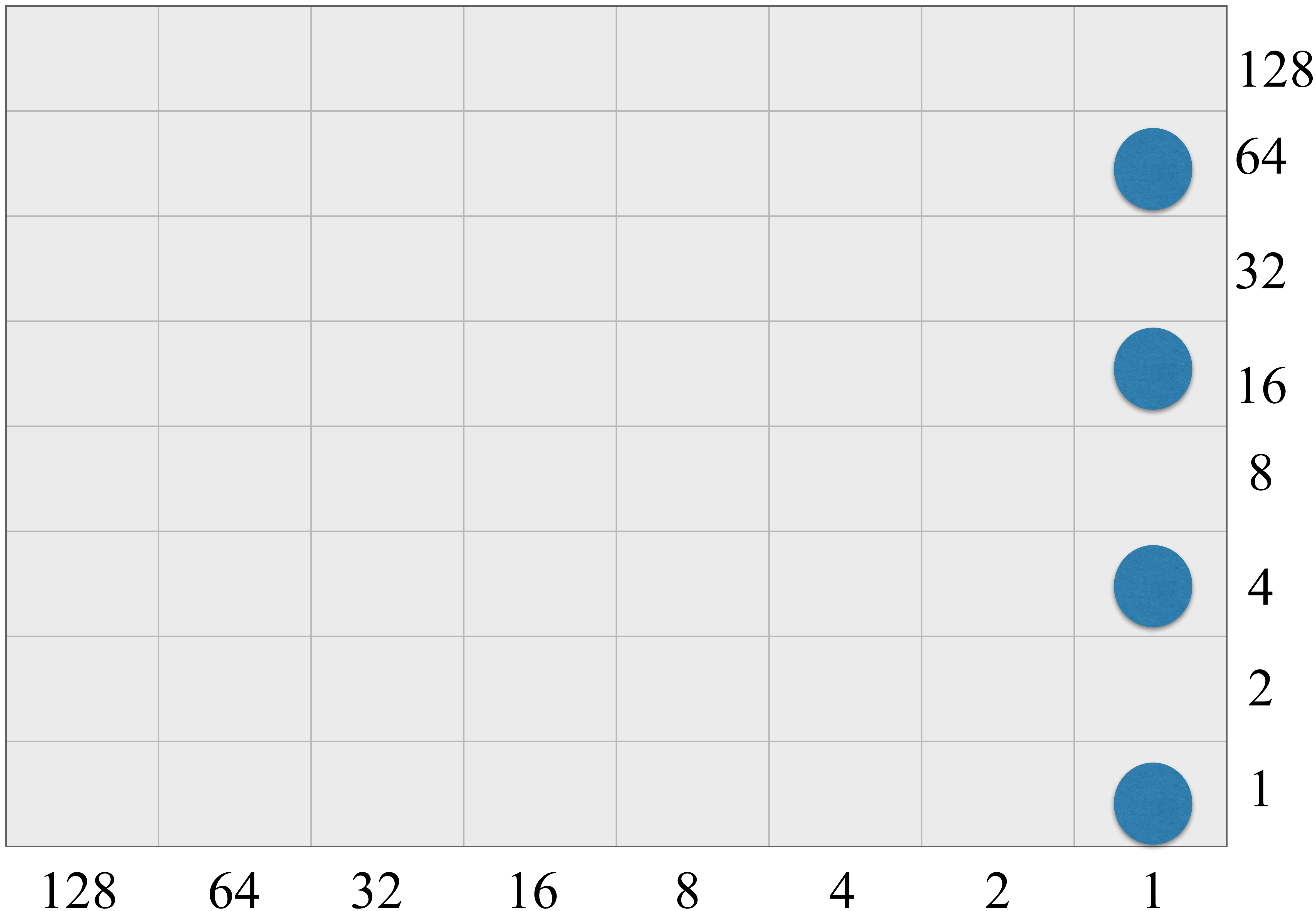
$\sqrt{32}$

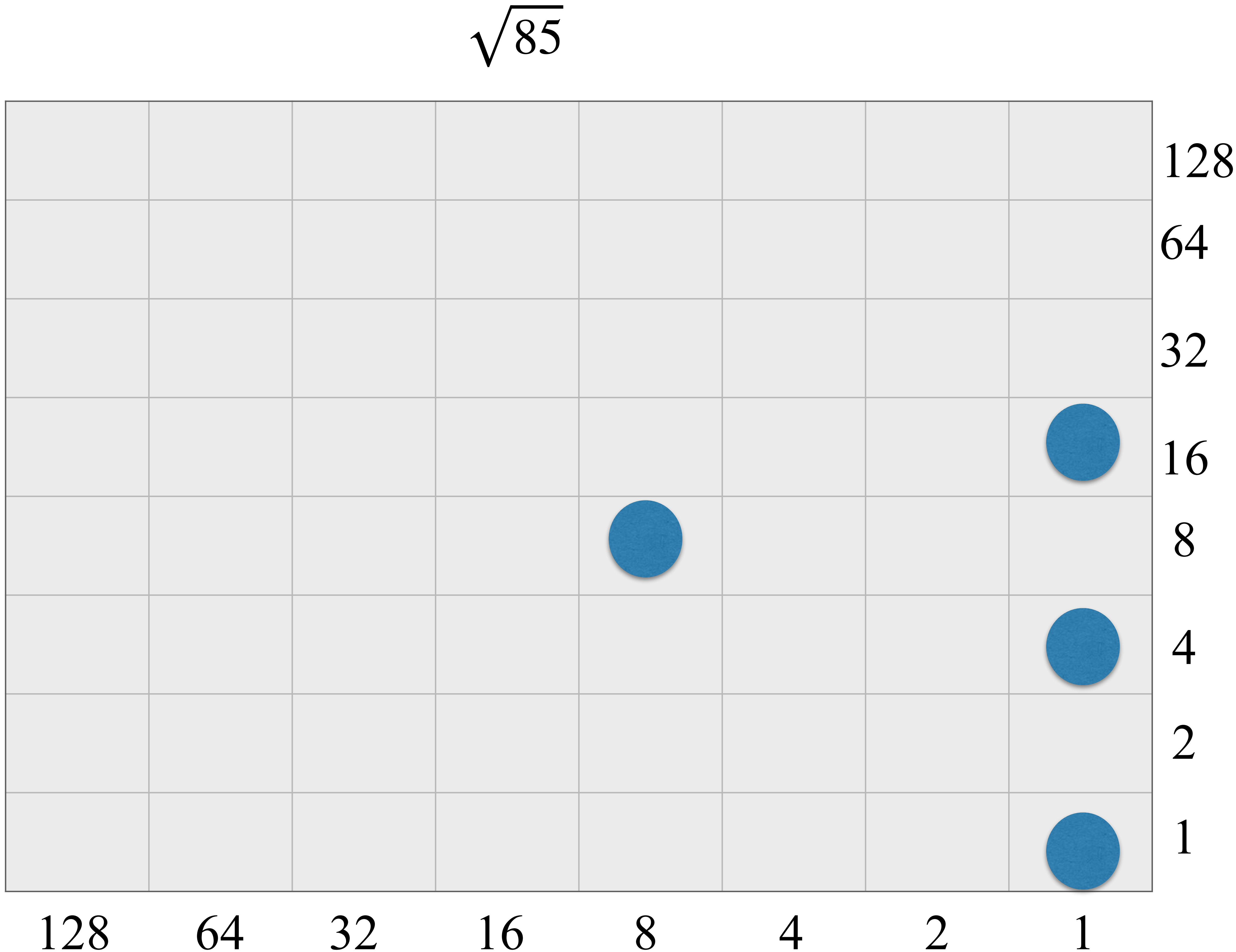


$$\sqrt{32} = 5 \ (Resto \ 7)$$

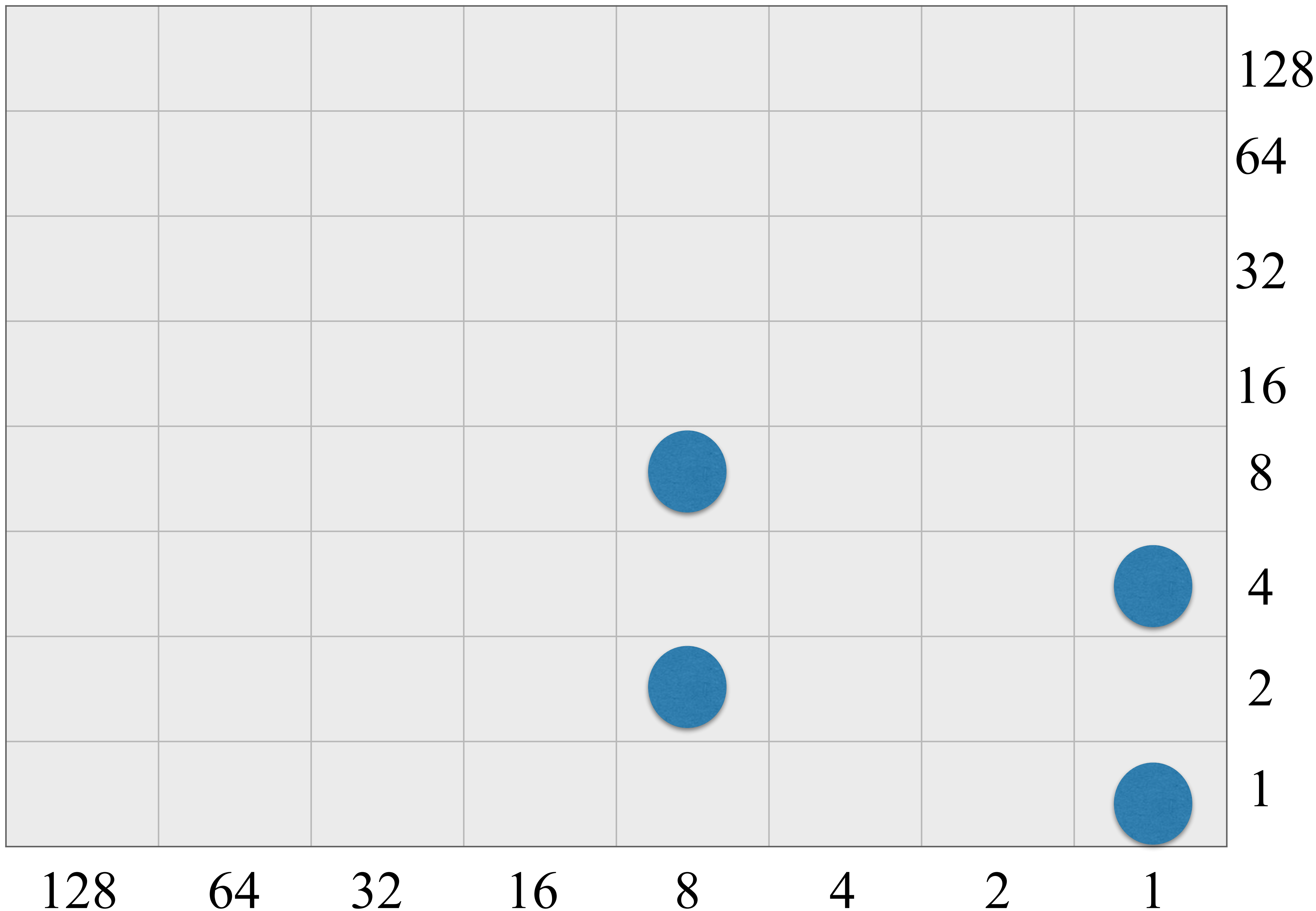


$\sqrt{85}$

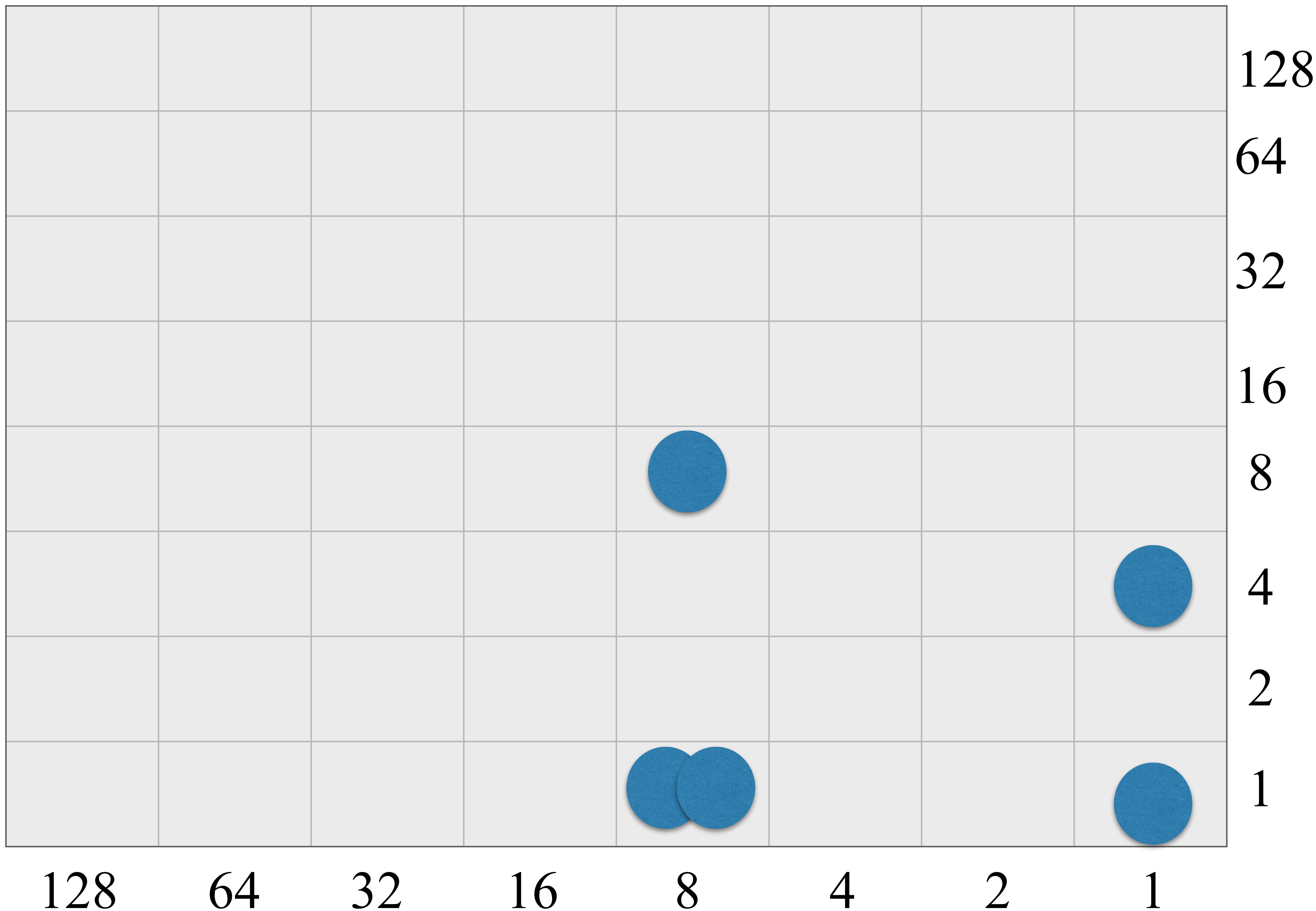



$\sqrt{85}$
128
64
32
16
8
4
2
1
128
64
32
16
8
4
2
1

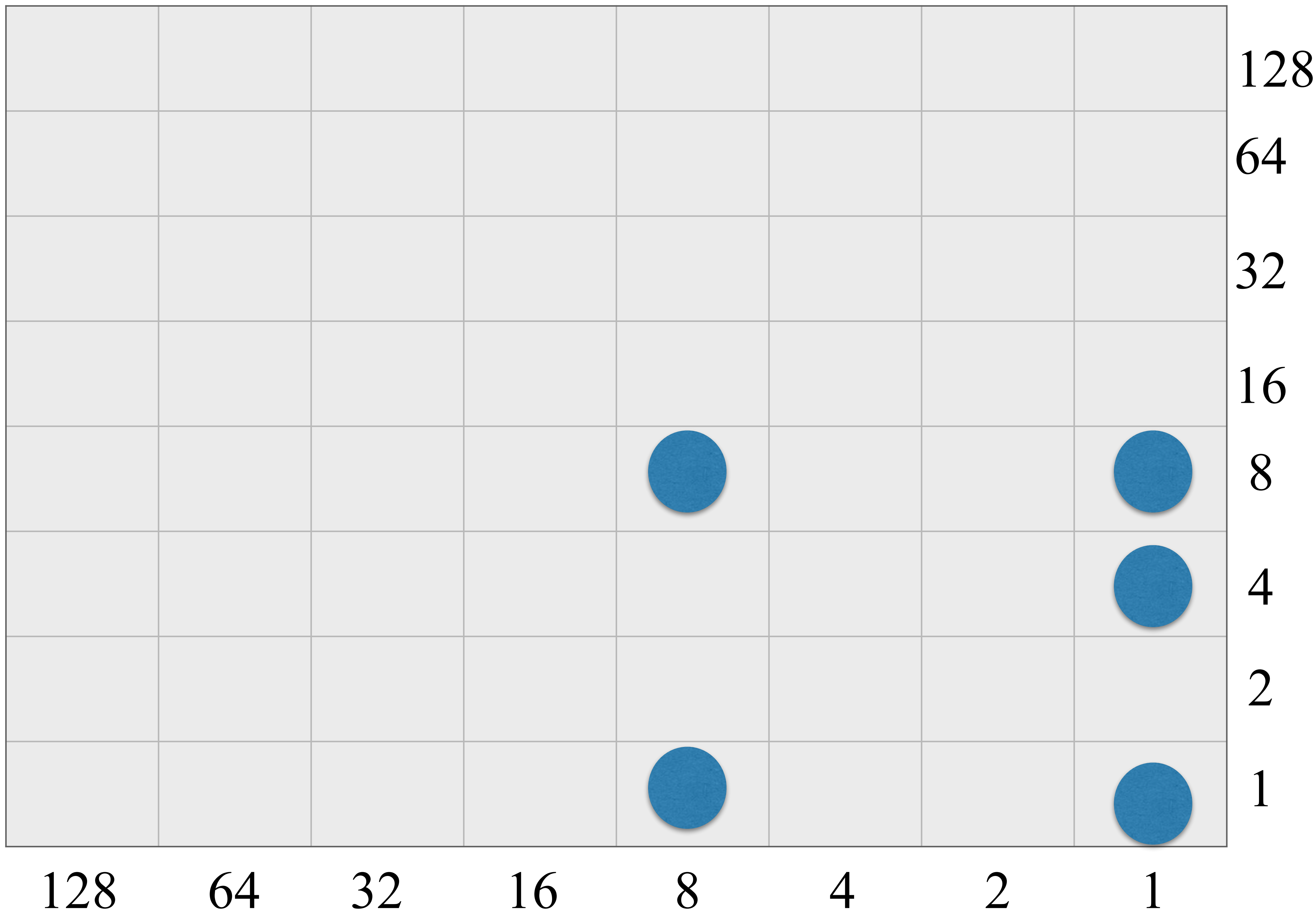
$$\sqrt{85}$$



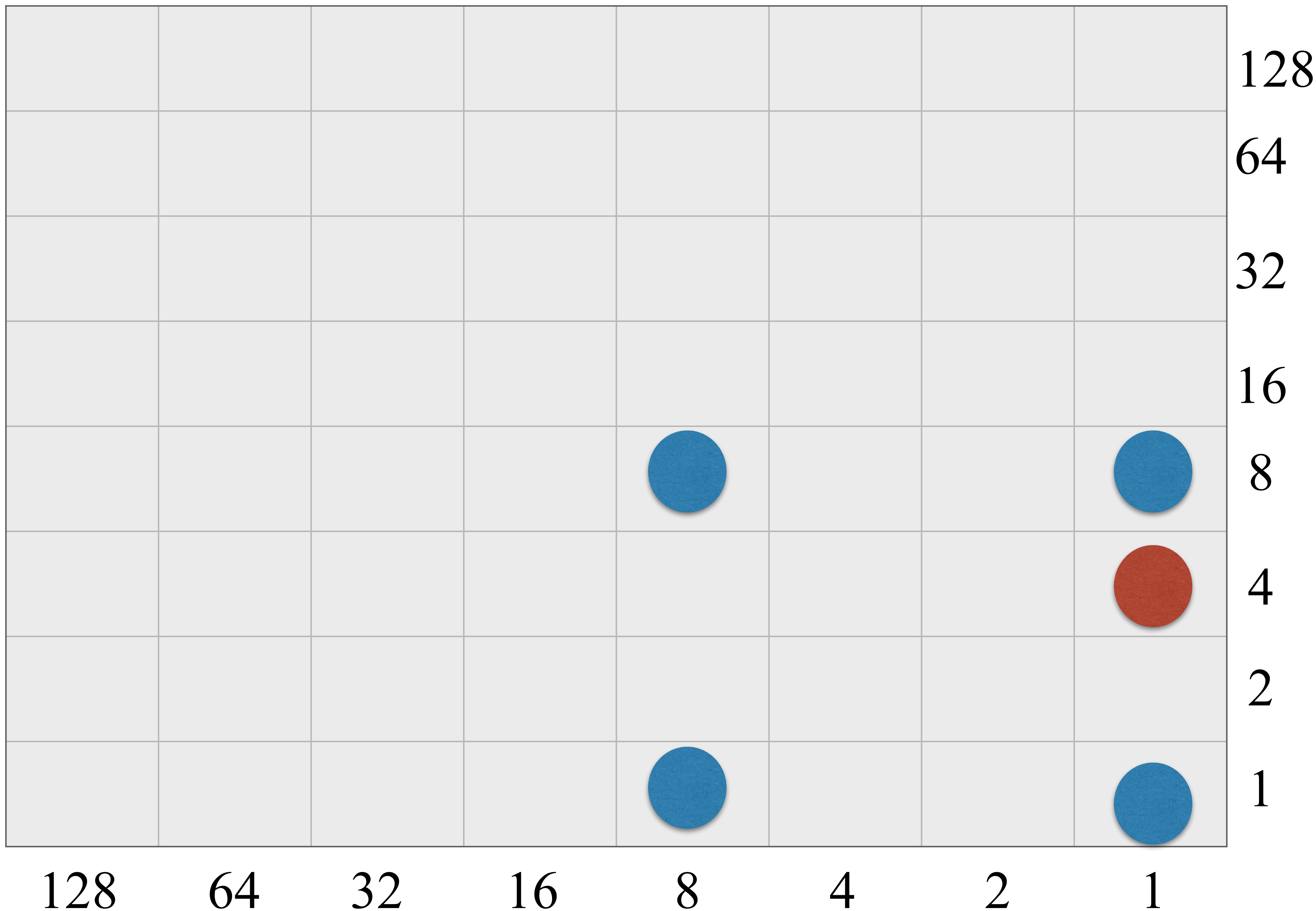
$\sqrt{85}$



$$\sqrt{85}$$

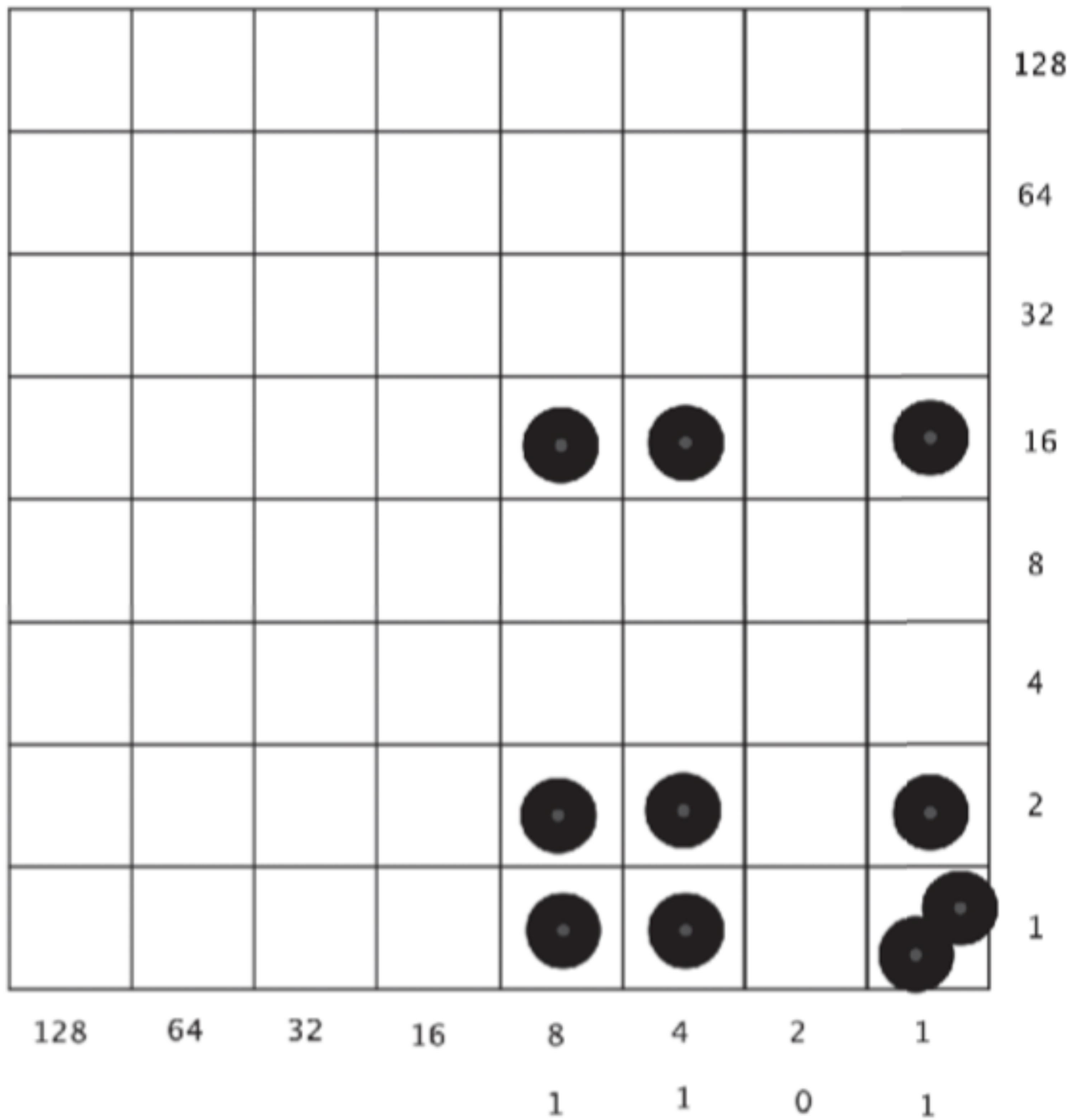


$$\sqrt{85} = 9 \ (Resto \ 4)$$



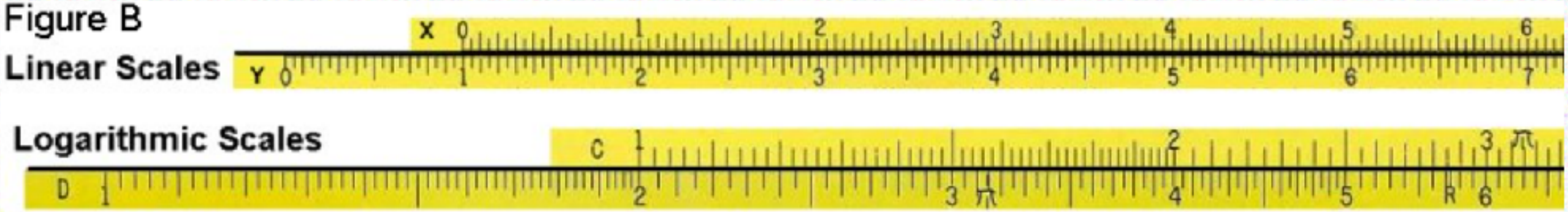
Raízes de 49; 50, 24, 17

$$248 \div 13 = \ldots$$



$248 \div 13 = 19$ e o resto é 1

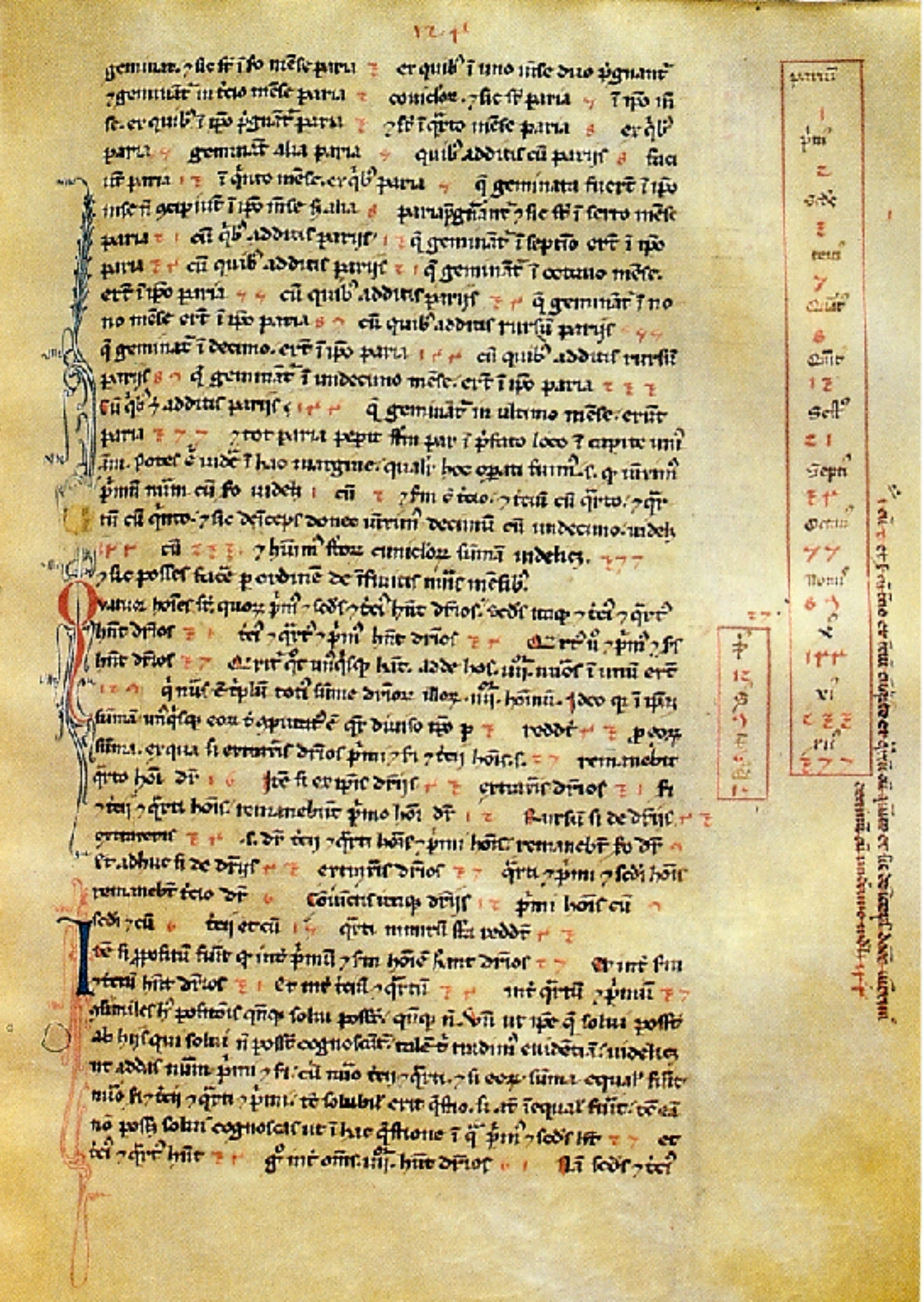
Figure B


Linear Scales
X 0 1 2 3 4 5 6
Y 0 1 2 3 4 5 6 7
Logarithmic Scales
C 1 2 3 π
D 1 2 3 π 4 5 R 6

Álgebra

Leonardo de Pisa

Fibonacci



Liber abbaci (1202)

Introduz sistema de numeração hindu-arabe (posicional decimal)

$$231 \neq 132$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

Muitos problemas, muitas equações algébricas

Métodos egípcios antigos, árabes (al-Khwarizmi), chineses, indianos, ...

Mas também muitos problemas originais, ilustrando grande variedade de métodos de resolução.

Um outro problema clássico é o do leão na cova: a cova tem 50 pés de profundidade. O leão sobe 1/7 de pé cada dia e, depois, cai, durante a noite, 1/9 de pé. Quanto tempo demora a sair da cova?

dois homens têm uma certa quantidade de dinheiro. O primeiro diz para o segundo, “se me der um *denarius*, ficarei com o mesmo dinheiro você tem.” O segundo diz para o primeiro: “se me der um *denarius*, ficarei com dez mais do que você tem.”

No capítulo final do seu livro, Leonardo exibe o seu domínio completo da álgebra dos seus predecessores islâmicos quando mostra como resolver equações que são redutíveis a equações quadráticas. Discute à vez cada um dos seis tipos básicos de equações quadráticas, dados por al-Khwarizmi e, depois, apresenta provas geométricas dos procedimentos de resolução para cada um dos três casos mistos. Segue as provas com 50 páginas de exemplos, a maioria tomados das obras de al-Khwarizmi e Abū Kāmil, incluindo os familiares que começam "divida-se 10 em duas partes."

O conteúdo do *Liber abbaci* não representa qualquer progresso sobre as obras matemáticas então correntes no mundo islâmico. De facto, no que à álgebra diz respeito, Leonardo estava somente a apresentar a matemática do século X islâmico, ignorando os avanços dos séculos XI e XII. O valor principal da obra foi de que apresentou à Europa a primeira introdução abrangente da matemática islâmica. Aqueles que a leram foram contemplados com uma grande variedade de métodos para resolver problemas de matemática, métodos que forneceram o ponto de partida para se realizarem outros progressos.

Com o desenvolvimento do comércio, a Itália do século xiv não precisava da matemática das universidades (quadrivium) mas sim da capacidade de calcular e de resolver problemas.

Surgiram assim os *maestri d'abbaco*, ou abacistas. Principalmente dedicados a ensinar os filhos dos comerciantes.

Os textos de álgebra islâmicos apareceram em latim no século xii. Os gregos, em meados do xvi já estavam na Europa, também em latim.

Os textos dos abacistas consistiam em grandes colecções de problemas e resoluções, com base em métodos da aritmética e álgebra islâmicas.

Os problemas eram tipicamente de dois tipos: genuinamente de temática comercial e recreativos.

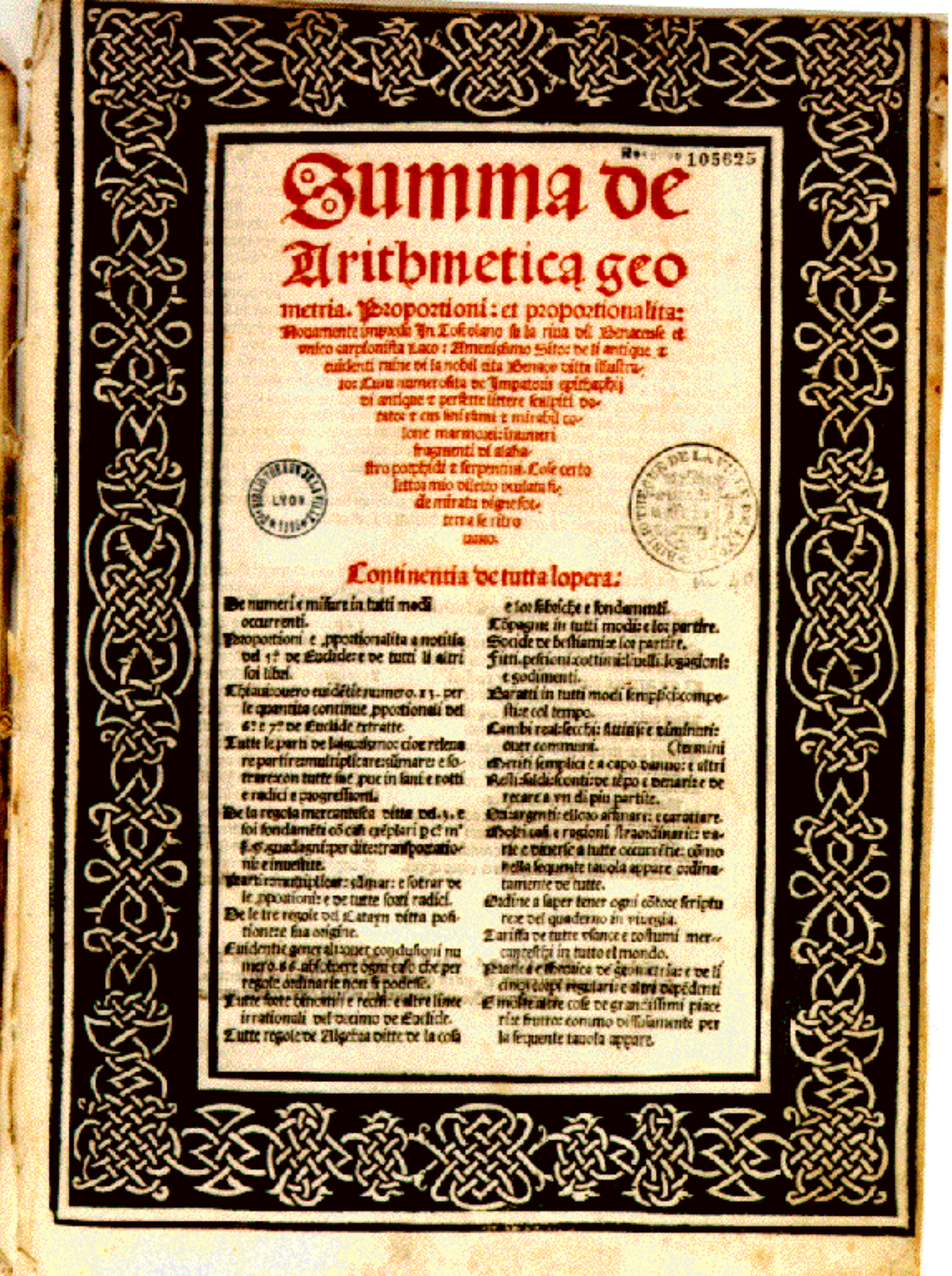
O florim de ouro vale 5 *lire*, 12 *soldi*, 6 *denarii* em Lucca. Quanto valem (em termos de florins de ouro) 13 *soldi*, 9 *denarii*? (Precisa-se de saber que 20 soldi valem 1 *lira* e 12 *denarii* valem 1 *soldo*).

A *lira* dá 3 *denarii* de juro ao mês. Quanto ganhará com 60 *lire* em 8 meses? (Este é um problema de juros simples. Problemas de juros compostos também aparecem mas o período considerado era, geralmente, um ano).

Um campo tem 300 pés de comprimento. Um cão está num canto e uma lebre num outro. O cão salta 9 pés de cada vez, enquanto que a lebre salta 7. Em quantos pés e saltos o cão apanhará a lebre?

Com uma competência crescente em álgebra, consequência dos estudos destes textos dos abacistas, era natural que os estudiosos europeus tentassem aplicar estas técnicas na solução de problemas mais teóricos originados pela redescoberta de muitos dos textos matemáticos clássicos gregos. Esta combinação de álgebra e geometria gregas iria conduzir, no século XVII, a novas técnicas analíticas que servem de base à matemática moderna.

Luca Pacioli (1445-1517)


Summa de Arithmetica geometria. Proportioni: et proportionalita:

[illegible]

Continentia de tutta lopera:

De numeri e misure in tutti modi occurrenti.

Proportioni e proportionalita a notitia del 5° de Euclide e de tutti li altri soi libri.

[illegible]

Tutte le parti de lalgorismo: cioe relevare partire multiplicare: summare e sotrarre con tutte sue prove in sani e rotti e radici e progressioni.

De la regola mercantesca ditta del 3. e soi fondamenti [illegible]

[illegible]

De le tre regole del Catayn ditta positione e sua origine.

[illegible]

Tutte regole de Algebra ditte de la cosa e soi fabriche e fondamenti.

Compagnie in tutti modi: e loro partire.

Socide de bestiami: e lor partire.

[illegible]

Baratti in tutti modi semplici e composti e col tempo.

[illegible]

Ordine a saper tener ogni conto e scripture del quaderno in vinegia.

Tariffa de tutte usance e costumi mercantesche in tutto el mondo.

[illegible]

E molte altre cose de grandissimi piacere e frutto: commo diffusamente per la sequente tavola appare.

Summa 1494

o facto de que foi o primeiro dos trabalhos a ser impresso, fizeram com que fosse grande a sua expansão e influência, um texto extensivamente estudado pelos matemáticos italianos do século XVI. Tornou-se a base comum a partir da qual estes homens foram capazes de alargar o domínio da álgebra.

Nicolas Chuquet (m.1487) era um médico francês que escreveu o seu tratado matemático em Lion próximo do final da sua vida.

Entre a/b e c/d existe o número racional (a+c)/(b+d)

Exemplo: entre 1/2 e 3/4 existe 4/6=2/3

exemplo, para achar a raiz de $x^2 + x = 39\ 13/81$, Chuquet começa por notar que 5 é demasiado pequeno para ser raiz, enquanto que 6 é demasiado grande. Continua, depois, para encontrar o valor intermédio correcto, tentando consecutivamente 5 1/2, 5 2/3, 5 3/4, e 5 4/5, determinando que a raiz que se deve encontrar entre os dois últimos valores. Aplicando esta regra às partes fraccionárias, tenta 5 7/9 que resulta ser a resposta correcta.

Na segunda parte de *Triparty*, Chuquet aplica a regra ao cálculo de raizes quadradas de números que não são quadrados perfeitos. Notando que 2 é demasiado pequeno e 3 demasiado grande para serem a raiz de 6, inicia o passo seguinte do seu processo de aproximação determinando que 2 1/3 é demasiado pequeno e 2 1/2 demasiado grande. As suas várias aproximações seguintes são, por sua vez, 2 2/5, 2 3/7, 2 4/9, 2 5/11 e 2 9/20. Em cada passo, calcula o quadrado do número escolhido, e, dependendo de ser maior ou menor do que 6, determina entre que dois valores usar a sua regra de aproximação.

Por exemplo, dá a solução da equação $cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n}$ como sendo

$$x = \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \left(\frac{b}{2}\right)}.$$

A álgebra na Alemanha aparece pela primeira vez no século XV, provavelmente devido às mesmas razões que levaram ao seu desenvolvimento, um pouco mais cedo, na Itália. É provável que muitas das técnicas fossem também importadas da Itália. Mesmo o nome dado à álgebra na Alemanha, a Arte da *Coss*, revela a sua origem italiana. *Coss* era simplesmente a forma germânica de cosa, ou coisa

Christoff Rudolff escreveu a sua *Coss*, a primeira álgebra alemã compreensiva, em Viena, no princípio da década de 1520.

Sistema de Rudolff para Potências da Incógnita

dragma	φ	radix	𝔯 $\leftrightarrow x$
zensus	ʒ $\leftrightarrow x^2$	cubus	𝔠 $\leftrightarrow x^3$
zens de senzs	ʒ ʒ $\leftrightarrow x^4$	sursolidum	ſʒ $\leftrightarrow x^5$
zensicubus	ʒ 𝔠 $\leftrightarrow x^6$	bissursolidum	bſʒ $\leftrightarrow x^7$
zenszensdezens	ʒ ʒ ʒ $\leftrightarrow x^8$	cubus de cubo	c𝔠 $\leftrightarrow x^9$

A segunda metade da *Coss*, de Rudolff, é devotada à resolução de equações algébricas. Em vez de usar o padrão da classificação das equações em seis categorias de al-Khwarizmi, Rudolff usa a sua classificação em oito categorias. A regra para a resolução de cada tipo de equação é dada em palavras e, depois, ilustrada com exemplos. Embora Rudolff trate, nas suas classes, de equações de grau mais elevado do que dois, tal como Chuquet, inclui apenas as que podem ser resolvidas por redução a uma expressão quadrática ou por raízes simples. Assim, por exemplo, uma das suas classes é a que agora se escreve como $ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$. A solução dada é a padrão

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}.$$

$$x^2 + 2x = 3 \qquad x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 + ax = b \qquad x^2 = ax + b \qquad etc$$

Coeficientes sempre positivos!

Biografia

Michael Stifel (1487-1567)

Michael Stifel foi ordenado padre em 1511. Reagindo a vários abusos eclesiásticos, foi um dos primeiros seguidores de Martinho Lutero. Na década de 1520 interessou-se por aquilo a que chamou *wortrechnung* (cálculo de palavras), ou seja, a interpretação de palavras pelos valores numéricos das letras envolvidas. Através da interpretaçao de certas passagens da Bíblia usando os seus métodos numéricos, finalmente veio a acreditar que o mundo terminava no dia 18 de Outubro de 1533. Reuniu a sua congregação na igreja na manhã desse dia mas, com grande pesar seu, não se passou nada. Foi destituído da sua paróquia e, durante algum tempo, esteve com prisão domiciliária. Como estava já curado de fazer profecias, foi-lhe dada outra paróquia, em 1535, devido à intervenção de Lutero. Subsequentemente, devotou-se ao estudo da matemática na Universidade de Wittenberg, e cedo se tornou num especialista de métodos algébricos, publicando o *Deutsche Arithmetica* em 1545, um ano depois da *Arithmetica Integra*. Mais tarde, voltou ao seu *wortrechnung* e escreveu duas obras sobre o assunto.

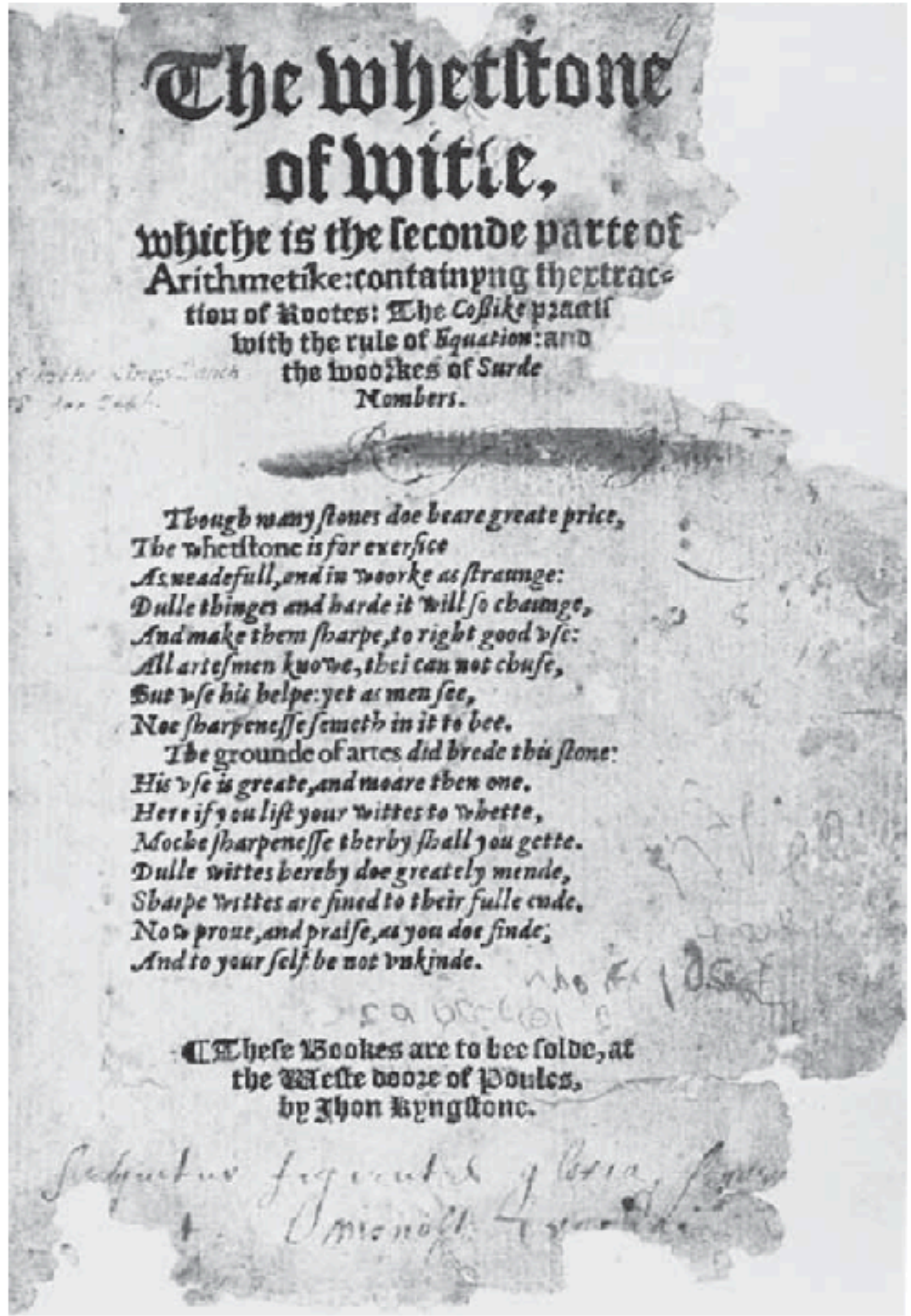
Embora Stifel, como a maioria dos seus contemporâneos, não aceitasse as raízes negativas de equações, foi o primeiro a comprimir as três formas padrão da equação quadrática na forma simples $x^2 = bx + c$, onde b e c são ou ambos positivos ou de sinais contrários. A solução, expressa com palavras, era então equivalente a

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c},$$

onde o sinal negativo era apenas possível no caso em que b fosse positivo e c negativo. Nesse caso, em $(b/2)^2 + c > 0$, haveria duas soluções

Biografia
Robert Recorde (1510-1558)

Robert Recorde formou-se em Oxford em 1531 e licenciou-se em medicina pouco tempo depois. Embora, provavelmente, exercesse medicina em Londres no final dos anos 1540, as suas únicas posições foram de funcionário público, lugares nos quais não teve êxito notável. Por outro lado, escreveu vários manuais matemáticos com êxito, além de *The Whetstone of Witte*, incluindo *The Ground of Arts* (1543) sobre aritmética, *The Pathway to Knowledge* (1551) sobre geometria e *The Castle of Knowledge* (1556) sobre astronomia. As suas obras mostram que estava especialmente interessado em pedagogia. Em particular, os seus livros tinham a forma de um diálogo entre mestre e pupilo em que cada passo de cada técnica particular era cuidadosamente explicado.



The whetſtone
of witte,
whiche is the ſeconde parte of
Arithmetike: containyng thextrac-
tion of Rootes: The Coſike practiſe,
with the rule of Equation: and
the woorkes of Surde
Nombers.

Though many ſtones doe beare greate price,
The whetſtone is for exerſice
As neadefull, and in woorke as ſtraunge:
Dulle thinges and harde it will ſo chaunge,
And make them ſharpe, to right good vſe:
All arteſmen knowe, thei can not chuſe,
But vſe his helpe: yet as men ſee,
Noe ſharpeneſſe ſemeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this ſtone:
His vſe is greate, and moare then one.
Here if you liſt your wittes to whette,
Moche ſharpeneſſe therby ſhall you gette.
Dulle wittes hereby doe greatly mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Now proue, and praiſe, as you doe finde,
And to your ſelf be not vnkinde.

¶ These Bookes are to bee ſolde, at
the Weſte doore of Poules,
by Jhon Kyngſtone.

Página do título de *The Whetstone of Witte* (1557). (*Fonte:* Smithsonian Institution Libraries, Photo N.º 92-338)

The Whetstone of Witte tem pouco de original na técnica porque era baseado em fontes alemãs e usava mesmo símbolos alemães para potências da incógnita, mas há alguns pontos de interesse no texto que ensinou álgebra a uma geração inteira de cientistas ingleses. Primeiro, Recorde criou o símbolo moderno para igualdade: "Para evitar a tediosa repetição destas palavras – *é igual a* – porei, como faço geralmente na prática, um par de paralelas, ou linhas gémeas de igual comprimento, assim, $=$, porque nenhumas duas coisas podem ser mais iguais." Segundo, modificou e alargou o simbolismo germânico de potências da incógnita a potências até 80, colocando o inteiro da potência próximo de cada símbolo.

para ajudar os estudantes a recordar as várias regras das operações, deu-as em forma poética. Os seus versos dando o procedimento para se multiplicar e dividir expressões da forma ax^n onde a potência n é chamada a "grandeza" da expressão, incluem a regra padrão de sinais para aquelas operações, assim como a regra dos expoentes:

> Who that will multiplie.
> Or yet divide trulie:
> Shall like still to have more,
> And mislike lesse in store.
> Theis quantities does kepe soche rate,
> That .M. doeth adde; and .D. abate.
>
> (Quem quiser multiplicar
> Ou mesmo dividir bem
> Deve querer ter ainda mais
> E não desejar ter menos.
> As suas grandezas devem ter tal valor
> Que .M. faz somar, e .D. diminuir)

Biografia

Pedro Nunes (1502-1578)

Pedro Nunes (Fig. 9-3) estudou na Universidade de Salamanca, mas recebeu o grau em medicina, em Lisboa, em 1525. Fez várias contribuições à ciência da navegação e foi o principal cosmógrafo do rei de Portugal, e professor de matemática na Universidade de Coimbra, escrevendo o seu *Libro de Algebra* em 1532. Muitos dos seus estudantes, mais tarde, ocuparam vários lugares de importância na côrte. Embora Nunes fosse de origem judaica, nunca foi perseguido pela Inquisição, provavelmente porque um dos seus alunos, o Cardeal D. Henrique, se tornou Inquisidor Geral. O texto de álgebra de Nunes foi originalmente escrito em português, mas, como pensou que teria maior influência se estivesse em castelhano, traduziu-o para esta língua cerca de 30 anos depois, e fê-lo imprimir na Holanda em 1567. Escreveu, no entanto, as suas obras astronómicas principalmente em latim. Além das suas obras científicas, Nunes foi também um poeta de alguma notoriedade.

LIBRO
DE ALGEBRA
EN ARITHMETICA
Y GEOMETRIA

Compuesto por el Doctor Pedro Nu-
ñez, Cosmographo Mayor del Rey
de Portugal, y Cathedratico Iubi-
lado en la Cathedra de Mathe-
maticas en la Vniuersidad
de Coymbra.

EN ANVERS
En casa de los herederos d'Arnoldo
Birckman a la Gallina gorda.
1567.
CON PRIVILEGIO REAL.

Libro de Algebra

Influenciado por Pacioli.

Obra abstracta, sem colecção de problemas práticos e recreativos.

O produto de dois números é 10. A soma dos seus quadrados é 30.

I Em notação moderna: x, $\frac{10}{x}$

$$x^2 + \frac{100}{x^2} = 30$$

$$x^4 + 100 = 30x^2$$

à Al-Khwarizmi: $x^2 = 15 \pm \sqrt{125}$, $x = \sqrt{15 \pm \sqrt{125}}$

II Sejam os quadrados $15 - x$ e $15 + x$

então $\sqrt{15-x}\sqrt{15+x} = 10$

donde $x = \sqrt{125}$ //.

III usando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

tem-se $(a+b)^2 = 30 + 2 \times 10$

$$a+b = \sqrt{50}$$

As soluções serão $\dfrac{\sqrt{50}}{2} \pm x$

$$\left(\frac{\sqrt{50}}{2} - x\right)\left(\frac{\sqrt{50}}{2} + x\right) = 10$$

$$x = \sqrt{2.5}$$

logo as soluções são $\sqrt{12.5} \pm \sqrt{2.5}$

que PN mostra que são as mesmas.

Biografia

Gerolamo Cardano (1501-1576)

Cardano teve uma formação de médico mas foi-lhe negada a admissão ao Colégio Milanês de Médicos devido ao seu nascimento ilegítimo. Durante muitos anos praticou medicina numa pequena cidade próxima de Pádua, voltando a Milão em 1533 onde tratou ocasionalmente doentes particulares leccionando também matemática e escrevendo um livro sobre aritmética. Finalmente, conseguiu que Colégio de Médicos alterasse a sua posição. Cardano, em breve, tornou-se o médico mais proeminente de Milão e muito solicitado em toda a Europa. O seu doente mais importante foi provavelmente John Hamilton, o Arcebispo da Escócia que, em 1551, pediu a assistência de Cardano para o ajudar a vencer ataques de asma cada vez mais sérios. Cardano, depois de gastar mas de um mês observando os sintomas e hábitos do arcebispo, diagnosticou uma grande alergia às penas da cama em que dormia. Assim, Cardano recomendou que os lençóis e o travesseiro fossem de linho. A saúde do arcebispo melhorou rapidamente e ficou extremamente grato a Cardano para o resto da vida, oferecendo-lhe dinheiro e outro auxílio quando Cardano necessitava. Cardano não teve tanto êxito quando tentou fazer um horóscopo para o jovem rei Eduardo VI no seu regresso à Escócia através da Inglaterra. Previu uma vida longa mas, infelizmente, o rei morreu passado pouco tempo com 16 anos de idade. A própria vida de Cardano esteve recheada de tragédias, incluindo a morte de sua mulher em 1546, e a execução do seu filho pelo assassinato da sua mulher, em 1560. O golpe final veio em 1570 quando foi presente à Inquisição acusado de heresia. Afortunadamente, a sentença foi bastante suave. Cardano gastou os seus últimos anos em Roma, onde escreveu a sua autobiografia *De Propria Vita*.

Fra Luca Pacioli, observou em 1494 que não havia ainda uma solução algébrica geral para a cúbica, mas ao longo do século XV e princípio do século XVI muitos matemáticos estavam trabalhando no problema. Finalmente, entre 1500 e 1515, Scipione del Ferro (1465-1526), um professor da Universidade de Bolonha, descobriu um método algébrico para resolver a equação cúbica $x^3 + cx = d$.

Antes de morrer, del Ferro revelou a solução ao seu discípulo, Antonio Maria Fiore (primeira metade do século XVI), e ao seu sucessor em Bolonha, Annibale della Nave (1500-1558). Embora nenhum deles tivesse publicado a solução, começou a correr, em Itália, o boato entre os matemáticos de que este velho problema tinha sido resolvido ou que o seria em breve. Um outro matemático, Niccolò Tartaglia de Brescia (1499-1557), de facto, gabava-se de que ele também tinha descoberto a solução de um forma da cúbica, $x^3 + bx^2 = d$. Em 1535, Fiore desafiou Tartaglia para um encontro público, esperando vencer apoiado no seu conhecimento do caso mais antigo.

Mas Tartaglia, que era melhor matemático, dedicou-se a estudar arduamente este caso e, como ele mais tarde escreveu, na noite de 12 de Fevereiro de 1535, descobriu a solução. Como Fiore foi incapaz de resolver muitas das questões de Tartaglia que cobriam outras áreas da matemática, Tartaglia foi declarado vencedor, sendo o prémio, neste caso, de 30 banquetes oferecidos pelo derrotado ao vencedor e seus amigos. (Tartaglia, talvez prudentemente, declinou o prémio aceitando apenas a honra da vitória).

Cardano insiste com Tartaglia e este ensina-lhe o seu método, com a promessa de Cardano de não ao publicar...

Quando o cubo junto com as coisas
Se iguala a algum número:
Descobre outros dois que difiram do conhecido.
E faz como é usual,
Que o seu produto seja sempre igual
Ao cubo da terça parte das coisas;
Então a diferença
Dos seus lados cúbicos, bem subtraída,
Valerá a tua coisa principal.[19]

1535

HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neque solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmetices thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Capa da *Ars Magna*
de Gerolamo Cardano
(*Fonte:* Simthsonian
Institution Libraries,
Foto N.º 76-15322).

Na obra citada Cardano obtém, para a equação

$$x^3 = px + q$$

onde p, q são números positivos, a solução dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}\,.$$

Ars Magna contém também a resolução da equação de grau 4.

Bombelli (1526+47=1573), em *Algebra* (1572), considerou a equação $x^3 = 15x + 4$. Aplicando-lhe (1) obteve

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}\,,$$

expressão estranha, tanto mais que ele conhecia as raizes todas:

$$4\,, \quad -2 + \sqrt{3}\,, \quad -2 - \sqrt{3}\,.$$

Nascem os complexos: $\mathbb{C} = \{a + bi \,:\, a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$

Biografia

Rafael Bombelli (1526-1572)

Bombelli foi educado como engenheiro e passou muito da sua vida adulta trabalhando em projectos de engenharia ao serviço do seu patrono, um nobre romano que foi um favorito do Papa Paulo III. O maior projecto em que esteve envolvido foi a recuperação dos pântanos no Val di Chiana em terra arável. Hoje, esse vale, que se alarga para o sudeste cerca de 75 quilómetros entre o Arno e o Tiber, é ainda um dos mais férteis na Itália central. Bombelli, mais tarde, serviu como consultor num projecto planeado para secagem dos Pântanos Pontinos, perto de Roma. Durante uma paragem durante o trabalho de reuperação, devido a guerra na região, Bombelli pode trabalhar no seu tratado de álgebra na vila do seu patrono, em Roma, durante algum tempo entre 1557-1560. Outras obrigações, contudo, atrasaram a sua impressão e não apareceu senão pouco tempo antes da sua morte, em 1572.

Biografia

Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat nasceu numa família moderadamente rica em Beaumont-de-Lomagne no sul de França, onde o seu pai era um comerciante de couros e um oficial local menor. Recebeu a sua educação preparatória na Universidade de Toulouse e obteve um diploma de advogado de lei civil em 1631 em Orleães. Regressou então a Toulouse, onde passou o resto da sua vida nas cercanias desta cidade praticando advocacia. Foi membro de vários corpos oficiais em Toulouse, incluindo as câmaras do Parlamento, um corpo encarregue de funções administrativas e legais. Embora Fermat tenha servido como jurista por muitos anos, é evidente que nunca foi um advogado brilhante, provavelmente porque gastava demasiado tempo com o seu primeiro amor, a matemática. Devido ao seu estado de saúde e à pressão do trabalho legal, contudo, nunca viajou para longe de sua casa. Assim, todo o seu trabalho matemático foi comunicado a outros por meio da sua extensa correspondência.

Fermat sempre considerou a matemática como um passatempo, um refúgio das disputas contínuas com as quais tinha que lidar como jurista. Recusou-se por isso a publicar qualquer uma das suas descobertas, porque fazê-lo obrigá-lo-ia a completar todos os pormenores e a sujeitar-se a possíveis controvérsias noutra arena. Em muitos casos não se sabe que provas, se algumas, Fermat construiu e também nem sempre há uma explicação sistemática de determinadas partes do seu trabalho. Fermat atormentava frequentemente os seus correspondentes com pistas sobre os seus novos métodos para resolver determinados problemas. Por vezes fornecia esboços desses métodos, mas as suas promessas de preencher os vazios "quando o ócio o permitir" permaneciam frequentemente por concretizar. Não obstante, um estudo dos seus manuscritos, publicados pelo seu filho 14 anos após a sua morte, bem como as suas muitas cartas, permitem aos académicos da actualidade ter uma imagem razoavelmente completa dos métodos de Fermat.[2]

Biografia

René Descartes (1596-1650)

Descartes (Fig. 11.5) nasceu em La Haye (hoje La Haye-Descartes) perto de Tours numa família da velha nobreza francesa. Como passou a sua juventude enfermiço, foi-lhe permitido acordar tarde durante os seus anos de escola. Desenvolveu assim o hábito de passar as suas manhãs em meditação. Os seus pensamentos levaram-no à conclusão de que pouco do que tinha aprendido na escola era certo. De facto, ficou tão cheio de dúvidas que decidiu abandonar os estudos. Como relatou no seu *Discurso do Método*, "Utilizei o resto da minha juventude para viajar, para ver cortes e exércitos, para frequentar pessoas de diferentes disposições e condições, para armazenar várias experiências, para dar provas de mim próprio nos encontros com os quais a fortuna me confrontou, e em todo o lado para reflectir sobre as coisas que ocorriam, para poder tirar algum proveito delas"[7]. Assim, participou em várias campanhas durante a Guerra dos Trinta Anos antes de se estabelecer na Holanda em 1628 para começar o seu objectivo de toda a vida de criar uma nova filosofia adequada a descobrir a verdade sobre o mundo. Resolveu aceitar como verdadeiras apenas ideias tão claras e distintas que não podiam levantar qualquer dúvida e depois seguir o modelo do raciocínio matemático através de passos simples e lógicos para discernir novas verdades. Depressa escreveu um grande tratado sobre física, mas no último minuto, tendo ouvido falar da condenação de Galileu pela Igreja, decidiu não o publicar, por medo de que um pequeno erro doutrinal levasse ao banimento de toda a sua filosofia. Rapidamente ficou persuadido, contudo, de que devia partilhar as suas novas ideias com o mundo. Em 1637 publicou o *Discurso do Método*, juntamente com três ensaios sobre óptica, meteorologia e geometria concebidos para demonstrar a eficácia do "método".

A reputação internacional de Descartes foi aumentada com a publicação de várias outras obras filosóficas e em 1649 foi convidado pela Rainha Cristina da Suécia para ir a Estocolmo ensiná-la. Ele aceitou com relutância. Infelizmente, a sua saúde não conseguiu aguentar a severidade do clima nórdico, especialmente uma vez que Cristina lhe pedia, contrariamente aos seus hábitos de longa data, para se levantar muito cedo. Descartes contraiu rapidamente uma doença de pulmões que o levou à morte em 1650.

Métodos algébricos para resolver equações cúbicas e quárticas foram descobertos em Itália no século dezasseis e melhoradas um pouco por Viète perto da viragem do século dezassete. Mas Cardano ficou embaraçado pela falta de uma notação conveniente e Viète sempre se restringiu a soluções positivas. Assim, mesmo que o primeiro tenha dado vários exemplos de relações entre as raízes de uma equação cúbica simples e entre raízes de equações relacionadas e o último tenha conseguido exprimir algebricamente a relação entre os coeficientes e as soluções de equações de grau até cinco, desde que todos os valores fossem positivos, a teoria geral estava ainda incompleta.

Biografia

François Viète (1540-1603)

Viète nasceu em Fontenay-le-Comte, uma aldeia na França ocidental, perto da baía de Biscaia. Depois de receber o grau em leis na Universidade de Poitiers, regressou à sua aldeia nativa iniciando a prática da profissão. A sua reputação legal cresceu devido à sua associação com uma proeminente família local, e foi chamado a Paris pelo Rei Henrique III como conselheiro encarregado de negociações confidenciais e, finalmente, em 1580, conseguiu um lugar no conselho privado. Uma das suas obrigações para Henrique, depois que este mudou a sua corte para Tours, em 1589, foi de actuar como criptoanalista de mensagens interceptadas entre inimigos do rei. Teve tanto êxito nesta tarefa que foi denunciado por alguns que pensaram que a decifração poderia ter sido apenas realizada por feitiçaria. Como continuou a trabalhar para Henrique III e o seu sucessor Henrique IV, o trabalho matemático de Viète só pode ter sido passatempo.

Albert Girard (1595-1632)

TEOREMA *Qualquer equação algébrica... admite tantas soluções como a denominação da maior quantidade indica. E a primeira facção das soluções é igual ao [coeficiente da segunda maior] quantidade, a segunda facção delas é igual ao [coeficiente da terceira maior] quantidade, o terceiro [quarta], e por aí adiante, de forma a que a última facção seja igual ao [termo constante] — tudo isto de acordo com os sinais que podem ser notados na ordem alternada.*

O que Girard queria dizer com a última frase acerca dos sinais é que primeiro é preciso arranjar a equação para que os graus se alternem em cada lado da equação. Assim, $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x - 24$ devia ser reescrito como $x^4 - 7x^2 - 24 = 4x^3 - 34x$. Sendo as raízes desta equação 1, 2, –3, e 4, a primeira *facção* é igual a 4, o coeficiente de x^3; a segunda a –7, o coeficiente de x^2; a terceira a –34, o coeficiente de x; e a quarta a –24, o termo constante. Similarmente, a equação $x^3 = 167x - 26$ pode ser reescrita como $x^3 - 167x = 0x^2 - 26$. Como –13 é uma solução, o seu resultado implica que o produto das duas raízes remanescentes seja 2, enquanto a sua soma é 13. Encontrar estes valores requer simplesmente resolver uma equação quadrática. As respostas são $6\,1/2 + \sqrt{40\,1/4}$ e $6\,1/2 - \sqrt{40\,1/4}$.

Descartes mostra explicitamente como as equações são construídas a partir das suas soluções. Assim, se $x = 2$ ou $x - 2 = 0$ e também se $x = 3$ ou $x - 3 = 0$, Descartes nota que o produto das duas equações é $x^2 - 5x + 6 = 0$, uma equação de dimensão 2 com as duas raízes 2 e 3. Mais uma vez, se esta última equação for multiplicada por $x - 4 = 0$, resulta uma equação de dimensão 3, $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, com as três raízes 2, 3, e 4.

Euler começa por discutir a álgebra das quantidades positivas e negativas. A sua discussão sobre a multiplicação é, de certa forma, menos formal do que a de Maclaurin: “Comecemos por multiplicar $-a$ por $+3$. Como $-a$ pode ser considerada como uma dívida, é evidente que se tomarmos essa dívida três vezes, ela se torna três vezes maior, e consequentemente o produto requerido é $-3a$.” Euler observa depois a generalização óbvia de que $-a$ vezes b será $-ba$ ou $-ab$ e passando de seguida para o caso do produto de dois números negativos. Aqui ele diz apenas que $-a$ vezes $-b$ não pode ser igual a $-a$ vezes b, ou $-ab$, e portanto tem de ser igual a $+ab$.

Como todos os números possíveis de compreensão, ou são superiores ou inferiores a 0 ou são o próprio 0, é evidente que não é possível posicionar a raiz quadrada de um número negativo entre os números possíveis, e por isso somos forçados a dizer que essa quantidade é impossível. Desta forma, somos conduzidos à ideia de números que pela sua natureza são impossíveis; e por isso eles são usualmente designados *quantidades imaginárias*, pois existem apenas na imaginação. Todas as expressões como $\sqrt{-1}, \sqrt{-2} \ldots$ são consequentemente impossíveis, ou números imaginários, pois representam raízes de números negativos;... Mas sem oferecer resistência estes números apresentam-se à mente; eles existem na nossa imaginação e temos noção deles; pois sabemos que $\sqrt{-4}$ representa um número o qual, multiplicado por si próprio, produz –4; também por esta razão, nada nos impede de fazer uso destes números imaginários, utilizando-os nos cálculos.

Um outro aspecto da álgebra considerado no século dezoito foi a resolução de equações polinomiais. Na realidade muitos matemáticos tentaram, sem sucesso, generalizar os métodos de Cardano e de Ferrari de resolução algébrica de equações polinomiais de grau superior ou igual a cinco. No seu trabalho de 1770, *Réflexions sur la théorie algébrique des équations* (Reflexões sobre a teoria algébrica da equações), Lagrange começou uma nova fase do seu trabalho ao empreender uma revisão detalhada destas soluções, para descobrir a razão pela qual os métodos para cúbicas e quadráticas funcionavam. Ele não conseguiu encontrar métodos análogos para equações de graus superiores, mas conseguiu esboçar um novo conjunto de princípios para lidar com estas equações em cujo sucesso acreditava.

Biografia
Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss (Fig. 15.1) nasceu no seio de uma família que, como muitas outras nessa época, fora viver para a cidade havia pouco tempo, na esperança de escapar à pobreza a que estavam condenados os trabalhadores rurais. Uma das vantagens de viver em Brunswick era que o jovem Carl podia ir à escola. Há muitas histórias sobre o eclodir do génio precoce de Gauss, uma das quais se desenrola na aula de matemática, quando ele tinha 9 anos. No início do ano, o professor, J. G. Büttner, para manter os seus 100 alunos ocupados, pediu-lhes que calculassem a soma dos primeiros 100 números inteiros. Mal terminara de expor o que pretendia, Gauss escreveu imediatamente o número 5050 na sua lousa e colocou-a na secretária do mestre. A criança notara que a soma pretendida não é mais do que 50 vezes a soma 101 dos vários pares 1 e 100, 2 e 99, 3 e 98,... e efectuara mentalmente a multiplicação necessária. Impressionado com as faculdades do seu jovem aluno, Büttner providenciou-lhe livros especiais, bem como aulas particulares com o seu assistente Martin Bartels (1769-1836), que mais tarde se tornaria professor de matemática na Rússia, certificando-se também de que Gauss era admitido numa escola secundária, onde seguiu o currículo clássico.

Em 1791, o Duque de Brunswick atribuiu a Gauss um subsídio, o que lhe permitiu frequentar primeiro o *Collegium Carolinium*, uma academia vocacionada para as ciências, recém-criada pelo governo de Burnswick para formar burocratas e oficiais, matricular-se depois na Universidade de Göttingen, na vizinha Hanover, que tinha já uma boa reputação no ensino das ciências e, finalmente, prosseguir as suas investigações de novo em Brunswick, ao mesmo tempo que fazia um doutoramento na Universidade de Helmstedt. Em 1801, Gauss não só publicou o seu trabalho sobre teoria de números, com uma dedicatória ao seu patrono, o duque, mas também desenvolveu simultaneamente um novo método para calcular órbitas celestes, o qual permitiu a descoberta de vários asteróides. O patrocínio do duque durou até este ser morto numa batalha contra a França, em 1806, e o ducado ser ocupado pelos franceses. Felizmente para a ciência, o general francês tinha recebido ordens explícitas no sentido de prover à subsistência de Gauss. Assim, este pôde permanecer em Brunswick até aceitar um lugar em Göttingen, no ano seguinte, como professor de astronomia e director do observatório. Gauss permaneceria em Göttingen até ao fim da sua vida, dedicando-se à matemática, pura e aplicada, bem como à astronomia e à geodesia.

Gauss nunca apreciou particularmente a vida de professor, já que a maior parte dos alunos se revelavam pouco interessados na matemática e mal preparados nesta disciplina, mas estava sempre disposto a trabalhar individualmente com aqueles que se mostravam mais activos e interessados. Em comparação com o seu antecessor Euler e o seu contemporâneo Cauchy, Gauss acabou por publicar pouco: as suas obras completas ocupam apenas (!) 12 volumes. Porém, os seus artigos matemáticos, abrangendo diversas áreas, são de uma tal profundidade, que a sua influência nos respectivos desenvolvimentos ainda hoje se faz sentir.[5]

TFA

TFA: Uma equação polinomial de grau n tem n raízes (contando multiplicidades) complexas.

Biografia

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Abel (Fig. 15.3), nasceu perto de Stavanger na Noruega, mas infelizmente a sua vida foi curta. Os seus dotes inatos para a matemática foram descobertos pelo seu professor da Escola da Catedral em Oslo, que o incentivou a ler vários tratados de matemática avançada, disponíveis na universidade. Tendo-se interessado pelo problema da equação de quinto grau, Abel julgou que conseguiria efectivamente resolvê-la, utilizando radicais. Uma vez que ninguém na Noruega conseguia compreender os seus argumentos, enviou o seu artigo para a Dinamarca. Antes da publicação, foi-lhe pedido que apresentasse alguns exemplos numéricos e foi ao procurar esses exemplos que Abel se apercebeu de que o seu método estava incorrecto. Embora tenha então passado à investigação noutras áreas, em particular à teoria das funções elípticas, continuaria a trabalhar sobre a questão da resolubilidade durante os anos seguintes, enquanto estudava na universidade de Oslo, até que conseguiu provar a sua impossibilidade de um modo que o satisfez. Publicou o resultado num pequeno panfleto em edição de autor, em 1824, mas a brevidade do opúsculo, provocada pela sua tentativa de poupar dinheiro, impediu a maior parte dos matemáticos de o compreenderem. Assim, dois anos mais tarde, durante as suas viagens pela Europa para visitar vários matemáticos e para se preparar melhor para uma carreira científica, escreveu uma versão alargada que seria publicada no primeiro volume da nova revista alemã de matemática, o *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Jornal de Matemática Pura e Aplicada), editado por August Crelle, que depressa se tornaria um dos seus melhores amigos. Quando Abel regressou à Noruega, em 1827, verificou que não havia qualquer lugar disponível para si, já que a única cadeira de matemática que havia na universidade tinha sido recentemente atribuída ao seu antigo professor do liceu. Abel foi tentando subsistir a dar explicações e a fazer substituições na universidade, enquanto preparava um grande número de artigos matemáticos. Porém, em Janeiro de 1829, sofreu um ataque de tuberculose, do qual já não conseguiu recuperar. Morreu em Abril, dois dias antes de Crelle lhe escrever, informando-o de que lhe tinha sido garantida uma nomeação para Berlim.[15]

A primeira proposta de demonstração que a equação geral de quinto grau não podia ser resolvida utilizando radicais surgiu num tratado publicado em privado pelo italiano Paolo Ruffini (1785-1822), em 1798, pretensa prova essa que nenhum contemporâneo conseguiu compreender. Porém, em meados da década de 1820, Niels Henrik Abel (1802-1829), apresentou finalmente uma demonstração integral da impossibilidade de uma tal solução.

Biografia
Evariste Galois (1811-1832)

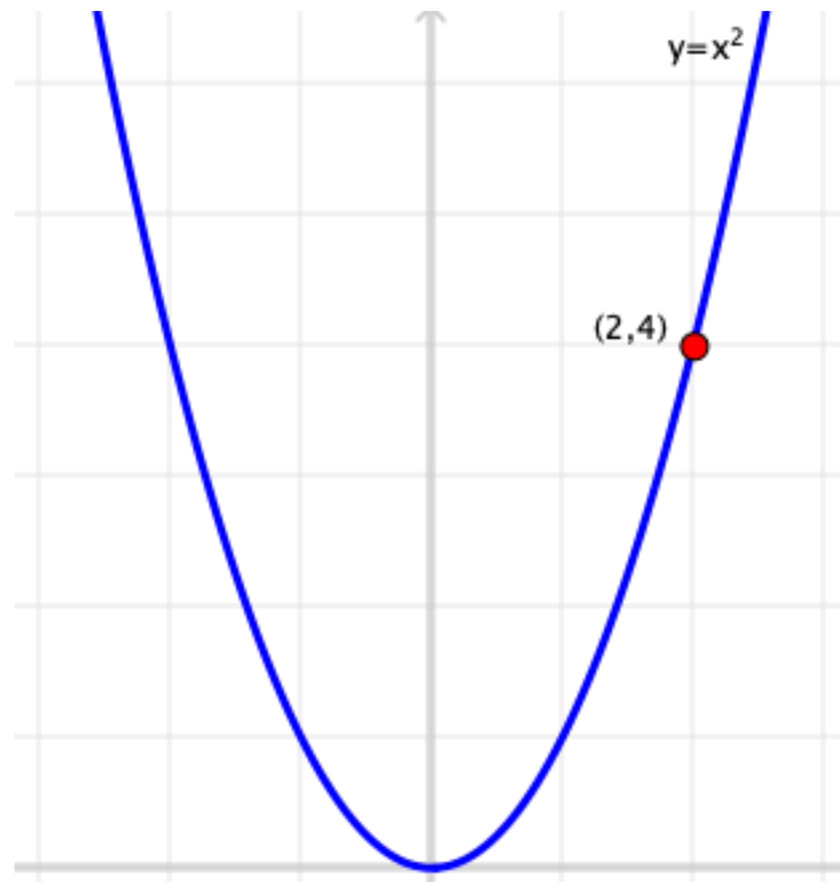
A vida tragicamente breve de Galois foi objecto de uma biografia ficcionada que incluía especulação de que sua morte num duelo teria sido arquitectada por agentes do governo, devido às suas opiniões políticas radicais. Os factos conhecidos, todavia, não corroboram esta pretensão.[21] Galois (Fig. 15.4) nasceu em Bourg-la-Reine, uma cidade a pouca distância de Paris, onde o pai foi eleito presidente da câmara em 1815. Teve algum sucesso na escola preparatória Louis-le-Grand, sobretudo depois de descobrir o seu talento para a matemática. Embora tenha publicado um pequeno artigo antes dos 18 anos e tenha, simultaneamente, apresentado à Academia Francesa uma dissertação sobre a resolubilidade das equações de grau primo, reprovou por duas vezes nos exames de entrada para a École Polytechnique, a primeira vez talvez porque não tinha ainda dominado as bases necessárias e a segunda muito provavelmente porque o pai se tinha suicidado alguns dias antes, devido a um escândalo maquinado por um padre reaccionário. Galois viu-se forçado a ingressar na École Normale, cujo director fechava os alunos no edifício, para que eles não pudessem participar nas actividades políticas que iriam conduzir à revolução de Julho de 1830. Em Dezembro desse ano, depois de Galois ter atacado o director numa carta, por este favorecer a «legalidade» em detrimento da «liberdade», foi expulso da escola e juntou-se à divisão fortemente republicana da Guarda Nacional, divisão essa que seria em breve dissolvida, por ser vista como uma ameaça para o trono ocupado pelo "burguês" Louis-Phillipe. Agora profundamente envolvido na actividade política, Galois prosseguiu todavia a sua investigação matemática, apresentando à Academia uma versão revista da sua dissertação sobre a resolubilidade das equações, em Janeiro de 1831. Cerca de seis meses mais tarde, o árbitro, não conseguindo compreender as demonstrações propostas, rejeitou o manuscrito e sugeriu a Galois que completasse e clarificasse a sua teoria, voltando depois a apresentá-la.

Entretanto, porém, Galois tinha sido preso duas vezes, a primeira por ameaçar a vida do rei e a segunda por usar o uniforme da divisão da Guarda Nacional, entretanto dissolvida. Pela segunda ofensa, foi condenado a seis meses de prisão, durante os quais o seu ódio à Academia, por esta ter sido incapaz de apreciar o seu trabalho, foi crescendo a tal ponto que ele acabaria por fustigar os «cientistas oficiais» de França numa diatribe rancorosa, destinada a servir de prefácio à publicação privada do seu trabalho. Antes porém que a publicação pudesse ocorrer, Galois envolveu-se com uma «coquete infame e os seus dois joguetes»[22] e embora as circunstâncias exactas nunca tenham sido esclarecidas, viu-se obrigado a (ou terá escolhido) entrar num duelo no qual seria morto, cinco meses antes de completar vinte e um anos de idade. Na noite anterior ao duelo, na expectativa de morrer, escreveu uma carta ao seu amigo Auguste Chevalier, desenvolvendo e anotando alguns dos seus manuscritos anteriores: «Frequentemente me atrevi na vida a sustentar proposições sobre as quais não estava seguro. Porém, todas aquelas que aqui escrevi estão claras na minha cabeça há já mais de um ano e não seria do meu interesse [...] anunciar teoremas dos quais não possuísse a prova completa. Implorei publicamente a Jacobi ou a Gauss que dêem a sua opinião não sobre a verdade, mas sobre a importância destes teoremas. Espero que, depois disso, homens haverá que entenderão útil decifrar toda esta confusão.»[23]

Proposição I *Seja uma equação da qual a, b, c, ... são as m raízes.* [Galois assume tacitamente que esta equação é irredutível e que todas as suas raízes são distintas.] *Existe sempre um grupo de permutações das letras a, b, c, ... que tem a seguinte propriedade: 1) qualquer função das raízes, invariante nas substituições do grupo, é racionalmente conhecida; 2) reciprocamente, qualquer função das raízes que seja racionalmente conhecida é invariante nas substituições.*

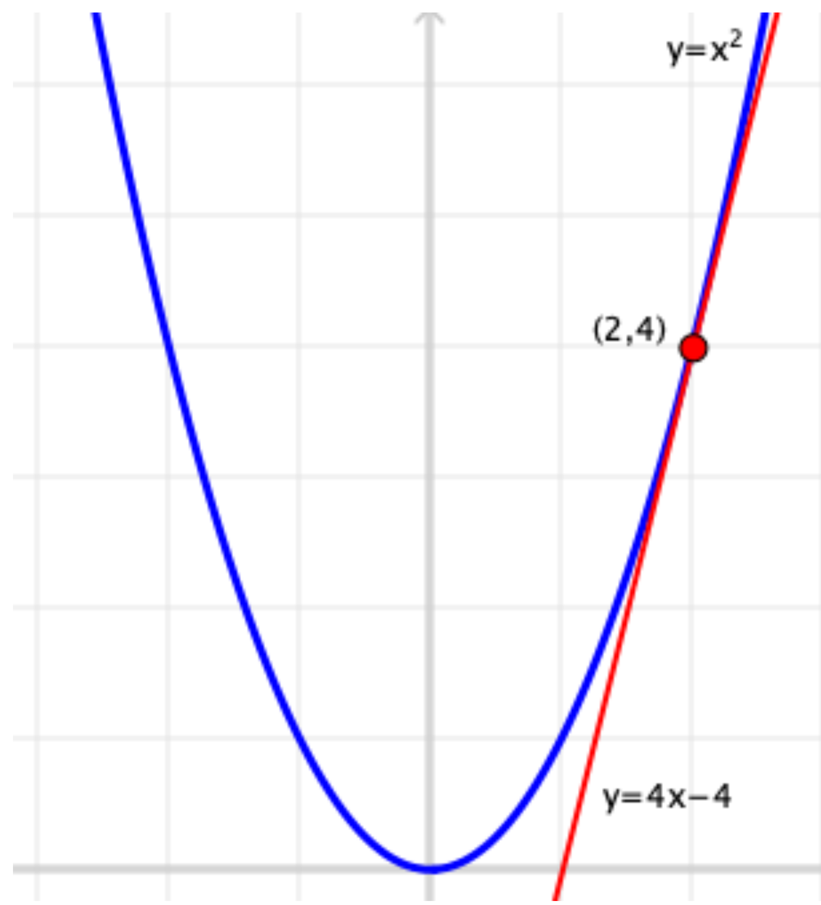
Estruturas algébricas: grupos e corpos...

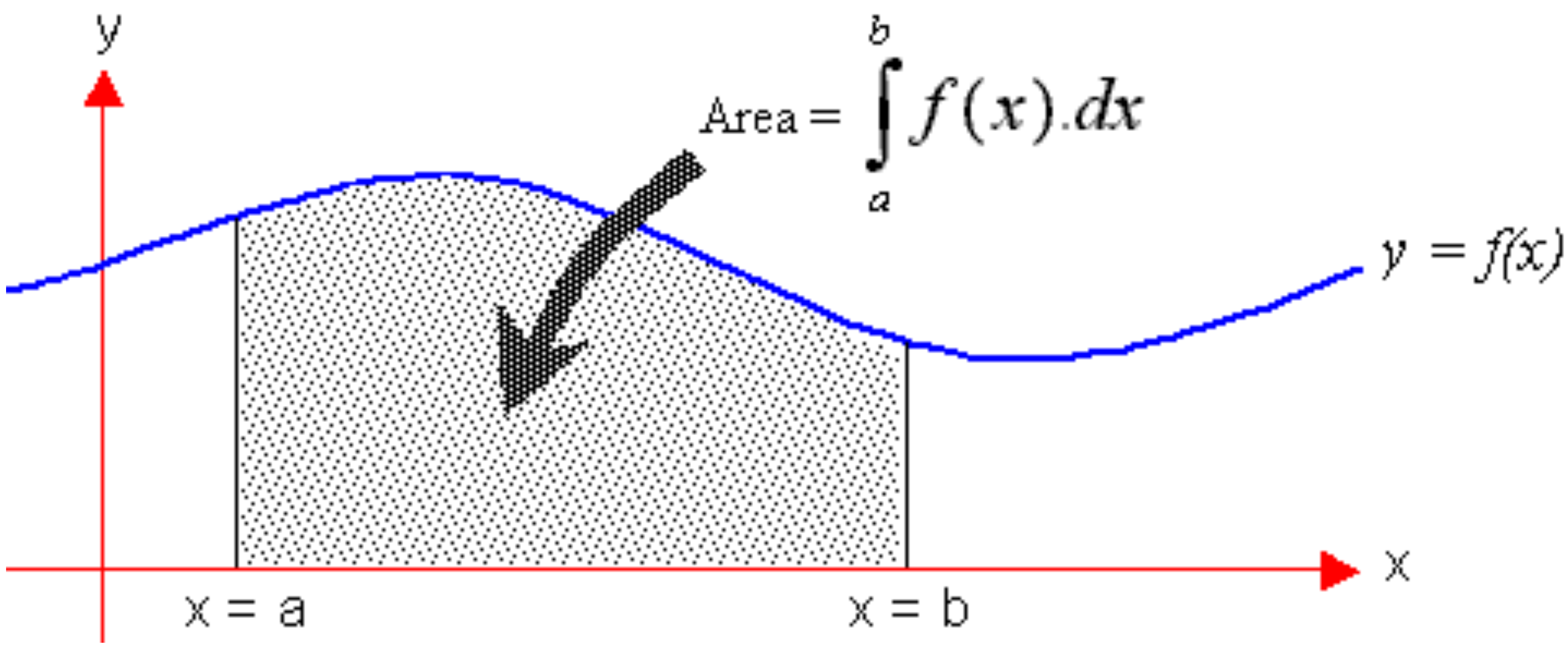
Cálculo infinitesimal



y=x2
(2,4)

$$f'(x) = 2x \qquad f'(2) = 4 \qquad y = 4x + b \qquad y = 4x - 4$$

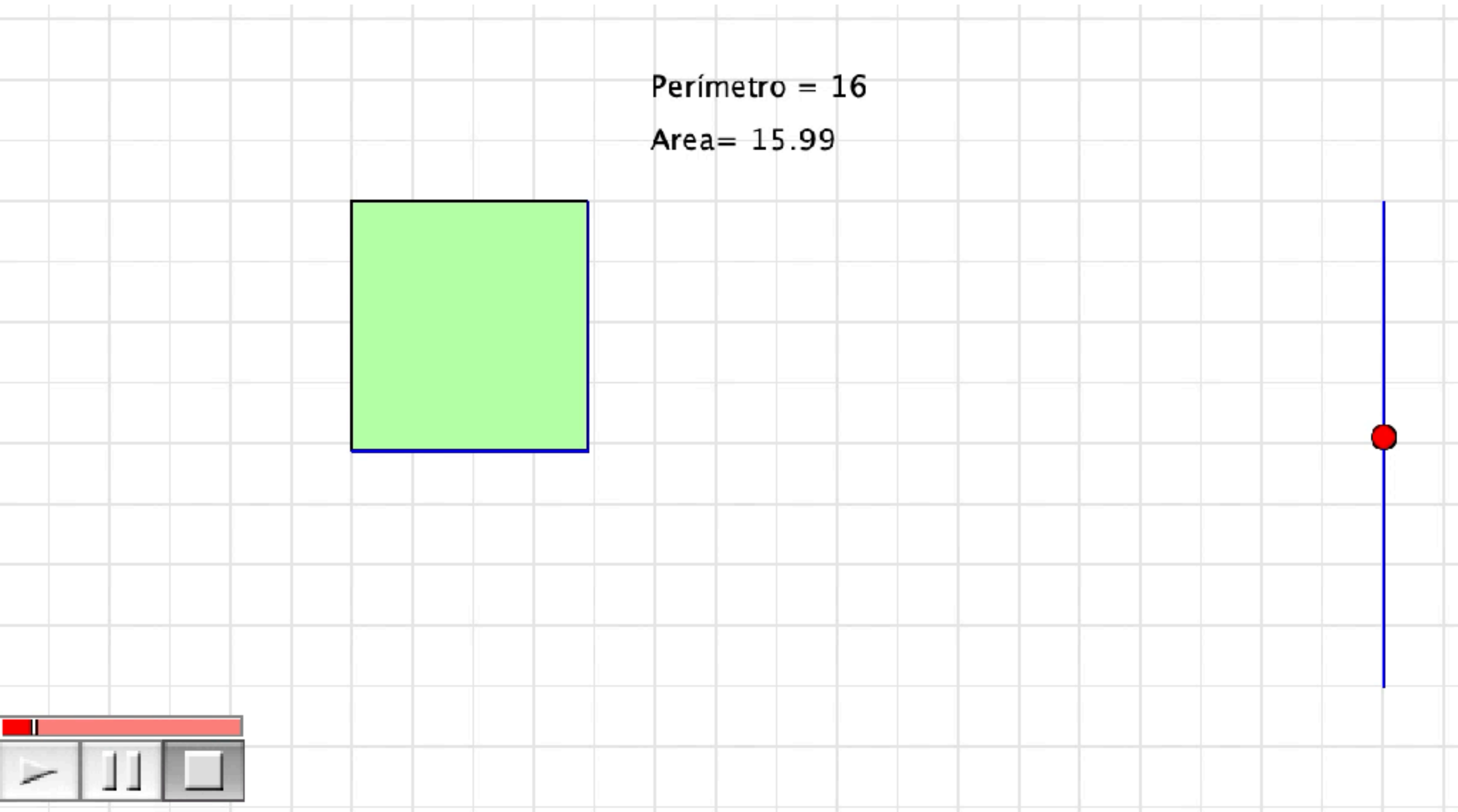


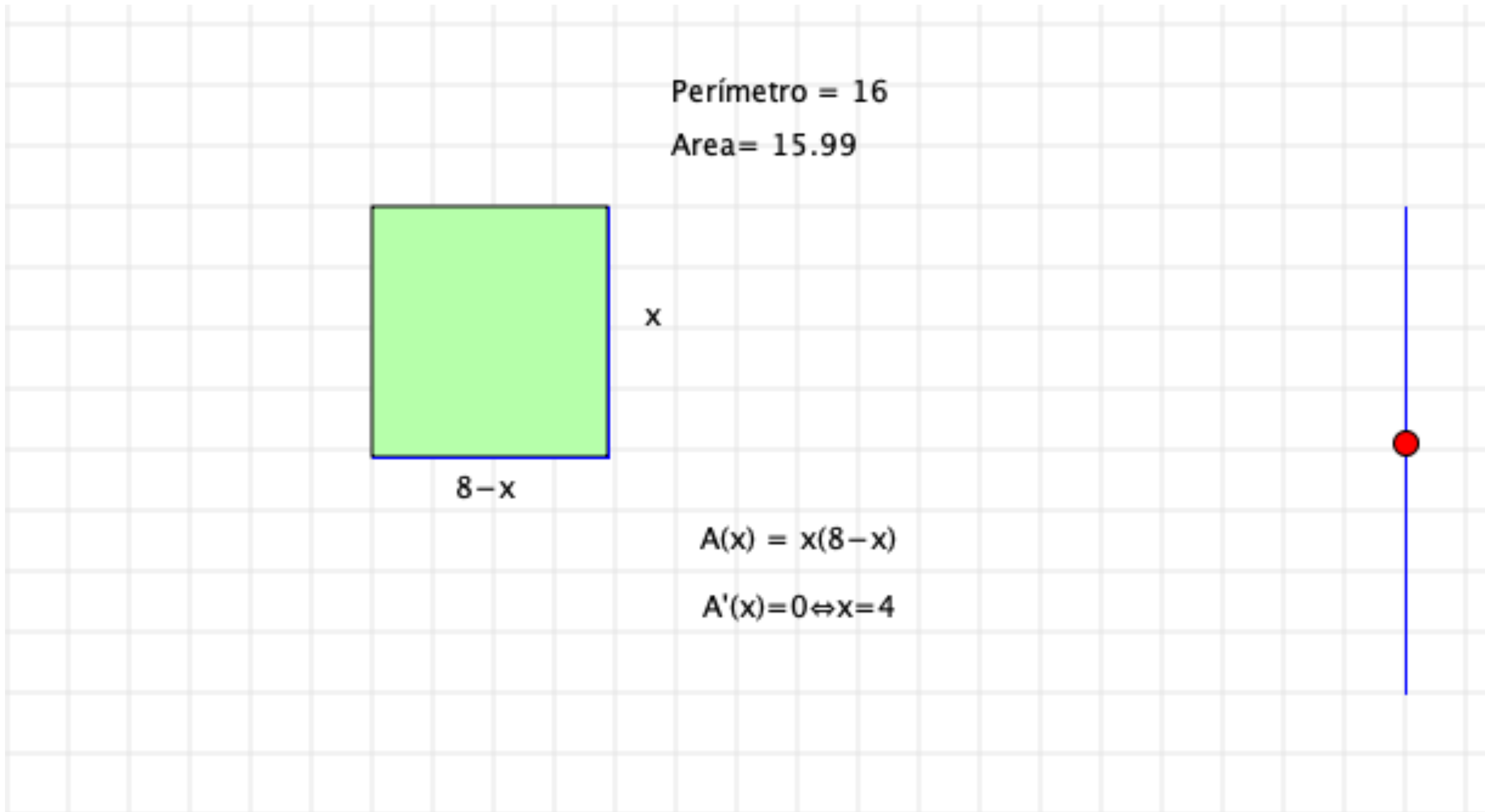


y
Area = $\int_a^b f(x).dx$
y = f(x)
x
x = a
x = b

Dar sentido a soma com infinitas parcelas

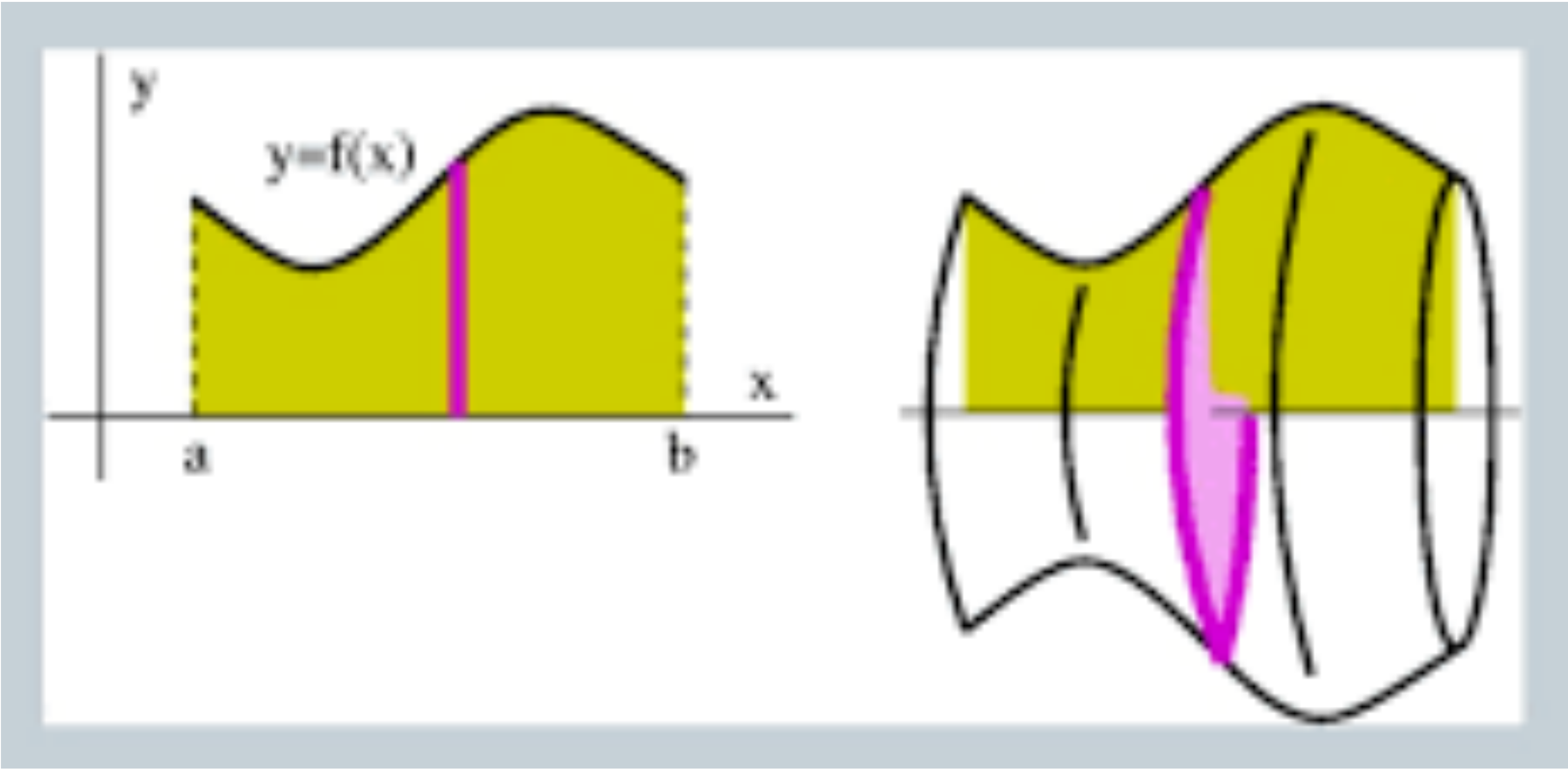
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$


Perímetro = 16
Area= 15.99



Perímetro = 16
Area= 15.99
x
8−x
A(x) = x(8−x)
A'(x)=0⇔x=4

Áreas e volumes



O que significa o velocímetro indicar 88 km/h?

O Cálculo Infinitesimal é hoje um conjunto de regras para resolver problemas, mais ou menos mecanicamente.

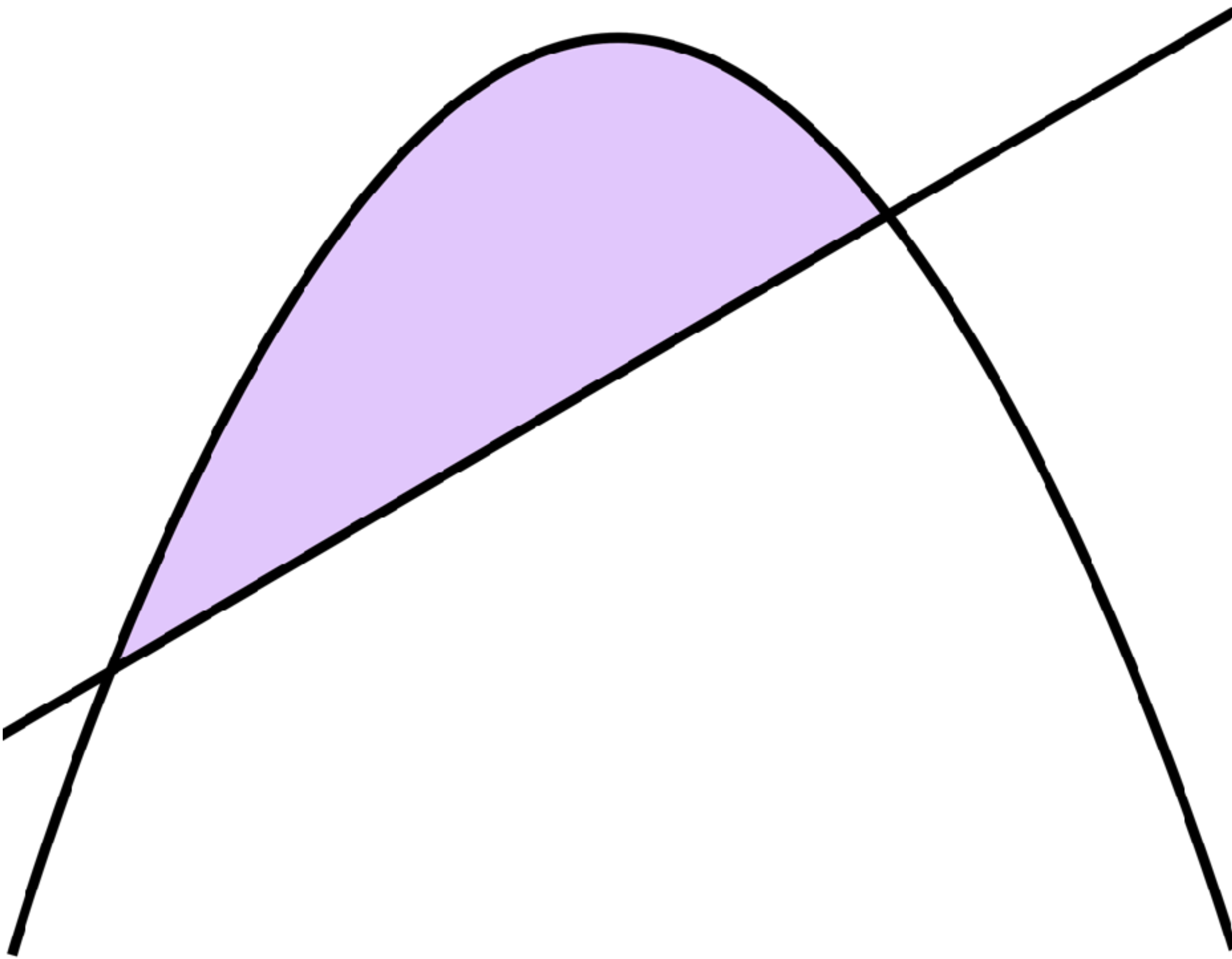
Biografia

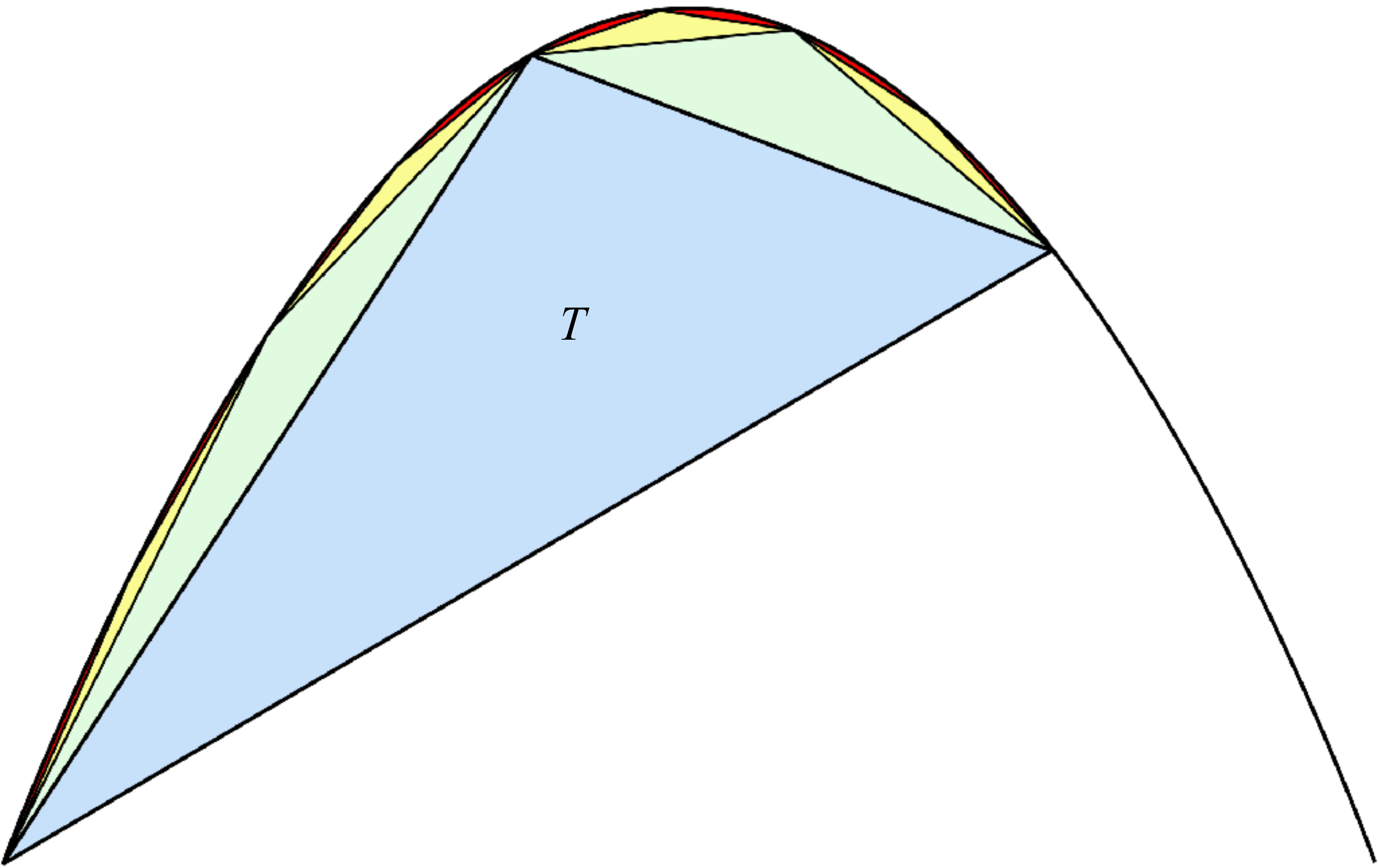
Arquimedes (287-212 a.C.)

Sobrevive mais informação biográfica de Arquimedes que de qualquer outro matemático grego. Muita é encontrada na biografia de Plutarco do general romano Marcelo, que sitiou Siracusa, a maior cidade da Sicília, depois de um cerco em 212 a.C. durante a Segunda Guerra Púnica. Também outros historiadores gregos e romanos discutem aspectos da vida de Arquimedes.

Arquimedes era filho do astrónomo Fídias e talvez familiar do Rei Hierão II de Siracusa, sob cuja governação de 270 a 216 a.C. a cidade se desenvolveu muitíssimo. É, também, provável que tenha vivido em Alexandria durante a juventude, pois lhe é creditada a invenção do parafuso de Arquimedes, uma máquina para elevar água usada para irrigação (Fig. 3.2). Além do mais, os prefácios de muitos dos seus livros são dirigidos a eruditos de Alexandria, incluindo um dos directores da Biblioteca, Eratóstenes. A maior parte da sua vida, no entanto, foi passada na sua terra natal, Siracusa, onde lhe era repetidamente solicitado que usasse os seus talentos matemáticos na resolução de vários problemas práticos para Hierão e seu sucessor. São recordadas muitas histórias a respeito da sua intensa dedicação ao trabalho. Plutarco escreveu que, em muitas ocasiões, a sua concentração na matemática "fê-lo esquecer a comida e desprezar a sua pessoa, a tal ponto que, quando era levado por violência absoluta a tomar banho ou a ter o seu corpo untado, costumava traçar figuras geométricas nas cinzas do fogo, e diagramas no óleo do corpo, encontrando-se num estado de verdadeira preocupação, no sentido mais verdadeiro, possesso do seu amor e prazer na ciência."[4] E foi esta dedicação que, finalmente, lhe custou a vida.

O seu génio como engenheiro militar manteve a armada romana, sob o comando de Marcelo, afastada meses durante o cerco de Siracusa. Finalmente, no entanto, provavelmente por traição, os romanos conseguiram entrar na cidade. Marcelo deu ordens explícitas para que Arquimedes fosse poupado, mas Plutarco relata que: "como o destino quis, estava em vias de resolver um problema com um diagrama e, tendo concentrado a sua mente e os seus olhos na sua investigação, nunca se apercebeu da incursão dos romanos nem da conquista da cidade. E quando um soldado de repente veio ter com e lhe ordenou que o acompanhasse até Marcelo, recusou-se a fazê-lo até que tivesse terminado o seu problema com uma demonstração; como consequência o soldado ficou tão enraivecido que pegou na espada e matou-o."[5]





T

A área dos verdes é um quarto da do azul, a área dos amarelos é um quarto da dos verdes, e assim sucessivamente.

$$\text{Area} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) T$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{1}{3}$$

$$\text{Area} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots\right) T$$

$$\frac{4}{3}T$$

Arquimedes mostrou que

$$A > \frac{4}{3}T \Rightarrow A > \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^k}\right)T$$

para qualquer k.

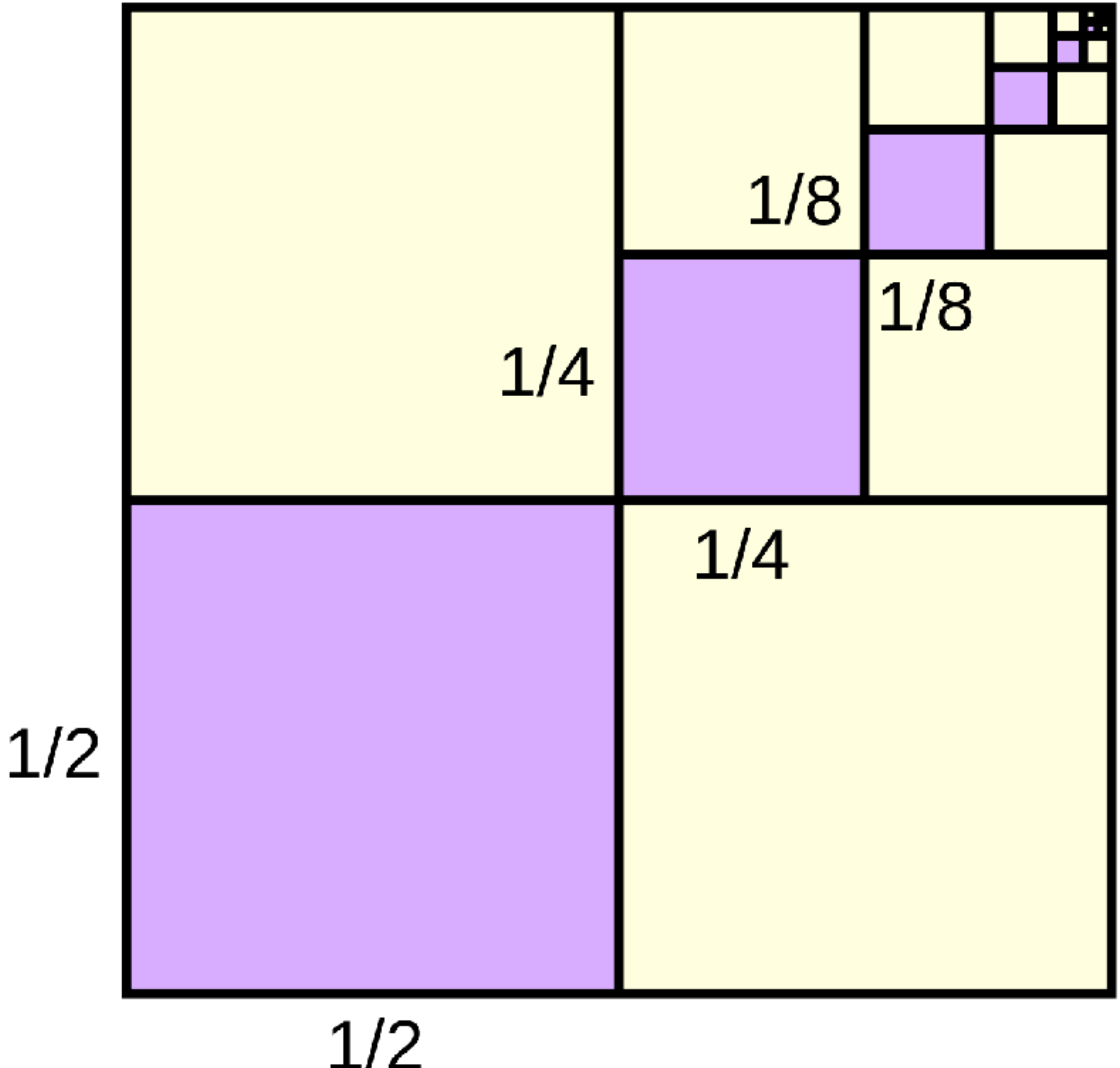
e que

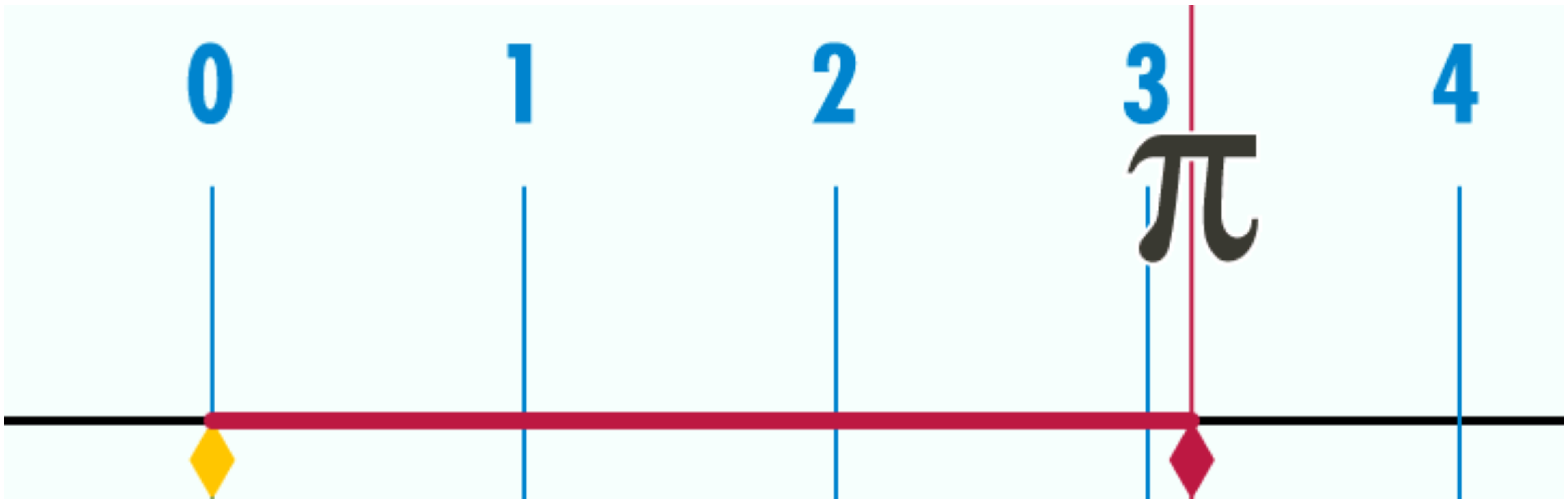
$$B < \frac{4}{3}T \Rightarrow B < (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^k})T < \frac{4}{3}T$$

para algum k

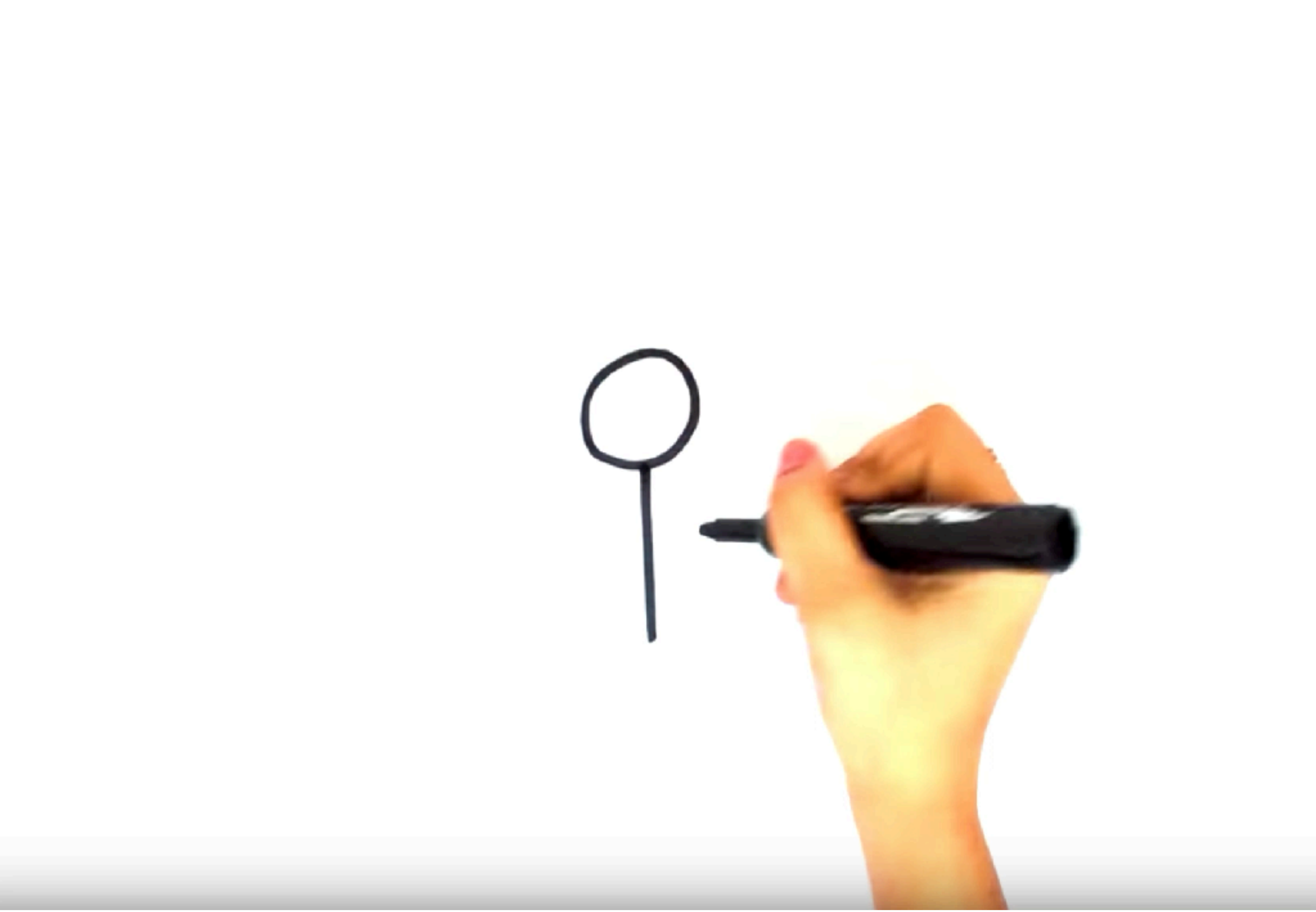
E assim, "sem infinito", Arquimedes conclui que a área do segmento de parábola é 4/3 da do primeiro triângulo inscrito.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$


1/8
1/8
1/4
1/4
1/2
1/2

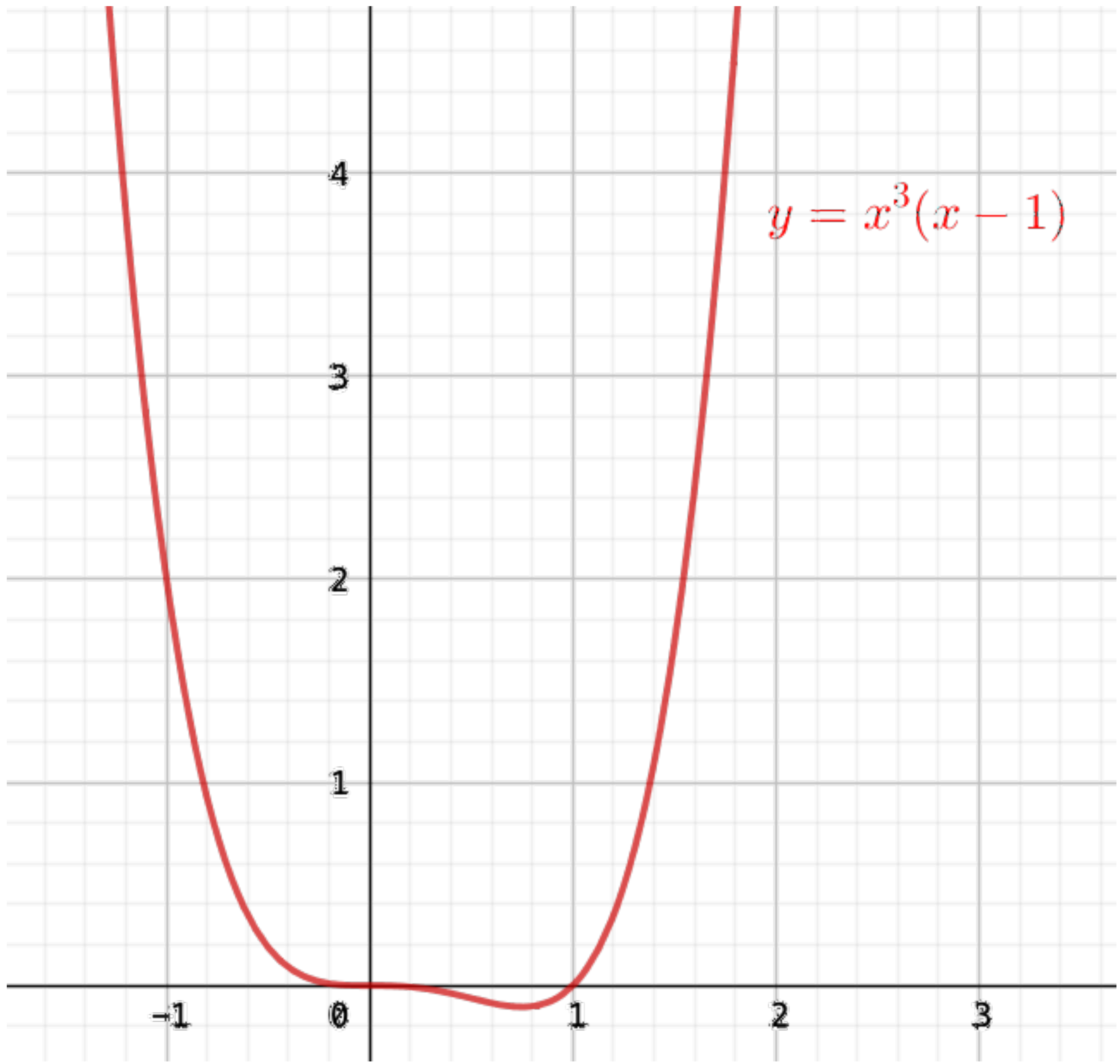


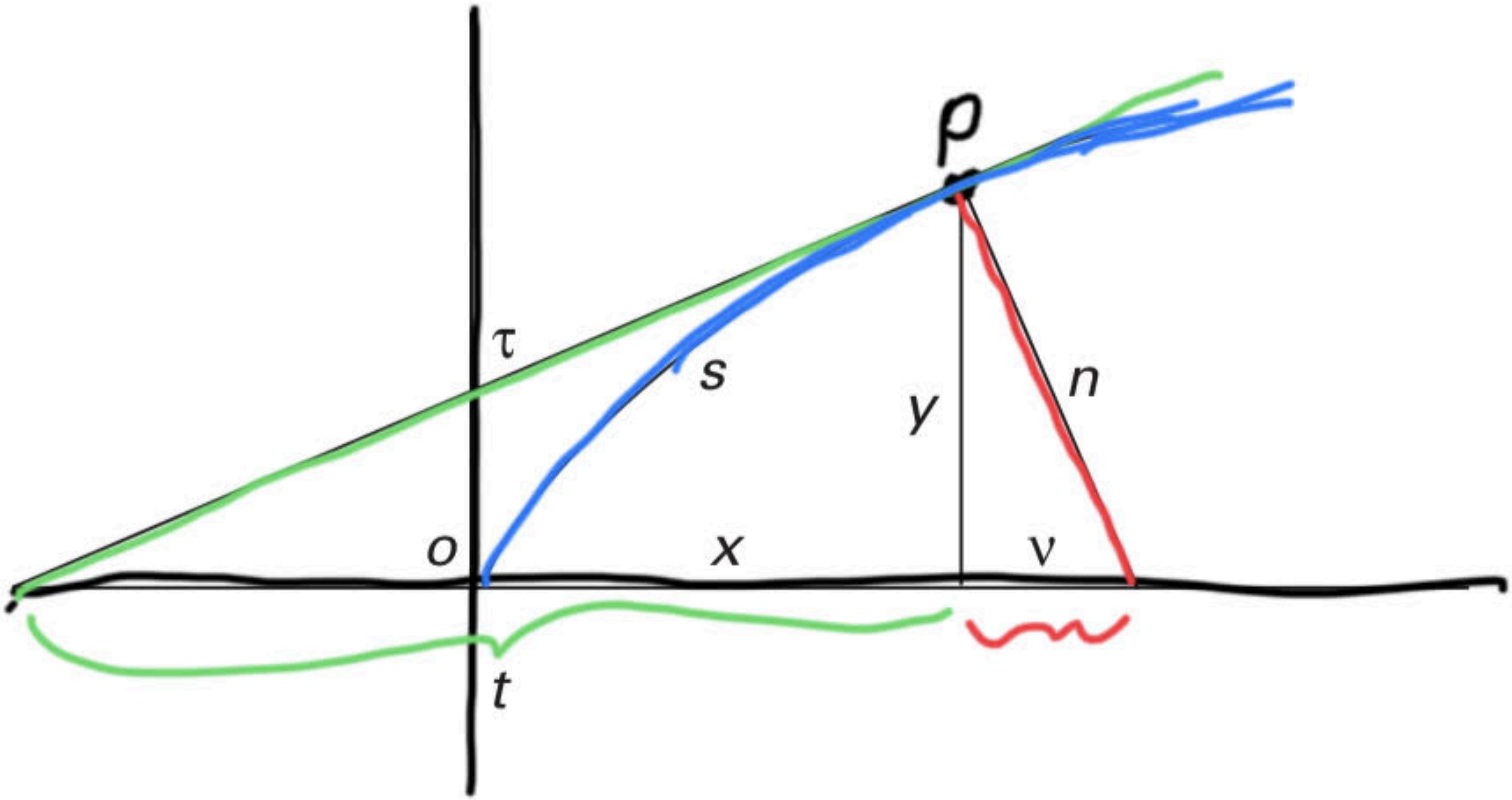
$$\pi = \frac{perimetro}{diametro}$$



Vi Hart

Os gregos trabalharam sem Geometria Analítica! (séc. xvii)





Quantidades ligadas
a uma curva: x é a abcissa,
y a ordenada,
s o comprimento de arco,
t a subtangente, τ a tangente,
n a normal, e ν a subnormal.

Biografia

Johannes Kepler (1571-1630)

Kepler nasceu em Weil-der-Stadt no sudoeste da Alemanha e estudou na Universidade de Tübingen, onde travou conhecimento com a teoria de Copérnico e ficou convencido de que em essência ela representava o sistema correcto do mundo. Embora tenha originalmente planeado tornar-se um ministro protestante, o destino interveio, e foi recomendado pela universidade para ocupar uma posição de professor de matemática na escola protestante na cidade austríaca de Graz. Quando a escola foi fechada vários anos mais tarde e todos os funcionários protestantes foram exilados, foi feita uma excepção no caso de Kepler. Foi-lhe permitido regressar e prosseguir os seus estudos em matemática e astronomia. Kepler sabia que para conceber em todos os pormenores uma versão correcta da teoria de Copérnico tinha que ter acesso às observações de Tycho Brahe. Iniciou por isso uma correspondência com o dinamarquês que acabou por resultar na sua nomeação para seu assistente em Praga pelo Imperador Rudolfo II. Embora Tycho tenha morrido cerca de 18 meses após a chegada de Kepler, Kepler tinha por esta altura aprendido o suficiente sobre o trabalho de Tycho para ser capaz de utilizar o material no seu próprio projecto. Foi nomeado Matemático Imperial para suceder a Tycho Brahe e passou os 11 anos seguintes em Praga (Fig. 10.24).

NOVA

STEREOMETRIA

DOLIORVM VINARIORVM, INPRIMIS Austriaci, figuræ omnium aptiſsimæ;

ET

USUS IN EO VIRGÆ CUBICÆ compendioſiſſimus & plane ſingularis.

Acceſſit

STEREOMETRIÆ ARCHIMEDEÆ Supplementum.

Authore

Ioanne Kepplero, Imp. Cæſ. Matthiæ I. ejuſq; fidd. Ordd. Auſtriæ ſupra Anaſum Mathematico.

Cum privilegio Caſareo ad annos XV.

ANNO M. DC. XV.

LINCII

Excudebat JOANNES PLANCVS, ſumptibus Authoris.

lii, ut æquentur capacitate, quia vix unquam profunditates ventrium ad diametrum orbis lignei, attingunt proportionem ſeſquitertiam.

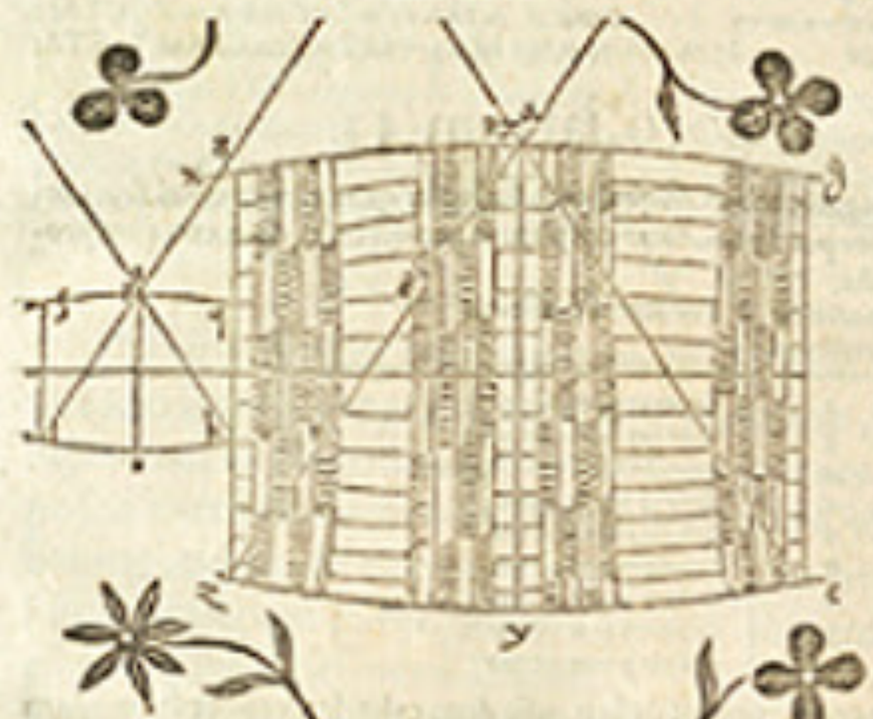
Hactenus de figura Dolij Auſtriaci, ſequitur,

De virga cubicâ ciuſq; certitudine.

THEOREMA XXVI.

In dolijs, quæ ſunt inter ſe figuræ ſimilis; proportio capacitatum eſt tripla ad proportionem illarum longitudinum, quæ ſunt ab orificio ſummo, ad imum calcem alterutrius Orbis lignei.

Sint dolia diverſæ magnitudinis, ſpecie eadem SQKT, XGCZ, quorum orificia OA, diametri orbium ligneorum QK, ST & GC, XZ, eorumq; ima T, K & Z, C, longitudines OK, OT æquales, ſic & AC, AZ. Dico, capacitates debere, eſſe in tripla proportione longitudinis OK, AC. Agatur enim per O, A plana OV, AY, parallela orbibus ligneis, & ſint duo trunci Conici, SV & VQ, ſic XY, & YG inter ſe ſimiles.



Quæ igitur de proportione dimidiorum doliorum ſunt vera, illa etiam de duplicatis erunt vera. Sint igitur propoſitæ figuræ OVKQ, AYCG, conici trunci, ſintq; latera figurarum OQ, VK, & AG, YC. Diametri Baſium minorum QK, GC, diametri baſium maiorum OV, AY: & OQKV, AGCY ſectiones quadrilateræ figurarum per ſuos axes, ſimiles inter ſe, earumq; diagonij OK, AC.

Ergo cum figuræ ſimiles, ſint ad ſe invicem in tripla proportione analogorum laterum, erit proportionis AG lateris ad OQ latus, aut GC diametri, ad QK diametrum tripla, proportio GY corporis ad QV corpus. At in figuris planis trilateris AGC & OQK ſimilibus, ut GC ad analogum QK, vel ut AG ad analogum OQ, ſic etiam diagonios AC ad analogam diago-

Hoc pacto si fuerit

Altitudo	Basis diameter	Erit corpus columnæ
1	20--	399
2	20--	794
3	20--	1173
4	20--	1536
5	19+	1875
6	19+	2184
7	19--	2457
8	18+	2688
9	18--	2871
10	17+	3000
11	17--	3069
Sub se-	midupla	3080
12	16.	3072
13	15+	3003
14	14+	2856
Æqu-	ales	2828
15	13+	2625
16	12.	2364
17	11--	1887
18	8+	1368
19	6+.	741
20	0.	0

Tabela dos volumes de paralelepípedos inscritos numa esfera.

Perto do máximo a variação é pequena

Biografia

Pierre de Fermat (1601-1665)

Fermat nasceu numa família moderadamente rica em Beaumont-de-Lomagne no sul de França, onde o seu pai era um comerciante de couros e um oficial local menor. Recebeu a sua educação preparatória na Universidade de Toulouse e obteve um diploma de advogado de lei civil em 1631 em Orleães. Regressou então a Toulouse, onde passou o resto da sua vida nas cercanias desta cidade praticando advocacia. Foi membro de vários corpos oficiais em Toulouse, incluindo as câmaras do Parlamento, um corpo encarregue de funções administrativas e legais. Embora Fermat tenha servido como jurista por muitos anos, é evidente que nunca foi um advogado brilhante, provavelmente porque gastava demasiado tempo com o seu primeiro amor, a matemática. Devido ao seu estado de saúde e à pressão do trabalho legal, contudo, nunca viajou para longe de sua casa. Assim, todo o seu trabalho matemático foi comunicado a outros por meio da sua extensa correspondência.

Fermat sempre considerou a matemática como um passatempo, um refúgio das disputas contínuas com as quais tinha que lidar como jurista. Recusou-se por isso a publicar qualquer uma das suas descobertas, porque fazê-lo obrigá-lo-ia a completar todos os pormenores e a sujeitar-se a possíveis controvérsias noutra arena. Em muitos casos não se sabe que provas, se algumas, Fermat construiu e também nem sempre há uma explicação sistemática de determinadas partes do seu trabalho. Fermat atormentava frequentemente os seus correspondentes com pistas sobre os seus novos métodos para resolver determinados problemas. Por vezes fornecia esboços desses métodos, mas as suas promessas de preencher os vazios "quando o ócio o permitir" permaneciam frequentemente por concretizar. Não obstante, um estudo dos seus manuscritos, publicados pelo seu filho 14 anos após a sua morte, bem como as suas muitas cartas, permitem aos académicos da actualidade ter uma imagem razoavelmente completa dos métodos de Fermat.[2]

$AB=b$

$x(b-x)=c$

Biografia

François Viète (1540-1603)

Viète nasceu em Fontenay-le-Comte, uma aldeia na França ocidental, perto da baía de Biscaia. Depois de receber o grau em leis na Universidade de Poitiers, regressou à sua aldeia nativa iniciando a prática da profissão. A sua reputação legal cresceu devido à sua associação com uma proeminente família local, e foi chamado a Paris pelo Rei Henrique III como conselheiro encarregado de negociações confidenciais e, finalmente, em 1580, conseguiu um lugar no conselho privado. Uma das suas obrigações para Henrique, depois que este mudou a sua corte para Tours, em 1589, foi de actuar como criptoanalista de mensagens interceptadas entre inimigos do rei. Teve tanto êxito nesta tarefa que foi denunciado por alguns que pensaram que a decifração poderia ter sido apenas realizada por feitiçaria. Como continuou a trabalhar para Henrique III e o seu sucessor Henrique IV, o trabalho matemático de Viète só pode ter sido passatempo.

Soluções x_1, x_2

$$bx_1 - x_1^2 = bx_2 - x_2^2 \Rightarrow b(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 = b$$

O valor máximo de *c* para o qual o problema tem solução é

$$b^2/4$$

E o valor maximizante de x é *b/2*

Fermat vê este valor b/2 como atingido pelas duas soluções

$$x_1 = b/2 \qquad x_2 = b - b/2$$

Em $x_1 + x_2 = b$ faz $x_1 = x_2 = x$

e obtém $x = b/2$ para valor maximizante.

Recapitulemos.

1º $$bx_1 - x_1^2 = bx_2 - x_2^2 \Rightarrow b(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

2º $$x_1 + x_2 = b$$

3º Fazer $x_1 = x_2 = x$ para obter o maximizante $x = b/2$

Outro exemplo: $bx^2 - x^3$

$$bx_1^2 - x_1^3 = bx_2^2 - x_2^3$$

$$b(x_1^2 - x_2^2) = x_1^3 - x_1^3 \Leftrightarrow b(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

$$b(x_1 + x_2) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$$

fazendo $x_1 = x_2 = x$ obtemos $x = 2b/3$

[A natureza do problema em questão esclarecia a Fermat que este era um maximizante]

Para facilitar os cálculos, Fermat usou x e $x+e$ no lugar de x_1, x_2

$$bx - x^2 \approx b(x + e) - (x + e)^2$$

(adegualar)

Simplificando e dividindo por *e*: $2x = b - e$

Desprezando *e*...

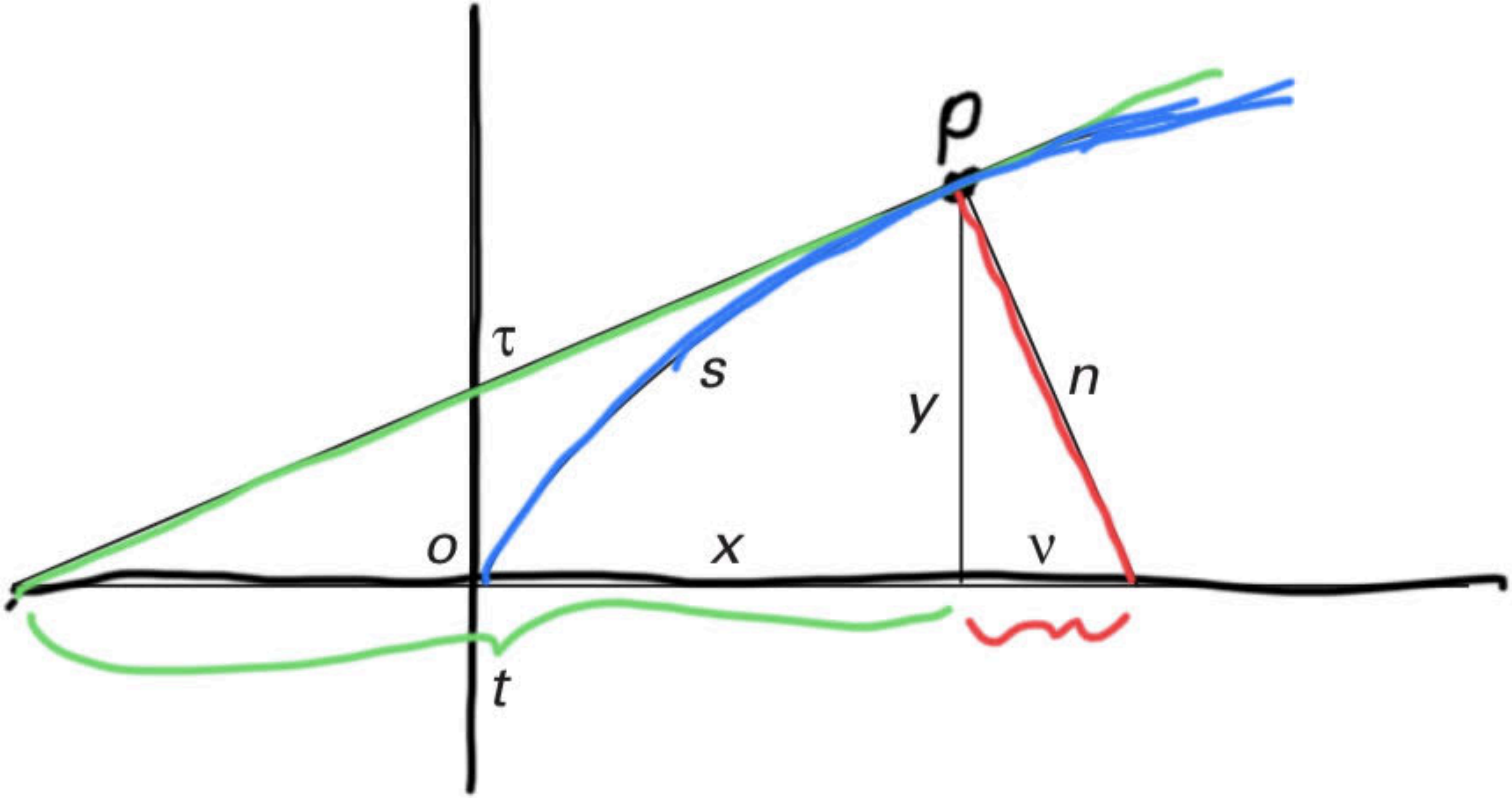
$$x = b/2$$

Notas: O processo é eficiente e geral.

Mas dividir por *e* e, mais tarde, considerar esta quantidade nula...
é problemático!!

Veremos adiante que esta é característica dos infinitésimos, ou infinitesimais. Pequenos, mas significativos e, quando dá jeito, nulos...

Fermat usou o seu método na determinação de tangentes
(ou, o que é equivalente, de subtangentes)



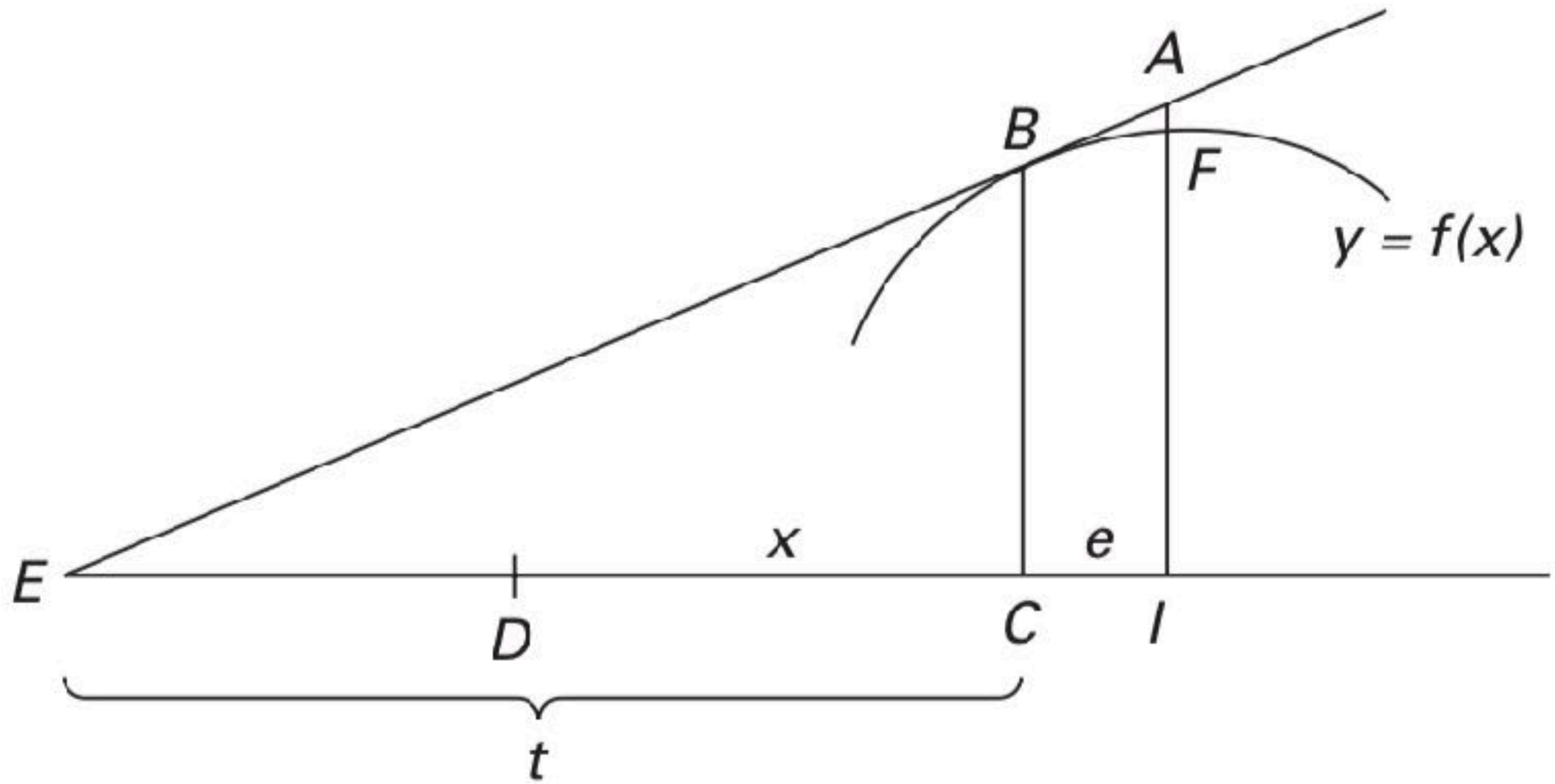
Quantidades ligadas
a uma curva: x é a abcissa,
y a ordenada,
s o comprimento de arco,
t a subtangente, τ a tangente,
n a normal, e ν a subnormal.

Ideia: adegualar

$$\frac{f(x+e)}{f(x)} \approx \frac{t+e}{t}$$

isto é,

$$\frac{FI}{BC} \approx \frac{EI}{EC}$$



Depois, seguindo o método, simplificar e desprezar termos em *e*, para obter relação entre *t* e *x*.

Exemplo. $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x+e}}{\sqrt{x}} \approx \frac{t+e}{t}$$

$$t^2 e \approx 2etx + e^2 x$$

$$t^2 \approx 2tx + ex$$

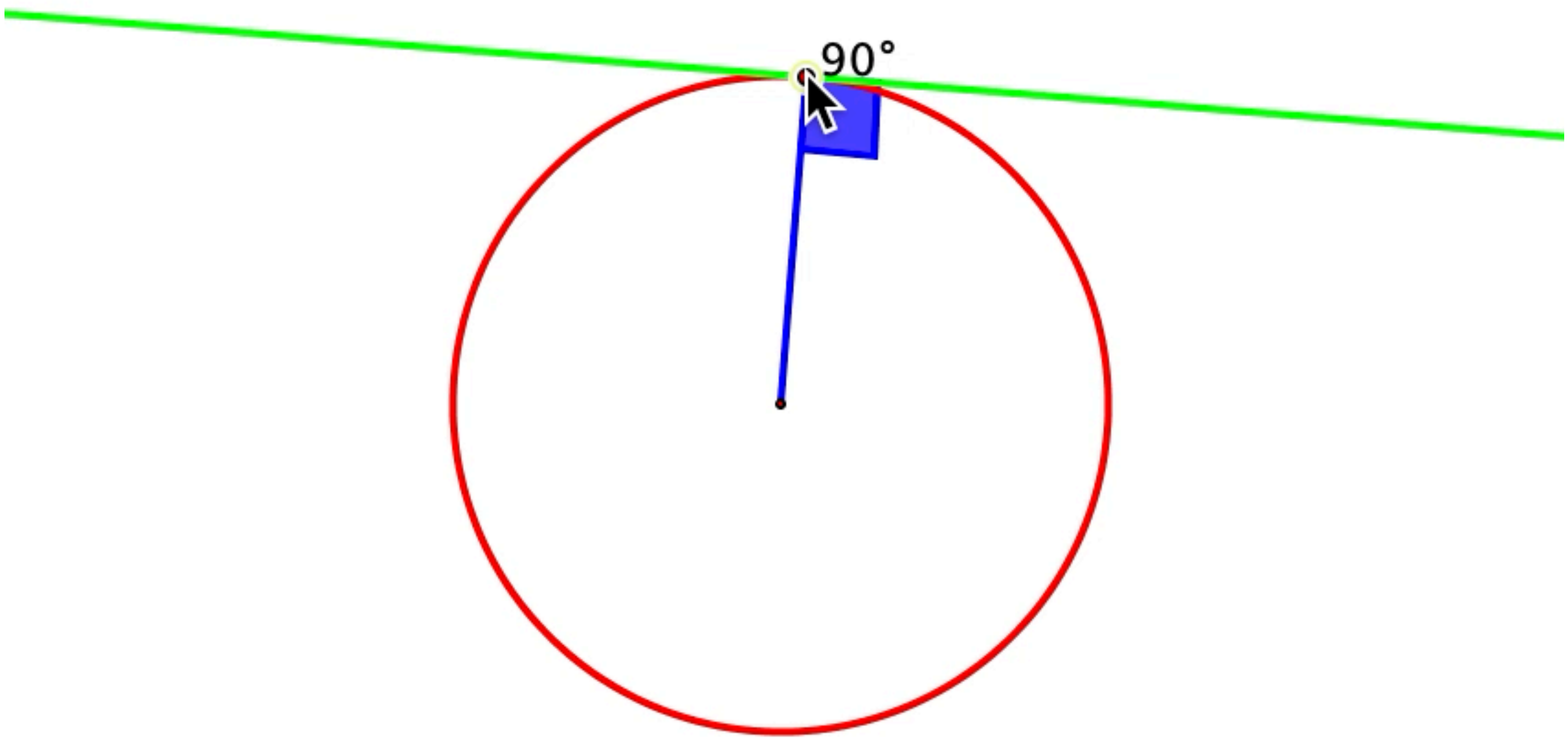
$$t = 2x$$

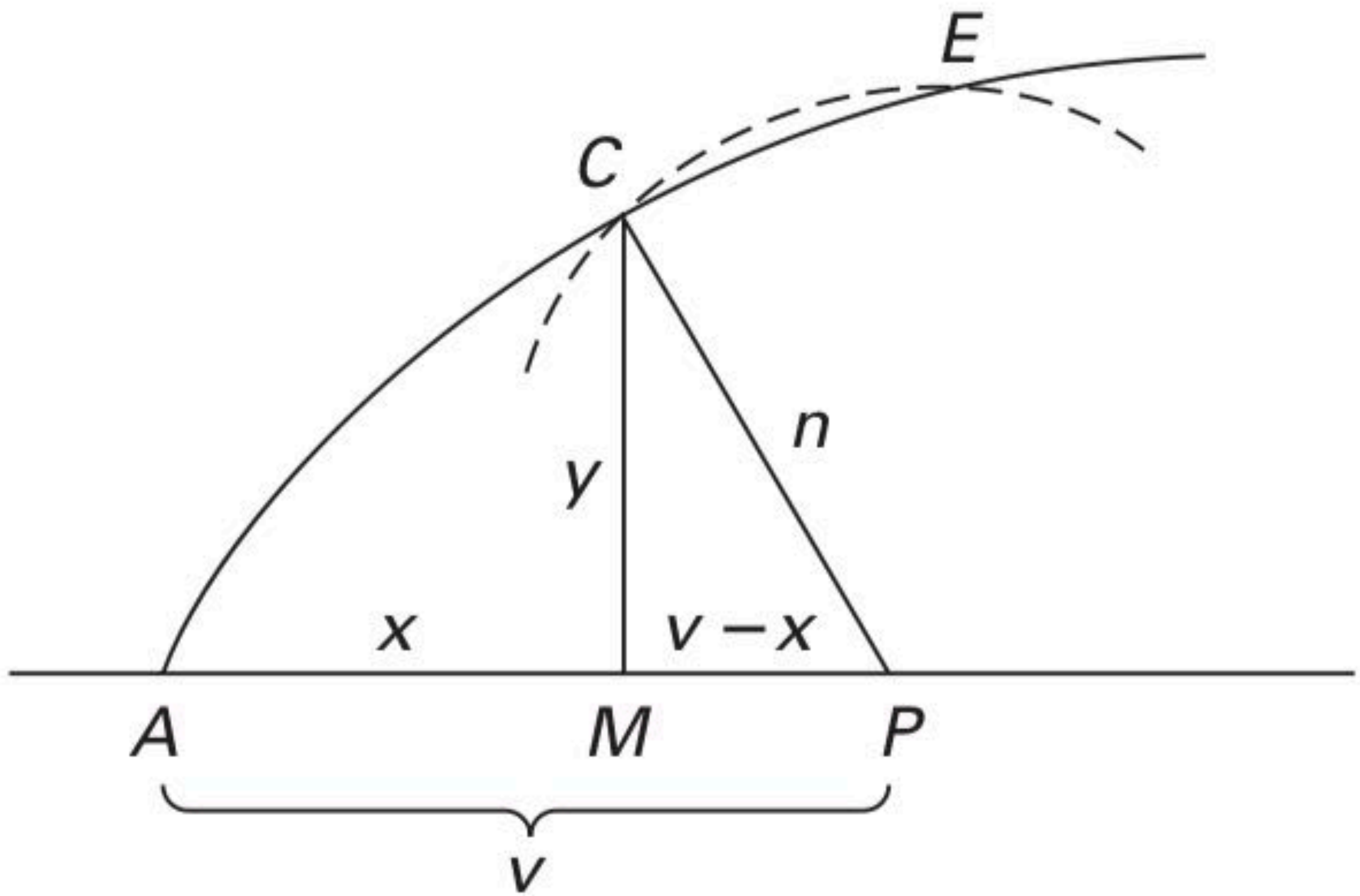
Biografia

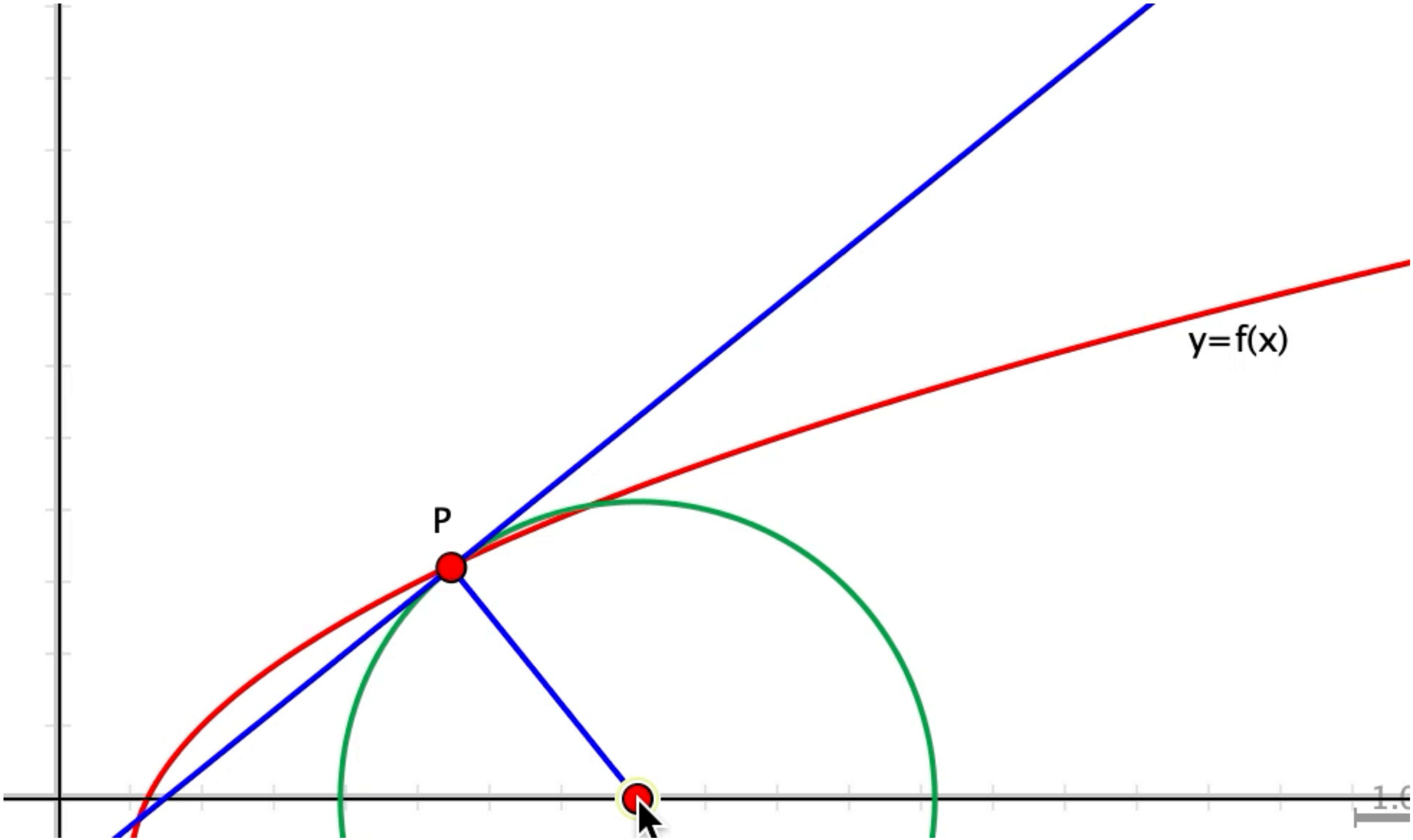
René Descartes (1596-1650)

Descartes (Fig. 11.5) nasceu em La Haye (hoje La Haye-Descartes) perto de Tours numa família da velha nobreza francesa. Como passou a sua juventude enfermiço, foi-lhe permitido acordar tarde durante os seus anos de escola. Desenvolveu assim o hábito de passar as suas manhãs em meditação. Os seus pensamentos levaram-no à conclusão de que pouco do que tinha aprendido na escola era certo. De facto, ficou tão cheio de dúvidas que decidiu abandonar os estudos. Como relatou no seu *Discurso do Método*, "Utilizei o resto da minha juventude para viajar, para ver cortes e exércitos, para frequentar pessoas de diferentes disposições e condições, para armazenar várias experiências, para dar provas de mim próprio nos encontros com os quais a fortuna me confrontou, e em todo o lado para reflectir sobre as coisas que ocorriam, para poder tirar algum proveito delas"[7]. Assim, participou em várias campanhas durante a Guerra dos Trinta Anos antes de se estabelecer na Holanda em 1628 para começar o seu objectivo de toda a vida de criar uma nova filosofia adequada a descobrir a verdade sobre o mundo. Resolveu aceitar como verdadeiras apenas ideias tão claras e distintas que não podiam levantar qualquer dúvida e depois seguir o modelo do raciocínio matemático através de passos simples e lógicos para discernir novas verdades. Depressa escreveu um grande tratado sobre física, mas no último minuto, tendo ouvido falar da condenação de Galileu pela Igreja, decidiu não o publicar, por medo de que um pequeno erro doutrinal levasse ao banimento de toda a sua filosofia. Rapidamente ficou persuadido, contudo, de que devia partilhar as suas novas ideias com o mundo. Em 1637 publicou o *Discurso do Método*, juntamente com três ensaios sobre óptica, meteorologia e geometria concebidos para demonstrar a eficácia do "método".

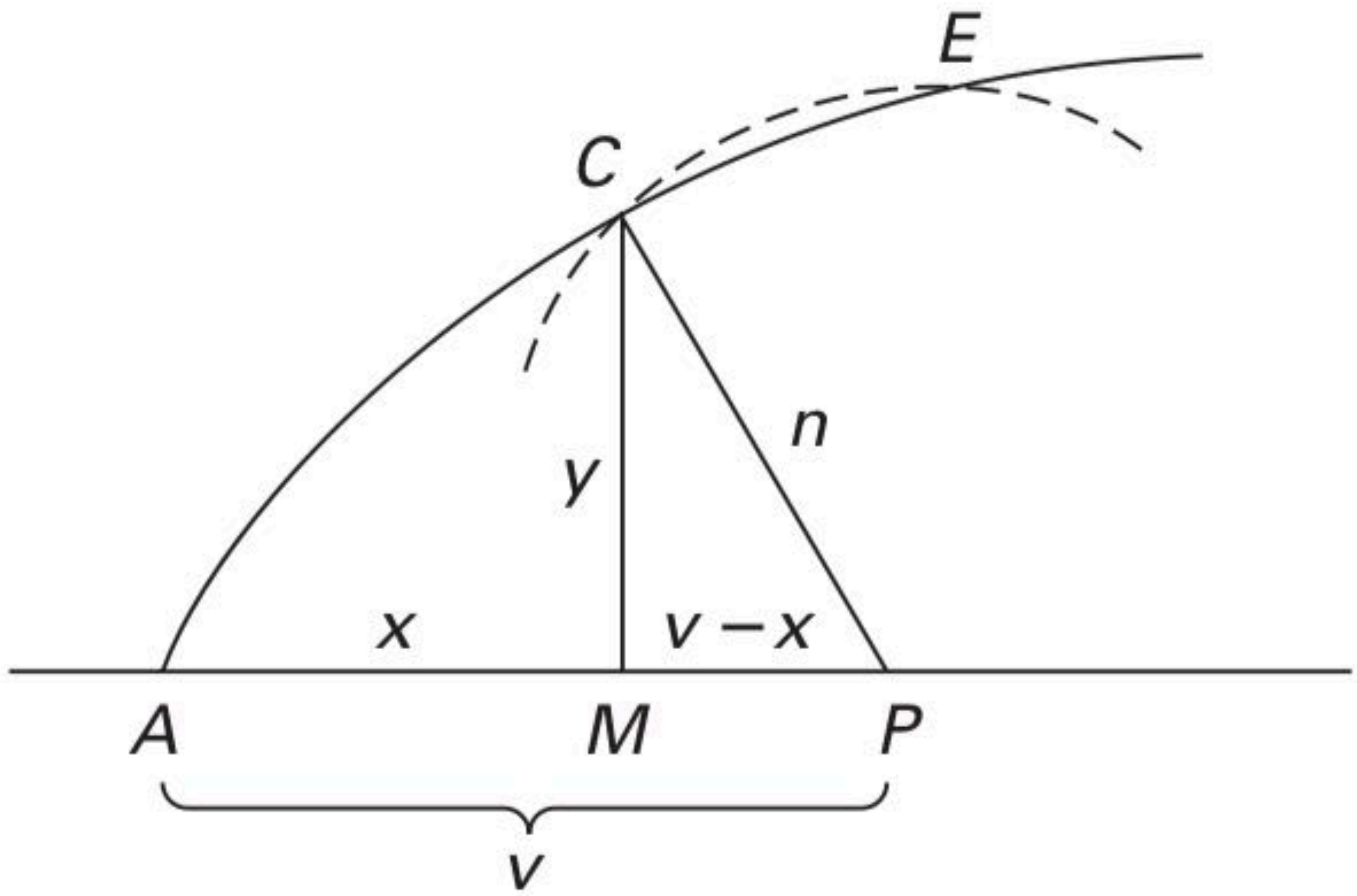
A reputação internacional de Descartes foi aumentada com a publicação de várias outras obras filosóficas e em 1649 foi convidado pela Rainha Cristina da Suécia para ir a Estocolmo ensiná-la. Ele aceitou com relutância. Infelizmente, a sua saúde não conseguiu aguentar a severidade do clima nórdico, especialmente uma vez que Cristina lhe pedia, contrariamente aos seus hábitos de longa data, para se levantar muito cedo. Descartes contraiu rapidamente uma doença de pulmões que o levou à morte em 1650.


90°


E
C
n
y
x
v − x
A
M
P
v



y=f(x)
P


E
C
n
y
x
v − x
A
M
P
v

A equação da circunferência por C centrada em P é

$$y^2 + (v - x)^2 = n^2$$

$$(f(x))^2 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2 = 0$$

Para termos tangência entre a curva definida por f e a circunferência, esta equação deve ter uma raíz dupla. Do seu estudo de equações algébricas, Descartes sabia que então

$$(f(x))^2 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2 = (x - x_0)^2 q(x)$$

onde q é um polinómio.

Expandindo e igualando coeficientes homólogos, obtém-se *v* em termos de x_0 , o que basta para determinar a normal *n*.

Um exemplo. $f(x) = x^2$ Temos então

$$x^4 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2 = (x - x_0)^2 q(x)$$

Ora *q* deve ter grau 2 e coeficiente director 1:

$$x^4 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2 = (x - x_0)^2 (x^2 + ax + b)$$

donde, após uns cálculos, se obtém $v = 2x_0^3 + x_0$

É fácil daqui tirar, por exemplo, o declive da normal, $-1/2x_0$

John Hudde (1628-1704) e René Sluse (1622-1685) criaram algoritmos para a prática destas técnicas.

O método de Descartes para obter a normal depende de determinar zeros duplos de polinómios...

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

zero duplo em $x = \alpha$

E $p, p+b, p+2b, \ldots, p+nb$ uma progressão aritmética, então

$$pa_0 + (p+b)a_1 x + (p+2b)a_2 x^2 + \cdots + (p+nb)a_n x^n$$

também tem um zero em $x = \alpha$

Em terminologia moderna, este último polinómio é

$$pf(x) + bxf'(x)$$

pelo que o resultado de Hudde é trivial, já que sabemos que qualquer zero duplo de *f* é também zero da derivada.

p=0, b=1 é a escolha mais frequente, que dá $xf'(x)$

Exemplo. Achar a normal a $y = x^2$ em (x_0, x_0^2)

Já vimos que precisamos do zero duplo de

$$x^4 + v^2 - 2vx + x^2 - n^2$$

Aplicando a regra de Hudde com *p=0 e b=1*, obtemos a equação

$$4x^4 + 2x^2 - 2vx = 0$$

Ou

$$4x^3 + 2x - 2v = 0$$

Donde se obtém uma relação entre v e x_0

$$v = 2x_0^3 + x_0$$

O declive da tg sai facilmente daqui: $(v - x_0)/x_0^2 = 2x_0$

Este procedimento permite obter o declive da tangente a $y = x^n$

em (x_0, x_0^n) que é nx_0^{n-1}, o que seria difícil pelo método

de Descartes.

Hudde também simplificou a ideia de Fermat para obter máximos.

Se *f(x)* tem um máximo *M*, então *f(x)-M* tem um zero duplo

Para maximizar $x^2(b-x)$ usamos *p=0, b=1* e o polinómio

$$-x^3 + bx^2 - M$$

e obtemos $-x^3 + 2bx^2 = 0$ donde *x=2b/3*

Para curvas definidas por equações polinomiais da forma $f(x,y)=0$, Sluse deu um algoritmo surpreendente para determinar a subtangente t.

Eliminar termos constantes.

Todos os termos em x ficam à esquerda.

Todos os termos em y ficam à direita. [Há repetições...]

Cada termo à esquerda deve ser multiplicado pelo seu expoente de x

Cada termo à direita deve ser multiplicado pelo seu expoente de y

Substituir um x de cada termo à esquerda por t e resolver em ordem a t.

$$x^5 + bx^4 - 2q^2y^3 + x^2y^3 - b^2 = 0$$

$$x^5 + bx^4 + x^2y^3 = 2q^2y^3 - x^2y^3$$

$$5x^5 + 4bx^4 + 2x^2y^3 = 6q^2y^3 - 3x^2y^3$$

$$5x^4t + 4bx^3t + 2xy^3t = 6q^2y^3 - 3x^2y^3$$

$$t = \frac{6q^2y^3 - 3x^2y^3}{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}$$

E para declive da tangente

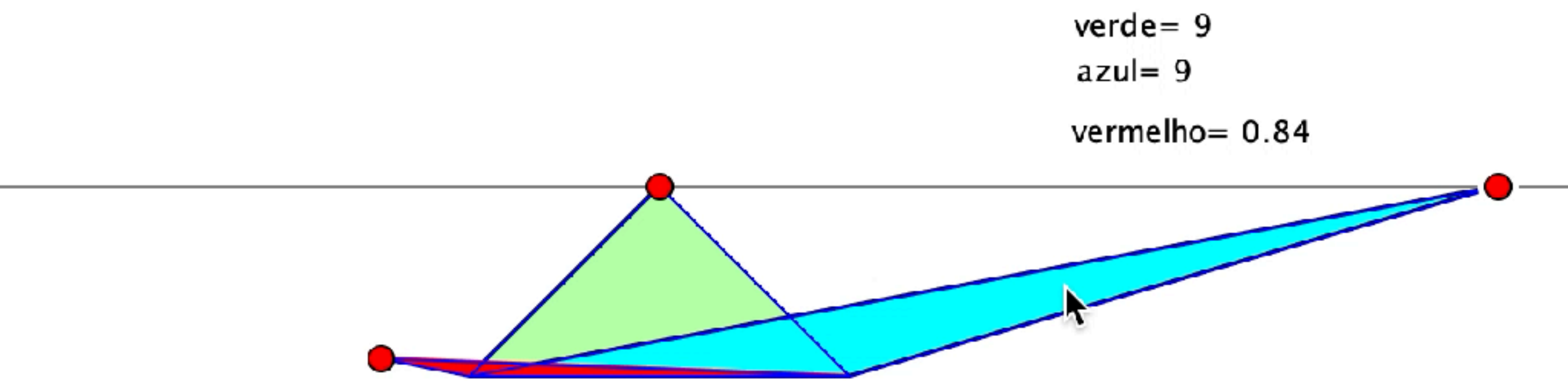
$$\frac{y}{t} = \frac{5x^4 + 4bx^3 + 2xy^3}{6q^2y^2 - 3x^2y^2}$$

Em notação moderna, a conhecida fórmula

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

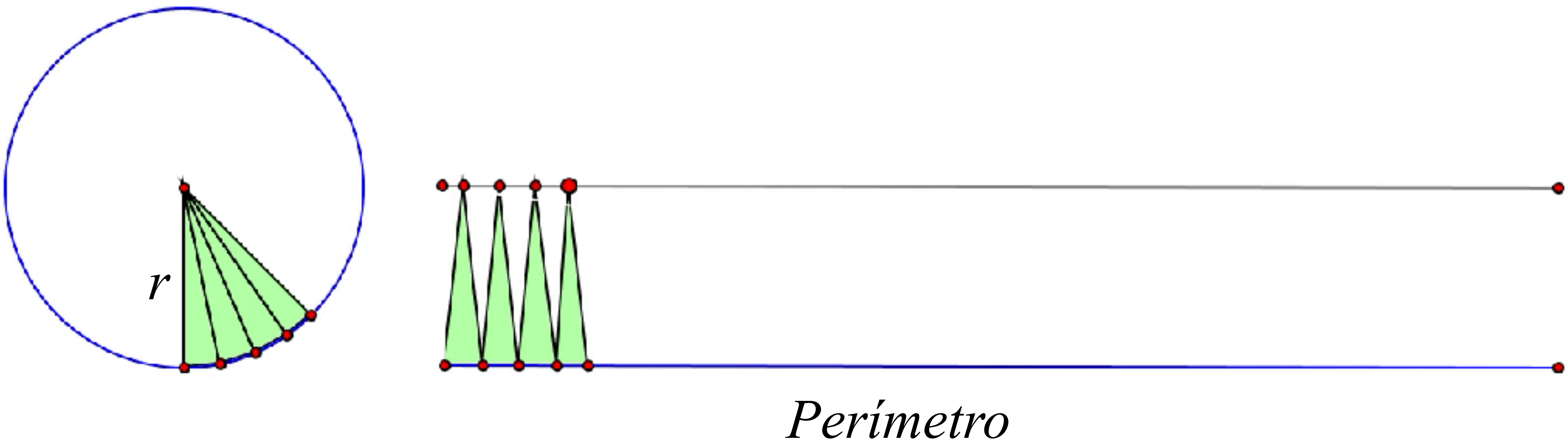
[Sluse não indica como chegou a estes resultados. Somos levados a supor que foram a consequência de muitos exemplos particulares]

Áreas e volumes



verde= 9
azul= 9
vermelho= 0.84

Kepler e os infinitésimos



área = metade de *r* x *Perímetro*

Biografia

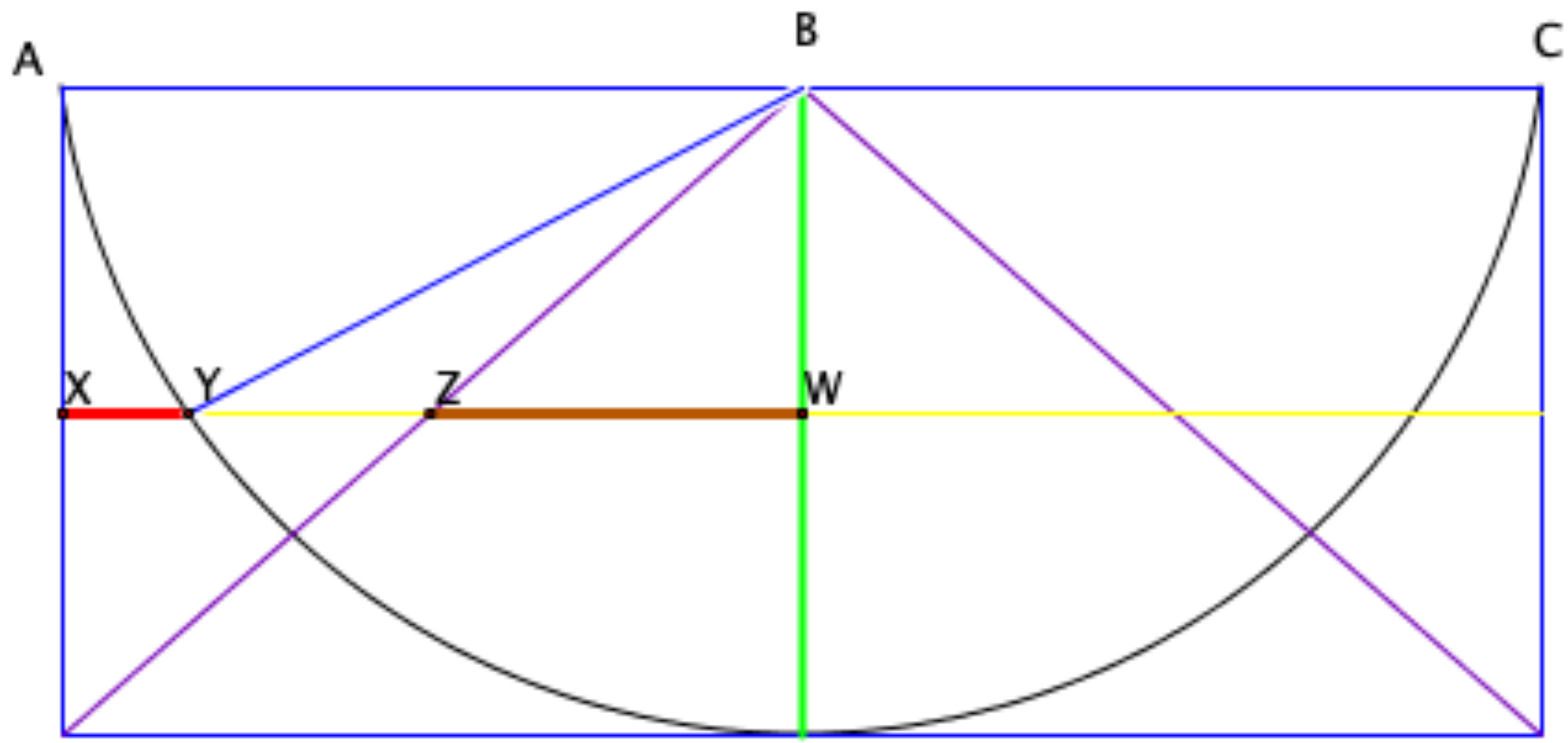
Galileu Galilei (1564-1642)

Galileu (Fig. 10.32) estudou na Universidade de Pisa de 1581 a 1585, trabalhando arduamente para a formatura em medicina. Estava mais interessado nas matemáticas, contudo, e acabou por abandonar a universidade sem receber qualquer diploma. A sua formação em matemática foi clássica. Dominava Aristóteles e Euclides e leu algumas das obras de Arquimedes. Desta forma era bastante versado na teoria das proporçõs de Eudoxo, mas evidentemente tinha pouco conhecimento da álgebra de Cardano ou Bombelli ou do mais recente trabalho de Viète. Estava convencido da importância da matemática, particularmente da geometria, no estudo dos fenómenos naturais.

Galileu é mais famoso hoje pelo seu choque com a Igreja Católica devido à publicação do seu *Diálogo Sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo* (1632), uma obra que apresentava os argumentos a favor e contra as teorias ptolemaica e coperniciana do universo. Como notado na abertura deste capítulo, as autoridades eclesiásticas tinham avisado Galileu, em 1616, que a posição oficial da Igreja era de que a Terra não se movia e que não se podia defender visões contrárias. Galileu teve consequentemente o cuidado de apresentar a visão de Copérnico como hipotética e de apresentar simplesmente as suas consequências bem como as consequências da posição ptolemaica tradicional. Não obstante, uma leitura cuidadosa do texto revela que Galileu estava de facto convencido de que a Terra girava em torno do Sol – o que não é uma conclusão surpreendente nesta altura – e faz os defensores da posição mais antiga parecerem tolos. Ainda assim, Galileu acreditava que as verdades científicas e religiosas eram compatíveis. Como tinha escrito em 1615, quando "tivermos chegado a quaisquer certezas em física, devemos utilizá-las como os auxiliares mais apropriados na exposição verdadeira da Bíblia e na investigação desses significados que estão necessariamente contidos dentro dela, pois estes devem ser concordantes com as verdades demonstradas."[50] É assim uma infelicidade que os líderes da Igreja nos anos de 1630 fossem tão teimosos como Galileu e estivessem convencidos de que qualquer desafio à interpretação corrente da Bíblia tinha de ser confrontada directamente. Assim, em 1633, Galileu foi levado a responder perante a Inquisição em Roma e foi obrigado a confessar o seu erro. Foi, então, condenado a prisão domiciliária para o resto da sua vida e proibido de publicar mais livros. Conseguiu, contudo, publicar a sua obra mais importante, o *Discursos e Demonstrações Matemáticas Respeitantes a Duas Novas Ciências*, em 1638, enviando o manuscrito para lá do alcance da Inquisição para Leiden na Holanda, onde foi impresso pela editora de Elseviers.

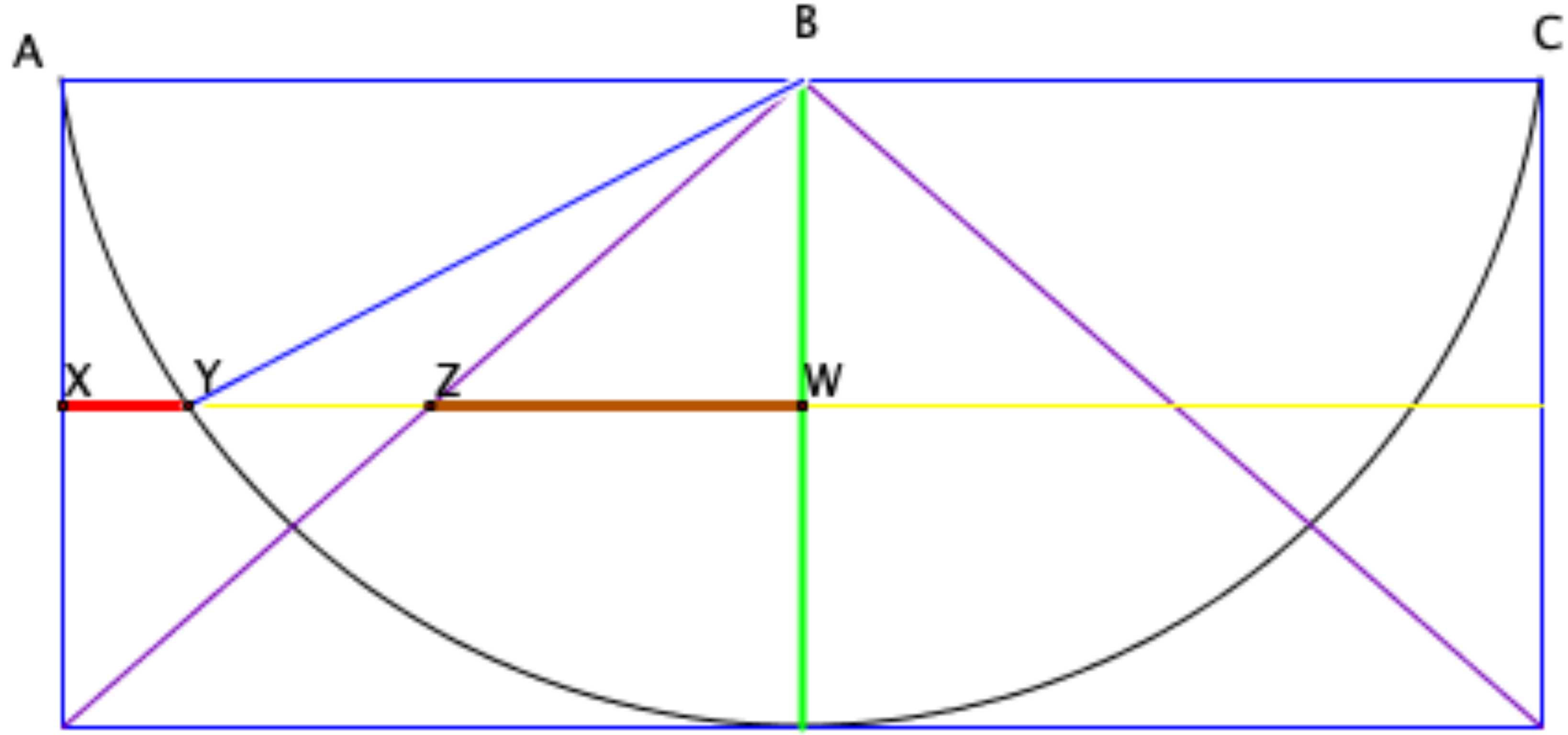
Mesmo apesar da Igreja ter banido o *Diálogo*, este já tinha circulado tão amplamente que era impossível negar os seus efeitos. Assim, o público italiano, bem como leitores noutras partes, ficaram rapidamente convencidos de que o sistema coperniciano era de facto verdadeiro e de que a Terra se movia realmente. A Igreja teria de reconhecer, mais tarde, que a sua interpretação de determinadas afirmações na Bíblia devia ser mudada.

ABC diâmetro de uma esfera.

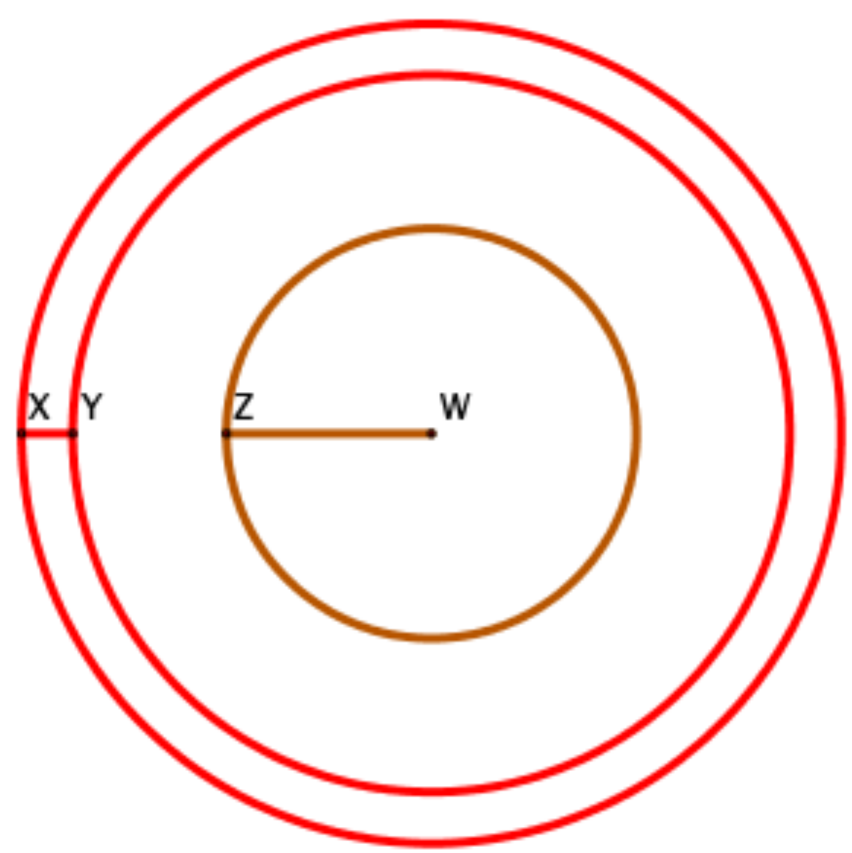


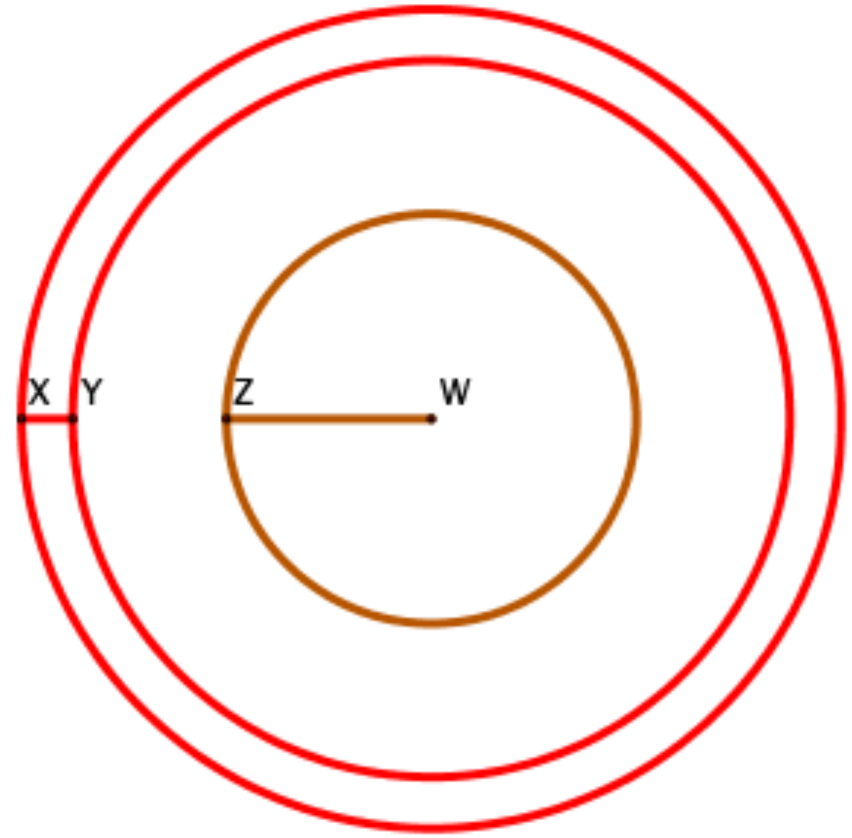
A malga é gerada pela rotação, em torno do eixo verde, das fatias XY.

O cone é gerado por rotação semelhante das fatias ZW.



Mudemos de vista, para apreciar as áreas de revolução das fatias.



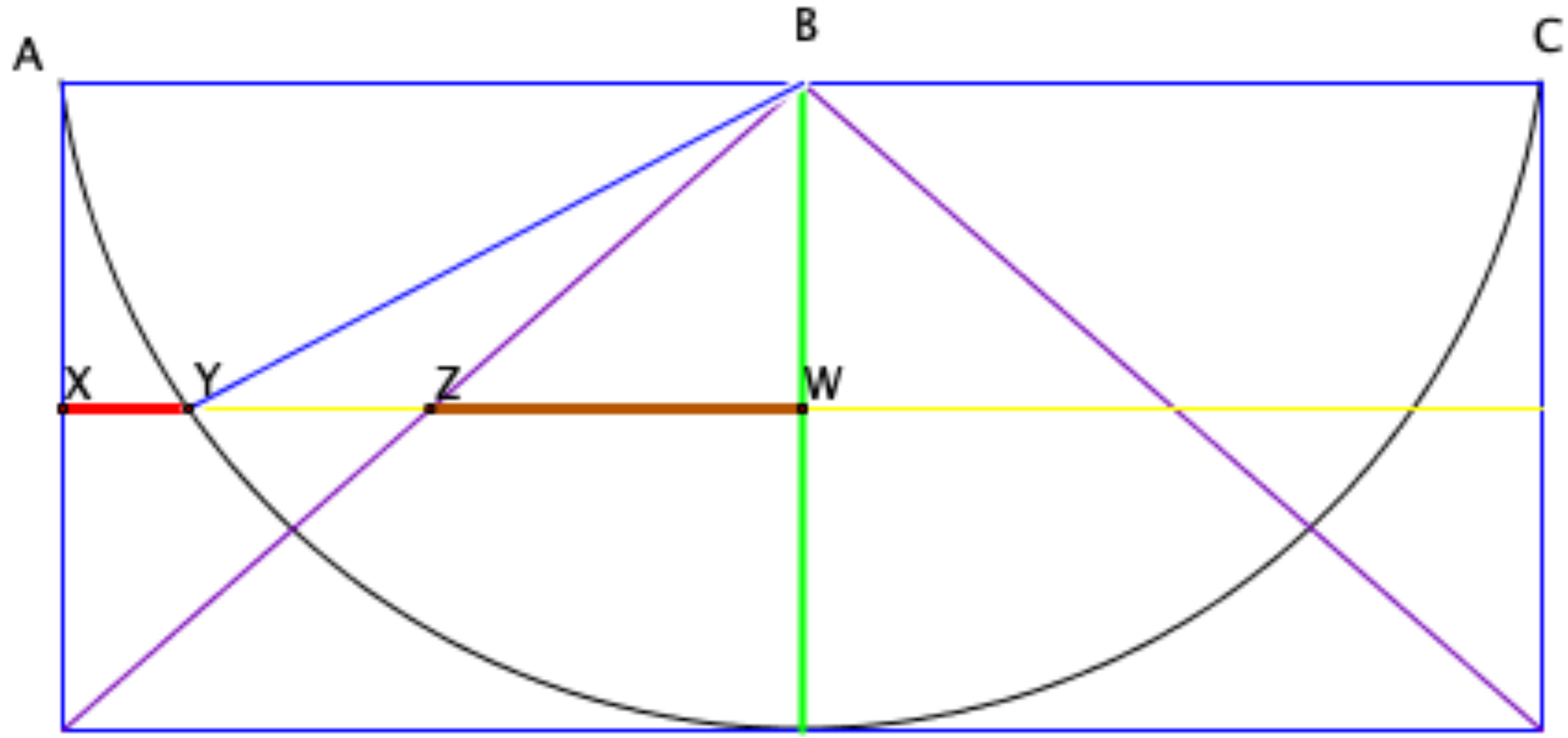


Área da coroa circular definida por XY:

$$\pi XW^2 - \ \pi YW^2 = \ \pi(XW^2 - YW^2)$$

Área da coroa circular definida por ZW:

$$\pi ZW^2$$



$$BY^2 = YW^2 + WB^2$$

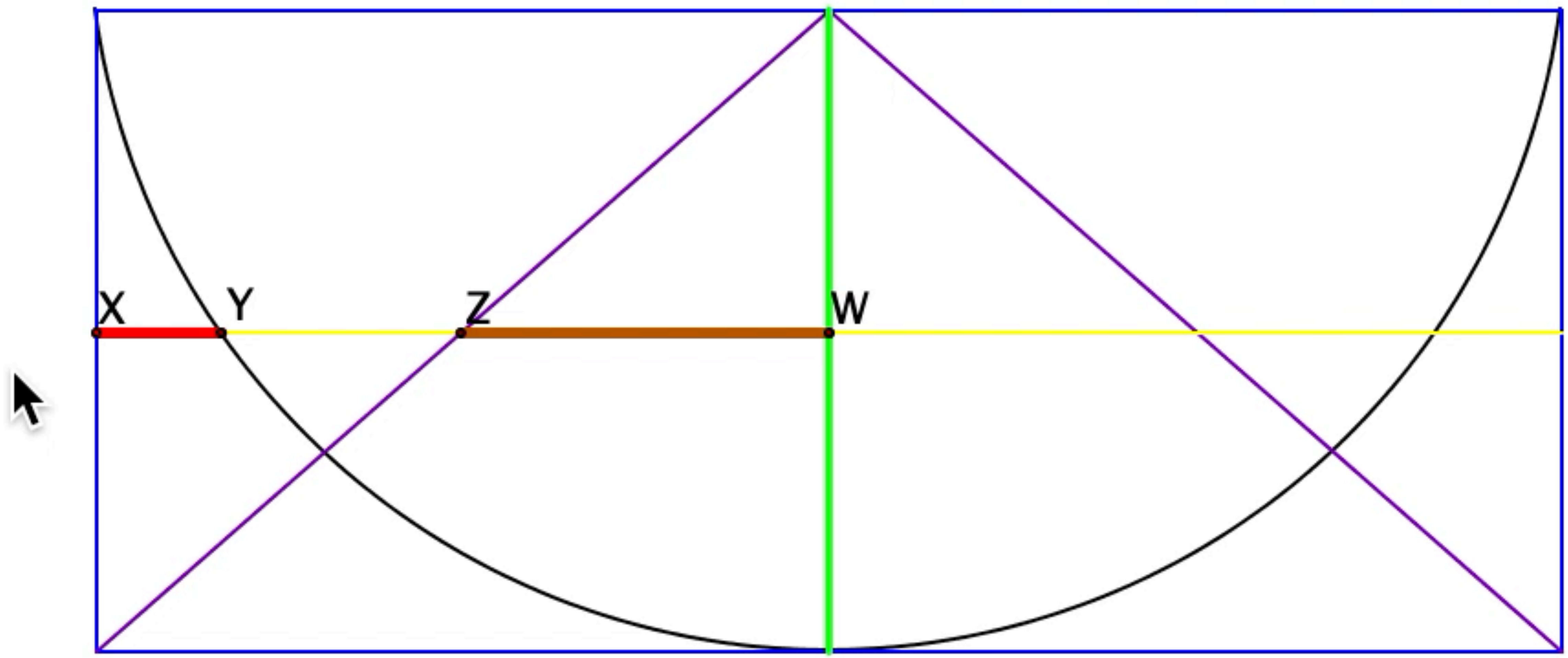
$$BY = AB = XW$$

$$XW^2 = YW^2 + WB^2$$

$$WB = ZW$$

$$XW^2 - YW^2 = ZW^2$$

Galileu e os indivisíveis



$$XW^2 - YW^2 = ZW^2$$

Logo, área da fatia da malga = área da fatia do cone.

Logo, volume da malga = volume do cone

Biografia

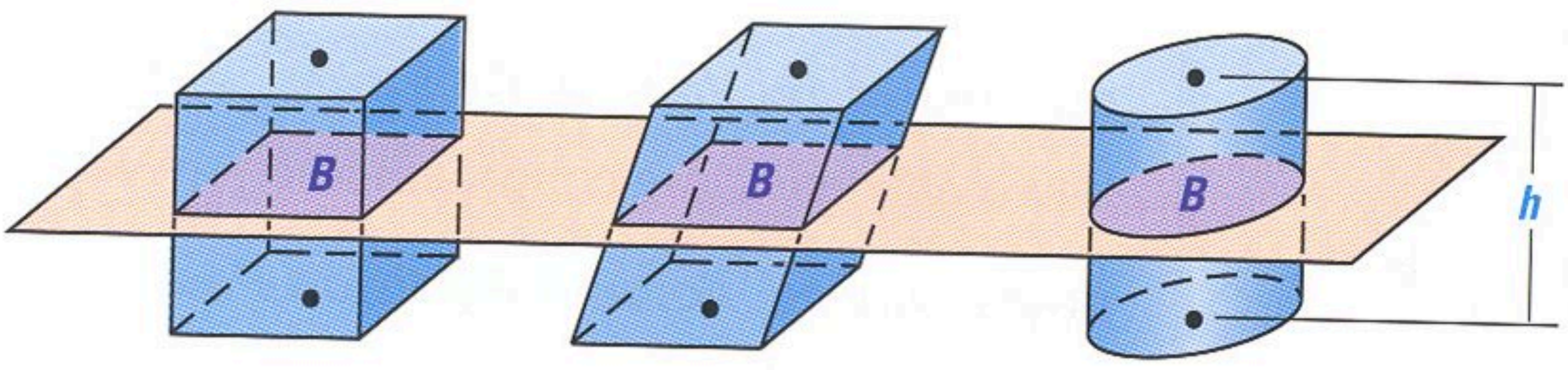
Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

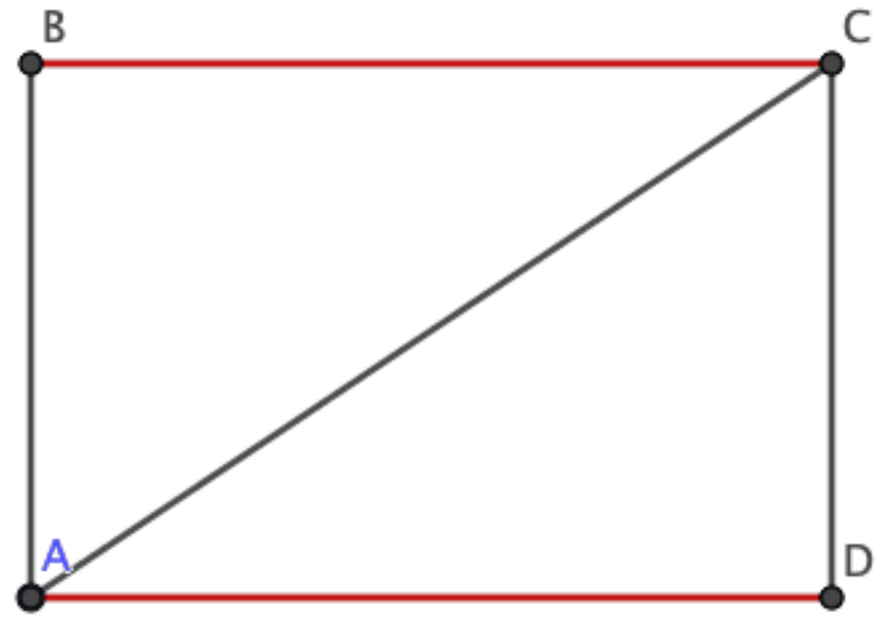
Cavalieri começou o seu estudo de matemática em Pisa enquanto membro de uma pequena ordem religiosa, e aí começou uma correspondência com Galileu que durou até perto da morte deste. Provavelmente através da influência deste último, obteve um professorado em Bolonha, em 1629, e conseguiu ver a sua nomeação renovada de três em três anos até à sua própria morte. Para além das obras mencionadas no texto, Cavalieri publicou muitas outras obras sobre matemática, incluindo um trabalho sobre astrologia, e também investigou lentes e espelhos. A sua fama deve-se, contudo, ao método das indivisíveis discutido na *Geometria*, uma obra que foi amplamente conhecida embora, devido à sua dificuldade, provavelmente pouco estudada.

A ideia de Cavalieri reside em comparar cortes de duas figuras, sistematicamente.

Princípio de Cavalieri (no plano)**:** Se duas figuras planas tiverem a mesma altura e as linhas de uma estiverem todas na mesma proporção para as linhas da outra, então as figuras estão, em área, na mesma proporção.

No espaço: se as áreas das fatias homólogas são iguais, então os volumes são iguais.

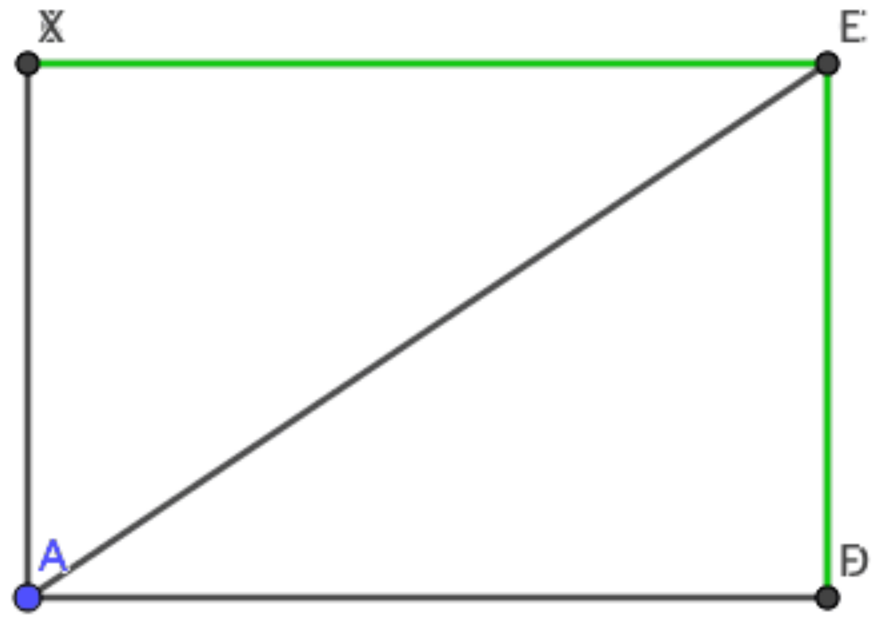




Assim, os triângulos têm áreas iguais, metade da do rectângulo.

Cuidado!

$$BC = \frac{3}{2}\,AB$$

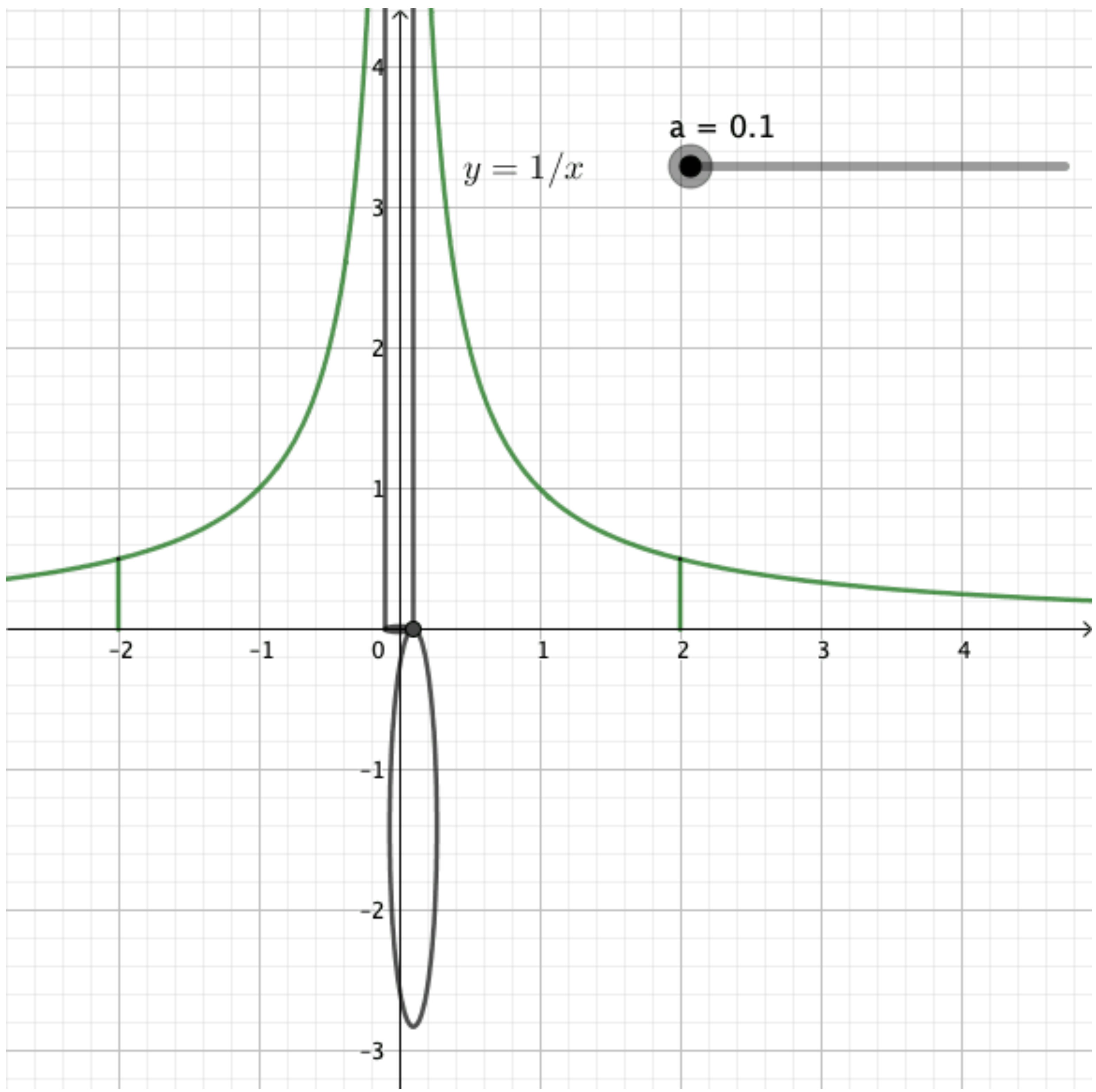


$$XE = \frac{3}{2}\,EF$$

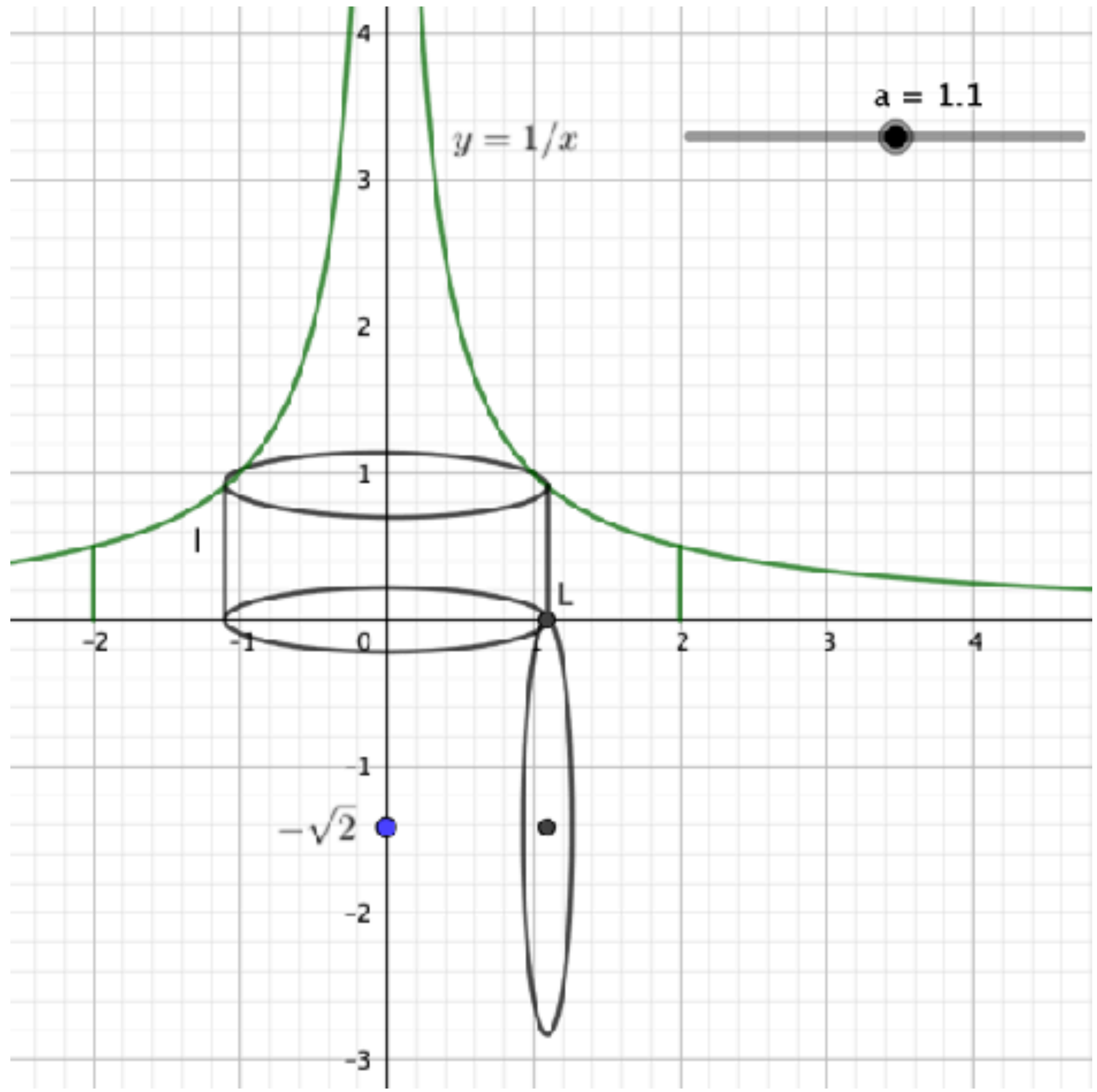
Biografia

Evangelista Torricelli (1608-1647)

Torricelli (Fig. 12.8) estudou matemática em Roma com Benedetto Castelli (1578-1643), um aluno de Galileu e, em 1641, pôde estudar com o próprio Galileu na sua casa em Arcetri. Ficou lá até à morte de Galileu e foi, pouco tempo depois, nomeado para a antiga posição de Galileu de matemático e filósofo do Grão-Duque da Toscânia. Torricelli permaneceu em Florença o resto da sua vida, continuando o trabalho de Galileu sobre movimento e polindo lentes para telescópios mais potentes. É provavelmente mais famoso pela sua descoberta do princípio do barómetro em 1643. Morreu de febre tifóide em 1647.



1643

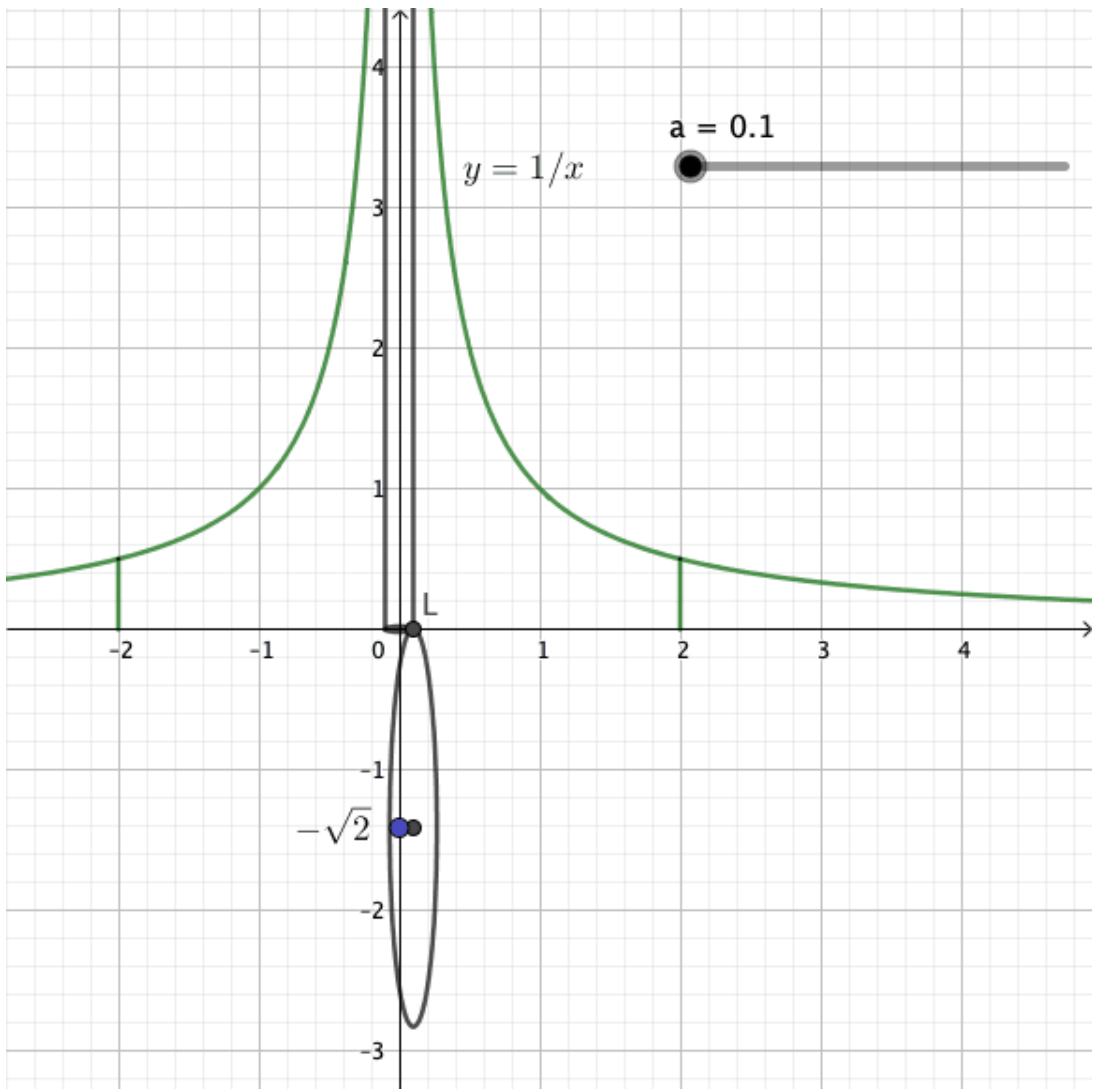


Seja L=*(x,0)*. Então a altura do cilindro é *1/x.*

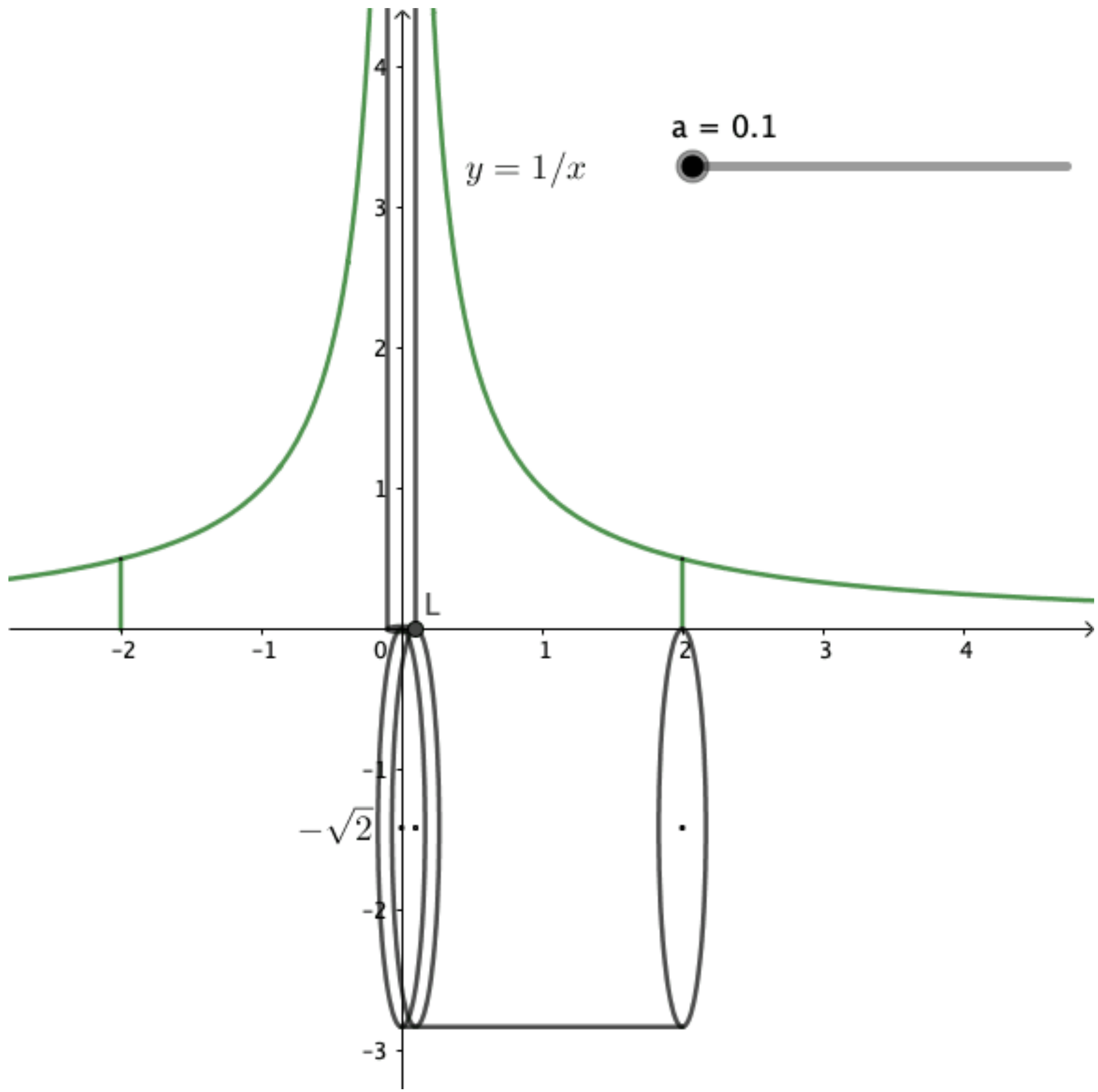
Perímetro da circunferência da base do cilindro: $2\pi x$

Área lateral do cilindro = perímetro da base x altura =

$2\pi x \times 1/x = 2\pi$ = área do círculo de raio $\sqrt{2}$



a = 0.1
$y = 1/x$
L
$-\sqrt{2}$
-2
-1
0
1
2
3
4
-3

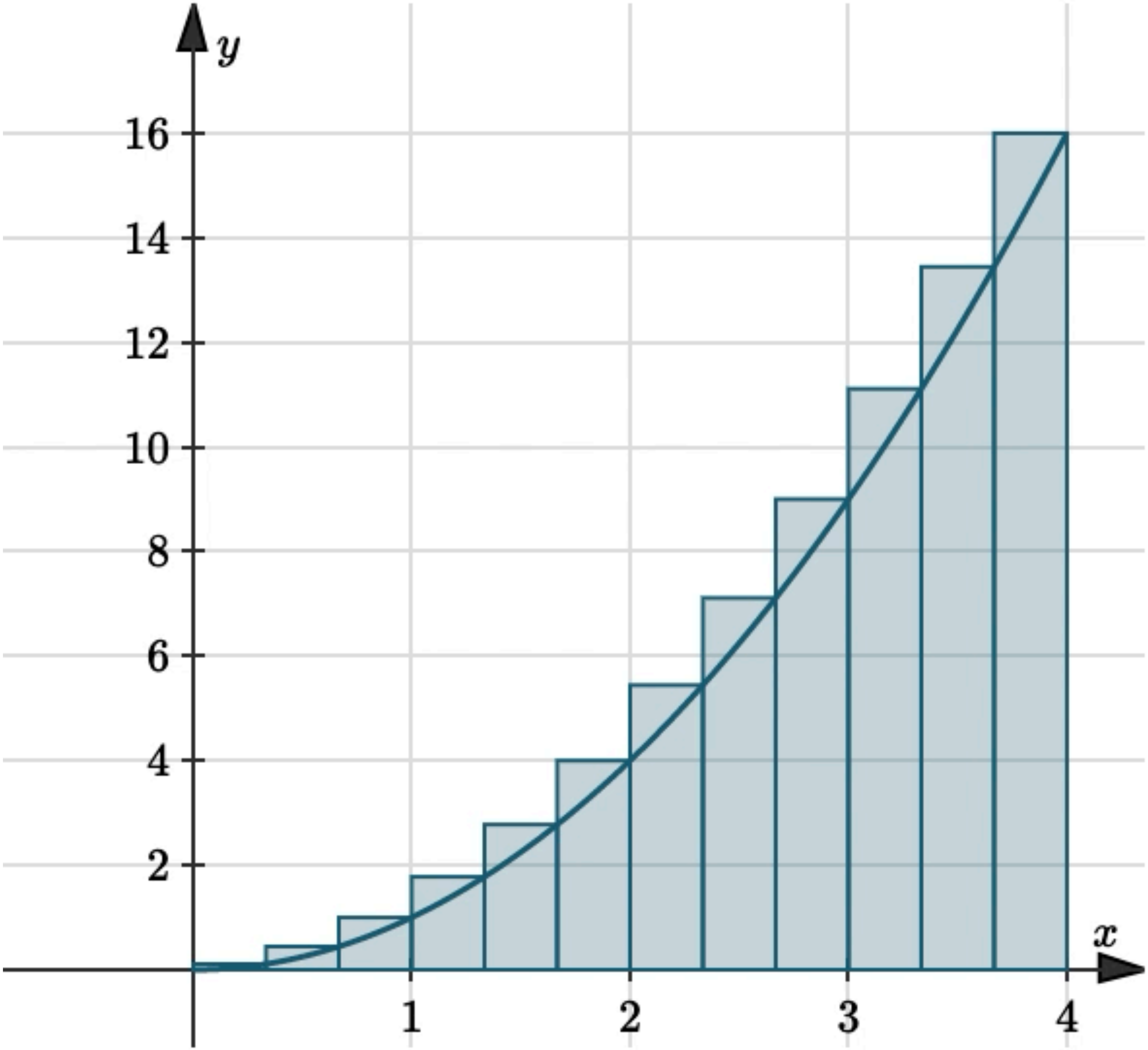


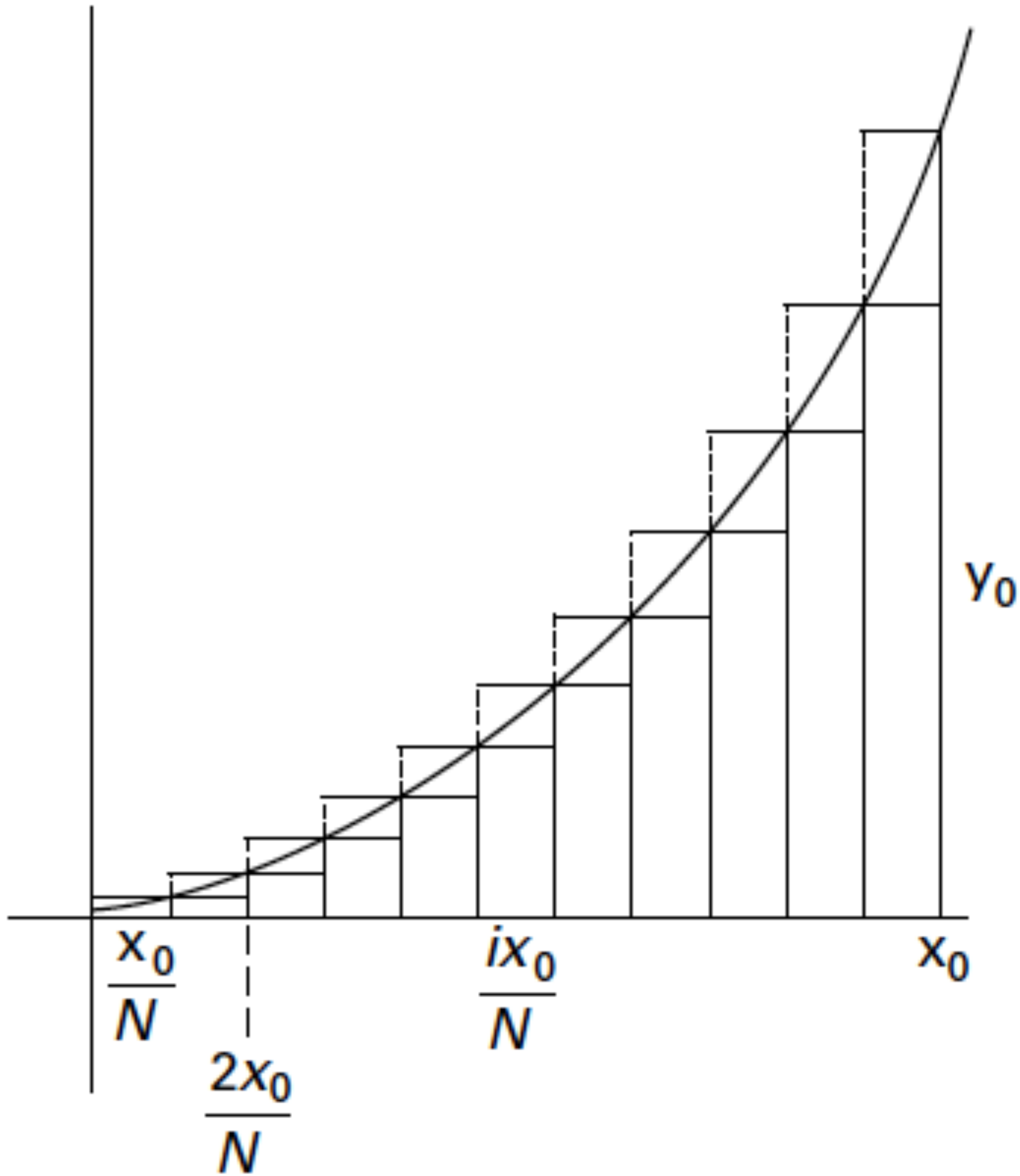
a = 0.1
$y = 1/x$
L
$-\sqrt{2}$

Fermat e áreas

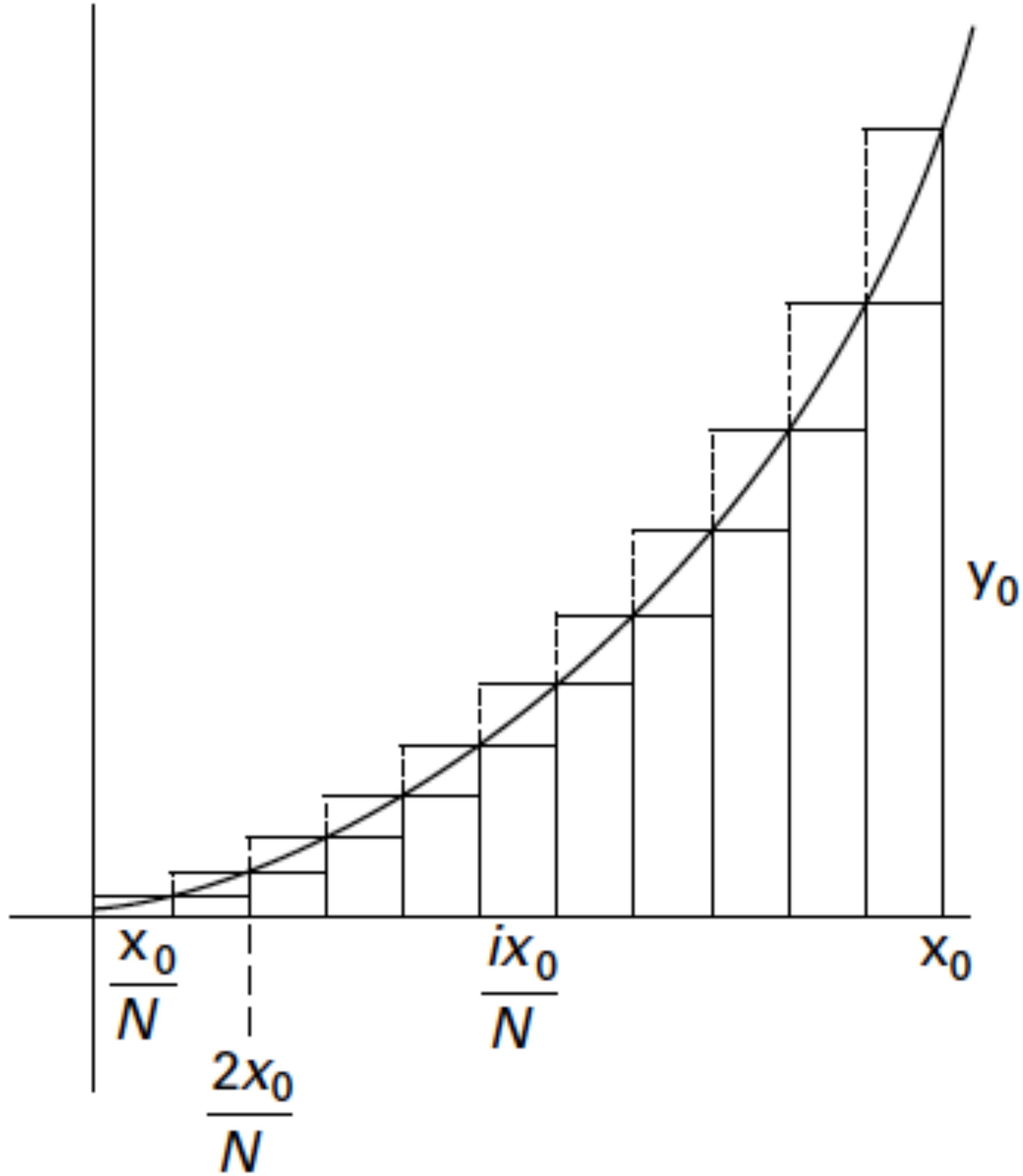
$$f(x) = px^k$$

Área, A, entre a curva e o eixo das abcissas entre a origem e x_0


y
16
14
12
10
8
6
4
2
x
1
2
3
4



y_0
$\frac{x_0}{N}$
$\frac{2x_0}{N}$
$\frac{ix_0}{N}$
x_0



$$\frac{px_0^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N} + \frac{p(2x_0)^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N} + \cdots + \frac{p(Nx_0)^k}{N^k}\,\frac{x_0}{N}$$

$$1 + 2^k + 3^k + \cdots + (N-1)^k < \tfrac{N^{k+1}}{k+1}$$

$$1 + 2^k + 3^k + \cdots + N^k > \tfrac{N^{k+1}}{k+1}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{N-1} i^k < \tfrac{N^{k+1}}{k+1} < \textstyle\sum_{i=1}^{N} i^k$$

$$\frac{px_0^k}{N^k}\frac{x_0}{N} + \frac{p(2x_0)^k}{N^k}\frac{x_0}{N} + \cdots + \frac{p(Nx_0)^k}{N^k}\frac{x_0}{N}$$

$$\frac{px_0^{k+1}}{N^{k+1}}(1 + 2^k + \cdots + N^k)$$

Esta é a soma superior.

A inferior será

$$\frac{px_0^{k+1}}{N^{k+1}}(1 + 2^k + \cdots + (N-1)^k)$$

combinando com

$$\sum_{i=1}^{N-1} i^k < \frac{N^{k+1}}{k+1} < \sum_{i=1}^{N} i^k$$

Obtemos

$$A = \frac{px_0^{k+1}}{k+1}$$

$$\int_0^{x_0} px^k dx = \frac{px_0^{k+1}}{k+1}$$

Caixa 12.1

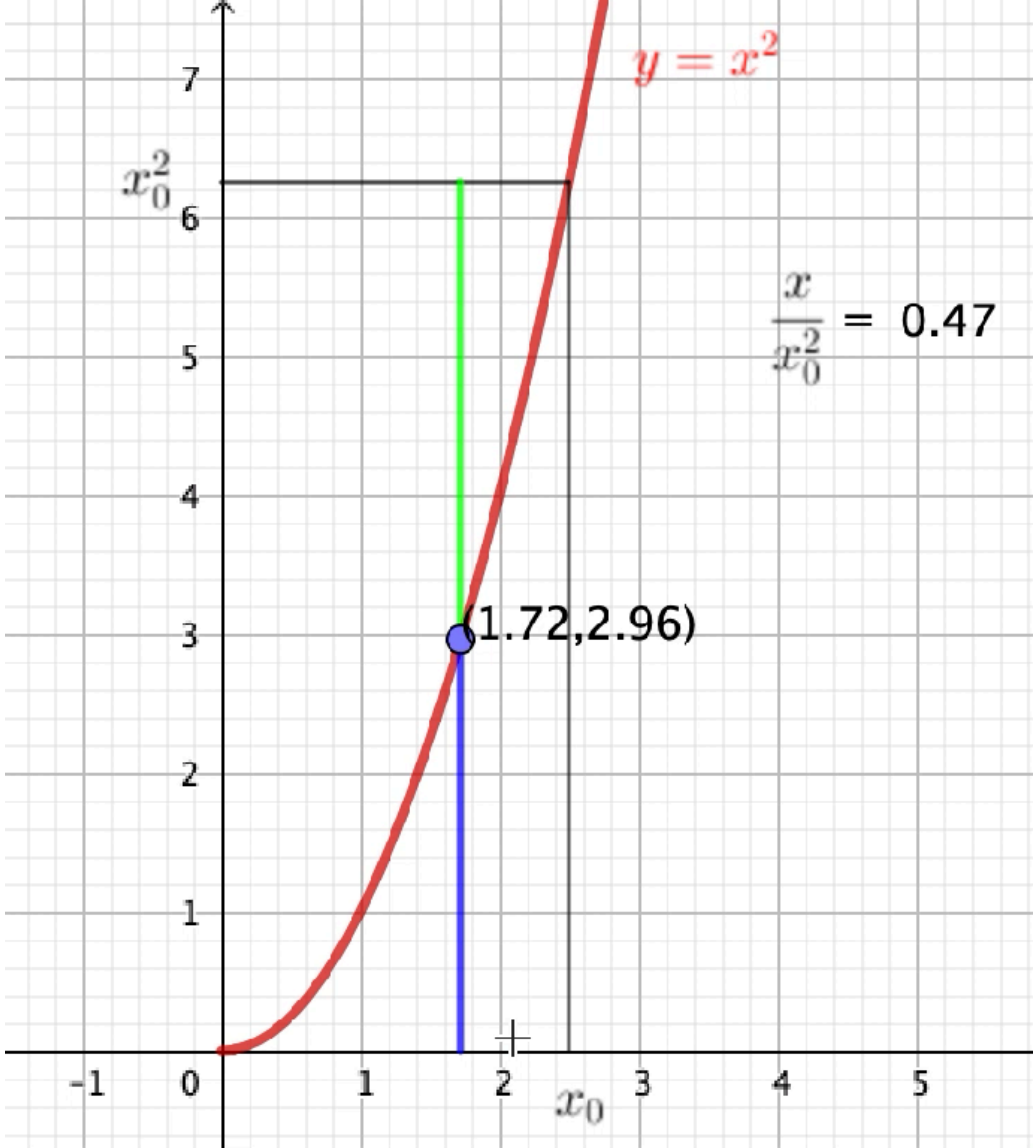
Fermat inventou o Cálculo Infinitesimal?

Por volta de meados dos anos de 1640, Fermat tinha determinado a área sob qualquer curva da forma $y = x^k$ (excepto, claro, $y = x^{-1}$, uma curva para a qual Fermat se apercebeu que o seu método não se aplicava) e também tinha sido capaz de construir a tangente a uma tal curva. Uma vez que tinha resolvido os dois principais problemas do cálculo, pelo menos nestes importantes casos especiais, por que é que não havia de ser considerado o inventor do cálculo? A resposta deve ser que Fermat não se apercebeu da relação inversa entre os dois problemas, em parte porque não compreendeu que as duas operações básicas do cálculo, o que chamamos derivada e integral, determinam cada uma novas funções às quais se pode novamente aplicar estas operações. Um estudante de hoje, vendo que a derivativa de $y = x^k$ era a função $y' = kx^{k-1}$ e também que a área sob $y = x^k$ de 0 a x era a função $\frac{x^{k+1}}{k+1}$ provavelmente reconheceria imediatamente a propriedade inversa. Fermat não o fez, porque não estava a fazer as perguntas que o conduziriam a isso. Para Fermat, a construção de uma tangente significava exactamente isso: descobrir o comprimento da subtangente e depois desenhar a linha a partir do ponto na curva até ao ponto adequado no eixo. Assim, ele não considerou geralmente a inclinação da tangente, a nossa derivada. Ao lidar com $y = x^k$, ele descobriria que a subtangente t igualava x/k mais do que a inclinação da tangente igualava kx^{k-1}. Similarmente, para encontrar uma área sob uma curva significava para Fermat encontrar um rectângulo adequado igual em área à região curvilínea determinada. Noutras palavras, a área sob $y = x^k$ de 0 até x_0 igualava a área do rectângulo cuja largura fosse x_0 e cuja altura fosse $\frac{1}{k+1} y_0$. Ele nunca considerou a área a partir de uma coordenada fixa para uma variável como determinando uma função, exprimível como uma nova curva. Assim, embora Fermat tenha sido capaz de resolver os dois problemas básicos do cálculo em muitos exemplos, não fez as perguntas "certas". Foram outros que conseguiram ver o que Fermat não viu.

Biografia

John Wallis (1616-1703)

Embora John Wallis tenha estudado matemática nos seus dias de universidade em Cambridge, muita da sua juventude foi passada a preparar-se para uma carreira eclesiástica. Não obstante, o seu interesse por várias questões científicas levou-o a envolver-se nas primeiras reuniões informais, nos anos de 1640 em Londres, daquele grupo de homens que formaram a Royal Society em 1662. Estas reuniões semanais eram dedicadas à discussão de "Problemas Filosóficos", incluindo assuntos de anatomia, geometria, astronomia, e mecânica, que estavam, na altura, a ser alvo de investigações detalhadas em Inglaterra bem como no continente. O primeiro interesse de Wallis pela matemática foi reavivado em 1647 e, dois anos mais tarde, ele foi nomeado para a vaga na Cátedra Savilian de matemática em Oxford devido ao seu detentor se encontrar do lado errado na Guerra Civil Inglesa. Foi em Oxford que Wallis escreveu as suas obras matemáticas, que incluíam, para além da *Arithmetica infinitorum*, tratados de álgebra, secções cónicas, e mecânica.



$y = x^2$
x_0^2
$\frac{x}{x_0^2} = 0.47$
(1.72,2.96)
x_0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Wallis procurava a razão entre o comprimento do segmento vertical do eixo das abcissas a um ponto da curva e a altura do rectângulo envolvente.

Para depois somar "muitas" dessas linhas...

Assim, foi conduzido a expressões do género

$$\frac{0^2}{n^2} + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}$$

isto é,

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2}$$

tentou vários casos

$$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{14}{36} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$$

e, em geral,

$$\frac{0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2+n^2+n^2+\cdots+n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Wallis viu que, se o número de linhas fosse infinito, e preenchesse a área totalmente, a soma seria 1/3.

Intuiu a generalização para outros expoentes inteiros positivos

$$\frac{0^k+1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k+n^k+n^k+\cdots+n^k} = \frac{1}{k+1}$$

(n infinito)

Considerou ainda expoentes fraccionários. Em notação moderna, determinou o valor

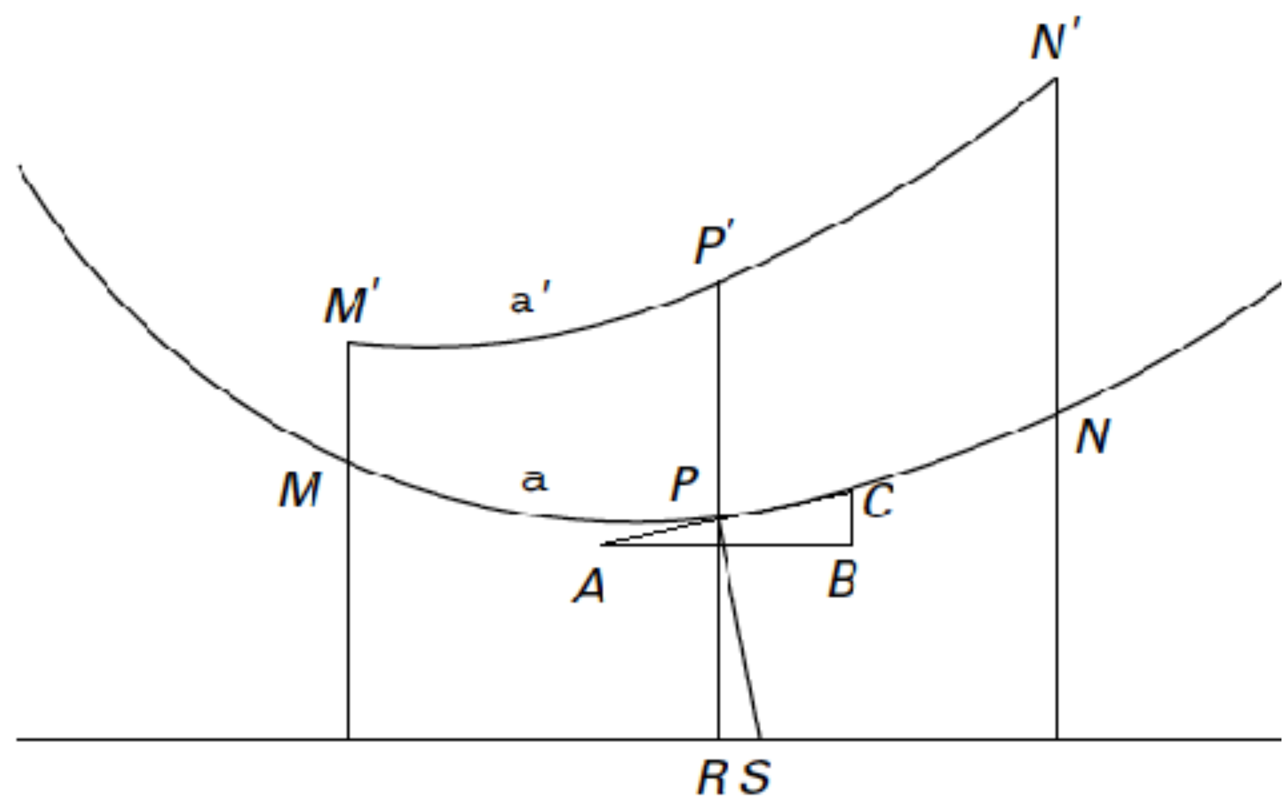
$$\int_0^1 x^{p/q} dx = \frac{1}{p/q+1}$$

Biografia

Hendrick van Heuraet (1634-1660)

Van Heuraet nasceu em Haarlem na Holanda e foi para Leiden estudar matemática com van Schooten em 1653.[27] A herança que recebeu do seu pai, mercador de tecidos, aquando da morte deste, deixou-o bastante desafogado, por isso pôde permitir-se estudar e viajar sem se preocupar com o seu sustento. O seu primeiro trabalho matemático anunciava uma promessa tal que van Schooten publicou não só o seu tratado sobre rectificação como também a sua obra sobre pontos de inflexão. Tanto quanto se sabe, contudo, van Heuraet morreu novo. Não há qualquer registo conhecido das suas actividades após os princípios de 1660.

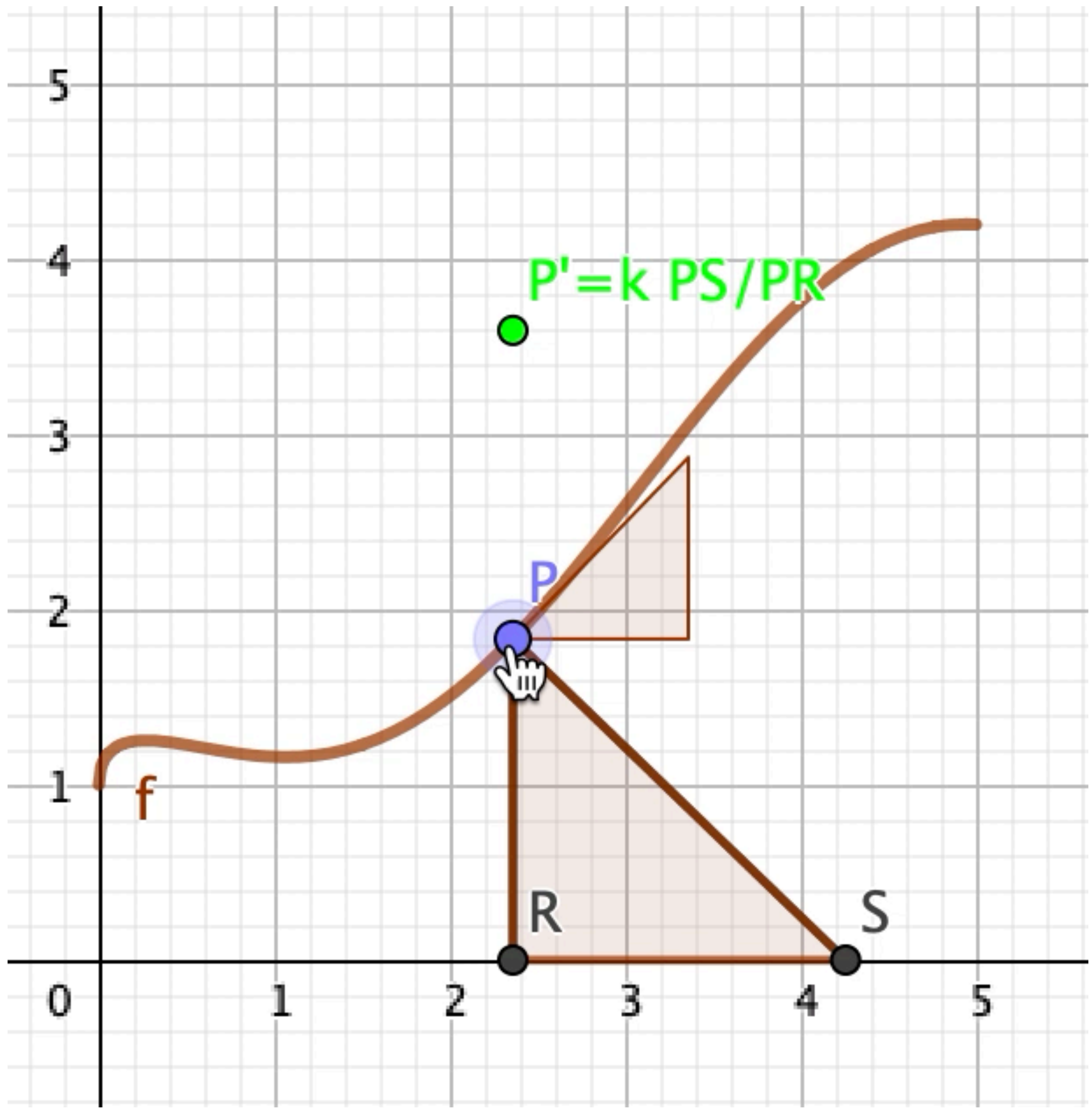
Dada a curva a.



$P'R = PS/PR$ define nova curva, a'

$PS/PR = AC/AB$ $\quad$ $P'R = ds/dx$ ou $ds = P'Rdx$

Como a soma dos elementos tangentes ds dá o comprimento de arco entre M e N, obtém-se uma expressão em termos de área sob a curva a', entre M' e N'



P'=k PS/PR
P
R
S
f
0
1
2
3
4
5

Em notação moderna, se as abcissas de *M* e *N* são *c* e *d*, respectivamente:

$$\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Comprimento linear como área!

Biografia

Isaac Barrow (1630-1677)

Barrow ingressou no Trinity College, em Cambridge, em 1643, recebendo a sua licenciatura em 1648 e o seu mestrado em 1652. Como tinha simpatias realistas, foi expulso da universidade em 1655 e impedido de assumir uma cátedra. Aproveitou a oportunidade para percorrer o Continente durante quatro anos e aprendeu matemática em França, Itália e Holanda. Regressou a Cambridge a tempo da Restauração, fez votos sagrados, e tornou-se o professor Regius de Grego. Em 1662, aceitou concorrentemente a cátedra Gresham de geometria em Londres e, no ano seguinte, tornou-se no primeiro Professor lucasiano de matemática em Cambridge. Após apresentar vários cursos de conferências nos anos que se seguiram, sobre matemática elementar, geometria, e óptica, demitiu-se da sua posição em 1669 para se tornar o capelão real em Londres. Em 1673, regressou ao Trinity College como mestre e dois anos foi nomeado vice-chanceler da Universidade, mas morreu em 1677, provavelmente devido a uma dose excessiva de drogas.

Em notação moderna, Barrow provou os resultados (conhecidos pelo seu nome):

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x)$$

$$\int_c^d f'(t)\,dt = f(d) - f(c)$$

Caixa 12.2

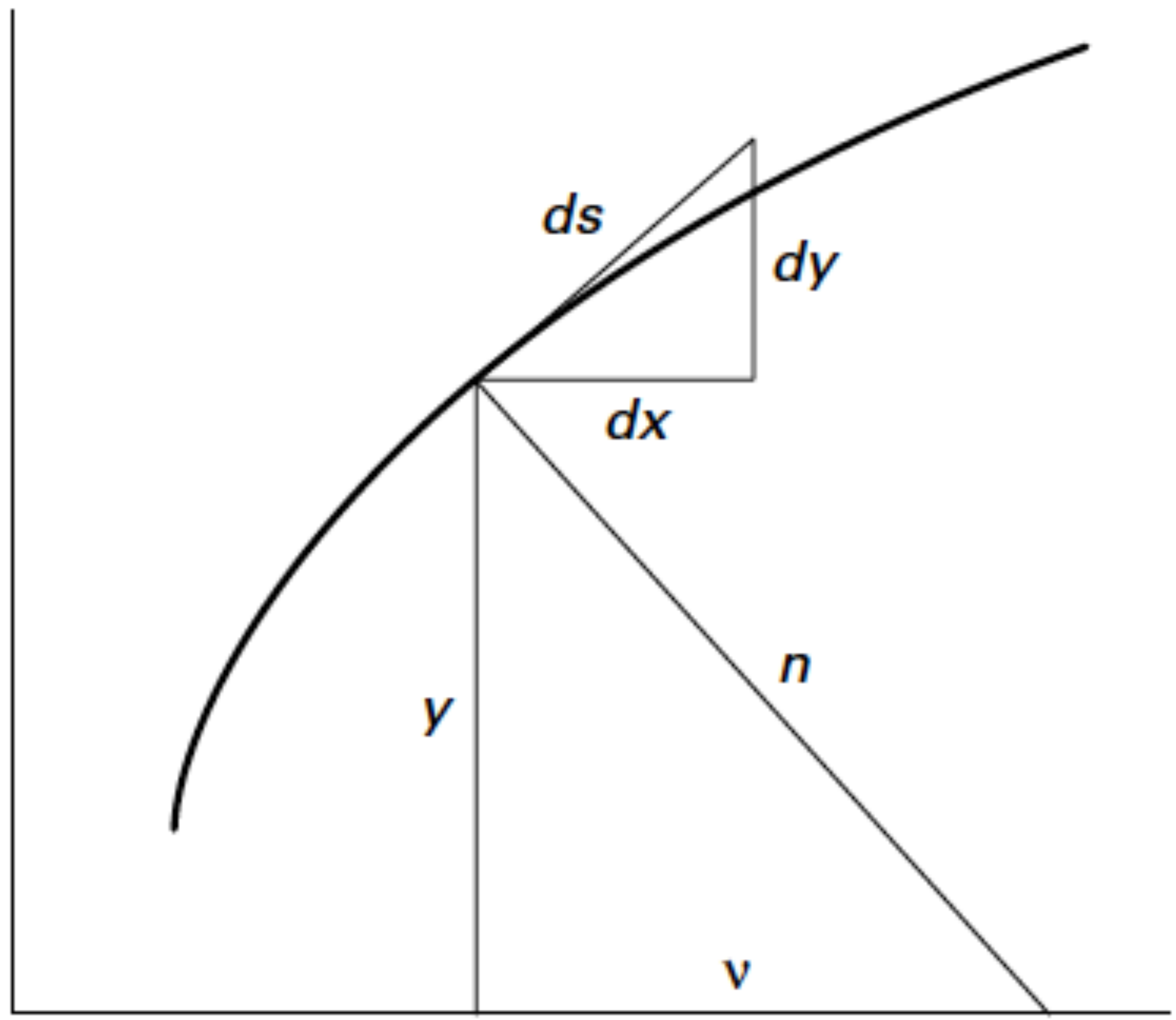
Barrow inventou o Cálculo?

Dado que Barrow conhecia os procedimentos algébricos para calcular tangentes e áreas e estava também consciente do teorema fundamental, deverá ele ser considerado como um dos inventores do cálculo? A resposta tem de ser não. Barrow apresentou toda a sua obra numa forma de geometria clássica. Não parece que ele estivesse consciente da natureza fundamental dos dois teoremas apresentados no texto. Barrow não refere que eles sejam particularmente importantes. São apresentados como dois entre muitos resultados geométricos lidando com tangentes e áreas. E Barrow nunca os utiliza para calcular áreas. Talvez se Newton não tivesse aparecido, Barrow tivesse visto os usos que podiam ser dados a estes teoremas. Mas como ele percebeu que as capacidades de Newton ultrapassavam as suas, e estava mais preocupado em perseguir interesses teológicos, Barrow abandonou o estudo da matemática ao seu colega mais jovem e deixou-lhe a invenção do cálculo.

Biografia

James Gregory (1638-1675)

Depois de estudar no Marischal College em Aberdeen, Gregory deixou a Escócia, em 1663, e passou os cinco anos seguintes no estrangeiro, estudando em Itália com o aluno de Torricelli, Stefano degli Angeli, em Pádua. Foi aí que escreveu as suas duas primeiras obras matemáticas. Em 1668, regressou para a cátedra de matemática em St. Andrews, onde passou a maior parte da sua vida a ensinar matemática elementar. A sua correspondência com John Collins em Londres era o seu único contacto com o resto do mundo matemático. Em 1673, foi obrigado a abandonar St. Andrews devido a problemas políticos, mas pouco tempo depois pôde assumir uma cátedra em Edimburgo. Infelizmente, ficou cego devido a uma trombose em Outubro de 1675, e morreu pouco tempo depois.



O triângulo diferencial de Gregory.

Note-se a semelhança entre os triângulos da figura.

Gregory obteve, como Heuret, que o comprimento de arco é dado como a área sob uma curva:

$$\int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Mas perguntou-se também se seria possível encontrar uma função cujo comprimento de arco estivesse numa relação simples com a área sob a curva definida por uma função conhecida. Isto é, dada *y* e a constante *c*, determinar *u* tal que

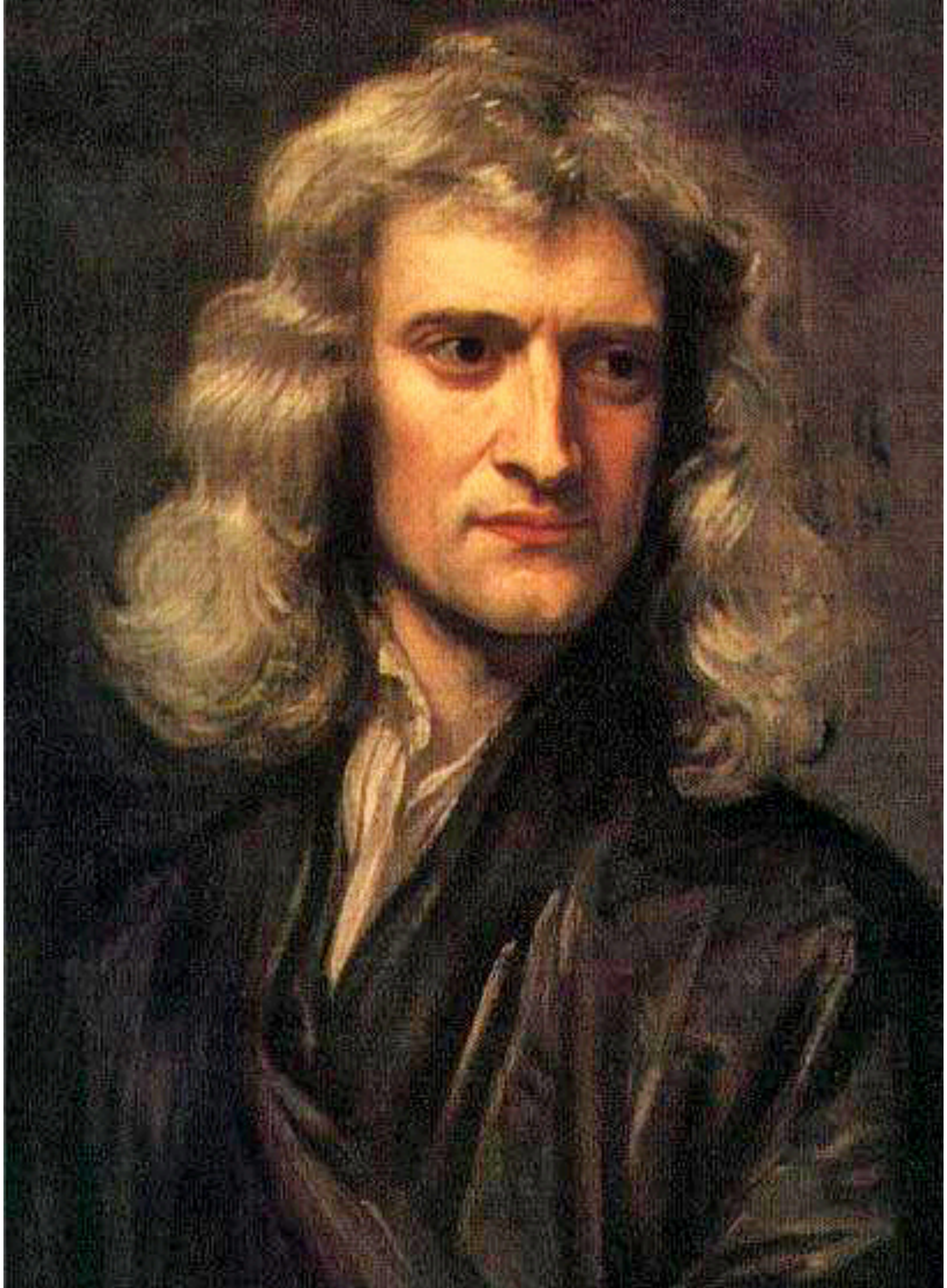
$$c\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{du}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^x y(t)\,dt$$

Esta questão equivale a procurar uma função a partir do declive da sua tangente.

Gregory resolveu: $\frac{1}{c}\int_0^x \sqrt{y^2-c^2}\,dt = u(x)$

O avanço crucial de Gregory, então, foi abstrair a ideia de área sob uma curva específica entre dois valores x determinados para a ideia de área como uma função de uma variável. Noutras palavras, ele construiu uma nova curva cuja ordenada em qualquer valor x era igual à área sob a curva original a partir de um ponto fixo até x. Uma vez concebida esta ideia, percebeu-se que não era difícil construir a tangente desta nova curva e mostrar que a sua inclinação em x era sempre igual à ordenada original no mesmo ponto.

Cálculo infinitesimal - II



PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

THE

METHOD of FLUXIONS

AND

INFINITE SERIES;

WITH ITS

Application to the Geometry of CURVE-LINES.

By the INVENTOR

Sir ISAAC NEWTON, K$^{t.}$

Late Prefident of the Royal Society.

Tranflated from the AUTHOR's LATIN ORIGINAL *not yet made publick.*

To which is fubjoin'd,

A PERPETUAL COMMENT upon the whole Work,

Confifting of

ANNOTATIONS, ILLUSTRATIONS, and SUPPLEMENTS,

In order to make this Treatife

A compleat Inftitution for the ufe of LEARNERS.

By *JOHN COLSON*, M.A. and F.R.S.
Mafter of Sir *Jofeph Williamfon*'s free Mathematical-School at *Rochefter*.

LONDON:
Printed by HENRY WOODFALL;
And Sold by JOHN NOURSE, at the *Lamb* without *Temple-Bar*.
M.DCC.XXXVI.

Biografia

Isaac Newton (1642-1727)

Newton (Fig. 12.21) nasceu a 25 de Dezembro de 1642, em Woolsthorpe, perto de Grantham, umas cem milhas a norte de Londres, filho de uma mãe que enviuvara já em Outubro. Quando tinha três anos, a sua mãe voltou a casar e deixou o jovem Isaac ao cuidado da sua avó até regressar a Woolsthorpe em 1653 quando da morte do seu segundo marido. Em 1655, Newton foi enviado para Grantham para frequentar a escola local. Foi aí que dominou o latim, a principal disciplina do currículo escolar clássico, e foi introduzido ao estudo da matemática pelo invulgar mestre-escola Henry Stokes. Não só Newton aprendeu aritmética básica, mas também estudou tópicos tão avançados como trigonometria plana e construções geométricas, colocando-o assim bem à frente dos seus colegas por altura da sua matrícula no Trinity College, em Cambridge, em 1661.

A matemática, contudo, não fazia geralmente parte do plano de estudos em Cambridge, mesmo depois da nomeação de Barrow como professor lucasiano de matemática em 1663. Na verdade, a universidade tinha poucas exigências. Se uma pessoa ficasse na residência durante quatro anos e pagasse as propinas, recebia um grau de bacharel. Por outro lado, como em 1663 Newton começou a explorar por sua conta a matemática à qual tinha sido apresentado na escola, era-lhe vantajoso que a universidade não se importasse verdadeiramente com o que ele estudava. Dominou Euclides de forma a poder entender a trigonometria, depois o *Clavis Mathematicae* (*Chave da Matemática*) de William Oughtred (1574-1660), um livro popular contendo o essencial da aritmética e álgebra, depois a *Geometria* de Descartes na edição em latim de van Schooten juntamente com as centenas de páginas de comentários, as obras coligidas de Viète, e finalmente a *Arithmetica Infinitorum* de Wallis. Como Isaac Barrow estava a dar a sua primeira série de conferências lucasianas sobre os fundamentos da matemática em 1664, com toda a probabilidade o matemático mais velho encorajou o mais jovem, talvez até emprestando-lhe alguns livros da sua própria colecção. Para se dedicar totalmente à investigação, contudo, Newton precisava da segurança do apoio financeiro da universidade. Este foi assegurado através de bolsas em 1664 e 1667, e a nomeação como professor lucasiano em 1669, tudo isto provavelmente através da influência de Barrow.

Aparentemente uma das razões centrais para o sucesso de Newton no seu desenvolvimento não só do cálculo mas também dos princípios básicos da óptica e da mecânica foi a sua intensa facilidade de concentração. Como John Maynard Keynes escreveu, "Acredito que a pista para a sua mente se encontra na sua capacidade invulgar de introspecção concentrada contínua… O seu dom peculiar era a capacidade de manter na sua mente um problema puramente mental até conseguir ver directamente através dele… Acredito que Newton podia manter um problema na sua mente durante horas e dias e semanas até este se render e lhe desvendar o seu segredo"[32]. As capacidades de concentração de Newton são exemplificadas por muitas histórias contadas acerca dele, semelhantes a histórias acerca de Arquimedes. Por exemplo, "quando recebia amigos nos seus aposentos, se fosse até ao estúdio para ir buscar uma garrafa de vinho, e um pensamento lhe viesse à cabeça, sentava-se em frente a uma folha de papel e esquecia os amigos"[33]. De facto, "pensando que as horas não gastas nos seus estudos eram todas horas perdidas, … raramente abandonava os seus aposentos, a não ser nos encerramentos de períodos, quando ensinava nas escolas, visto ser professor lucasiano". Mas quando conferenciava, "tão poucos o iam ouvir, e ainda menos o entendiam, que muitas vezes ele de certa forma, por falta de ouvintes, lia para as paredes"[34]. Talvez Newton não fosse um sucesso como professor, mas como a figura central da Revolução Científica, as suas obras continuam a exercer a sua influência sobre as nossas vidas.

Newton e Leibniz criaram conceitos gerais (Newton a fluxão e o fluente, Leibniz o diferencial e o integral), relacionados com tangentes e áreas. Compreenderam a relação inversa presente e aplicaram estes conceitos na resolução de problemas difíceis da matemática.

Um Tratado sobre os Métodos de Séries e Fluxões, de 1671

Inspirou-se nas dízimas da representação decimal para a sua teoria das séries.

Uma vez que as operações de computação com números e com variáveis são muito similares… eu fico espantado que não tenha ocorrido a ninguém (se excluirmos N. Mercator com a sua quadratura da hipérbole) adaptar a doutrina recentemente estabelecida para números decimais de maneira similar às variáveis, especialmente uma vez que o caminho fica então aberto para consequências mais notáveis.

O habitual algoritmo da raíz quadrada dá, para $\sqrt{1+x^2}$

$$1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \cdots$$

Newton resolvia equações por métodos semelhantes. Vejamos um exemplo seu.

$$y^3 - 2y - 5 = 0$$

Newton toma *y=2* como primeira aproximação a uma raíz. Fazendo então *y=2+p*, onde *p* é pequeno.

Substituindo, vem $$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

Agora, o facto de *p* ser pequeno permite-nos desprezar os termos de maior grau...

$$10p - 1 = 0$$

$$p = 0.1$$

Logo, $y=2.1$ é uma aproximação melhorada.

O próximo passo consiste em fazer $p=0.1+q$ em

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

obtendo, após desprezar os termos quadráticos e cúbicos em q:

$$q=-0.0054$$

o que dá um novo valor para $y=2.0946$

E assim sucessivamente.

Newton alargou este método numérico às equações algébricas mais gerais. Por exemplo, para resolver em ordem a *y* a equação

$$y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$$

Newton obtém

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16\,384a^3} \cdots$$

Binómio

Newton inspirou-se na determinação da área do círculo à Wallis:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Mas, em vez de considerar os seus integrais como áreas sob uma curva particular, considerou-os como funções do extremo de integração.

$$\int_0^x (1-t^2)^0 dt = x$$

$$\int_0^x (1-t^2)^1 dt = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^x (1-t^2)^2 dt = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_0^x (1-t^2)^3 dt = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$\int_0^x (1-t^2)^4 dt = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

Newton concentrou-se no padrão dos coeficientes das potências de x, à direita.

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\ldots$	
1	1	1	1	1	$\ldots$	x
0	1	2	3	4	$\ldots$	$-\frac{x^3}{3}$
0	0	1	3	6	$\ldots$	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	$\ldots$	$-\frac{x^7}{7}$
0	0	0	0	1	$\ldots$	$\frac{x^9}{9}$

Newton percebeu que estava aqui o Triângulo de Pascal

$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$\dots$	
1	1	1	1	1	$\dots$	x
0	1	2	3	4	$\dots$	$-\frac{x^3}{3}$
0	0	1	3	6	$\dots$	$\frac{x^5}{5}$
0	0	0	1	4	$\dots$	$-\frac{x^7}{7}$
0	0	0	0	1	$\dots$	$\frac{x^9}{9}$

Redescobriu a fórmula dos coeficientes binomiais de Pascal

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

válida para *n* inteiro positivo

Como queria expoentes não inteiros, Newton interpolou e generalizou a fórmula de Pascal (que assim perde a sua interpretação combinatória)

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2} = -\frac{1}{8},$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6} = \frac{1}{16}, \ldots .$$

Para além de n = 1/2, Newton considerou outros valores

$n=-1$	$n=-\frac{1}{2}$	$n=0$	$n=\frac{1}{2}$	$n=1$	$n=\frac{3}{2}$	$n=2$	$n=\frac{5}{2}$	$\ldots$	
1	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$	x
-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\ldots$	$-\frac{x^3}{3}$
1	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	$\ldots$	$\frac{x^5}{5}$
-1	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{3}{48}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	$\ldots$	$-\frac{x^7}{7}$
1	$\frac{35}{128}$	0	$-\frac{15}{384}$	0	$\frac{3}{128}$	0	$-\frac{5}{128}$	$\ldots$	$\frac{x^9}{9}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

E acabou por obter generalidade para o desenvolvimento do binómio

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k} \\
&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^{2} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}
$$

Fluxões

As séries eram de importância fundamental para o cálculo de Newton. Ele utilizava-as para lidar com qualquer relação algébrica ou transcendente não exprimível como um polinómio numa variável.

A **fluxão** $\dot{x}$ de uma quantidade x dependente do tempo (chamada **fluente**) era a velocidade com a qual x aumentava através do seu movimento gerador.

As suas duas grandes questões:

1. Dado o espaço (em todos os instantes), determinar a velocidade;
2. Dada a velocidade (em todos os instantes), determinar o espaço percorrido.

Newton resolveu o problema 1 através de um algoritmo perfeitamente claro que determinava a relação das fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ de dois fluentes x e y relacionados através de uma equação da forma $f(x, y) = 0$: "Componha-se a equação pela qual a relação dada é expressa de acordo com as dimensões de uma qualquer quantidade fluente, digamos x, e multiplique-se os seus termos por qualquer progressão aritmética e depois por $\frac{\dot{x}}{x}$. Leve-se a cabo esta operação separadamente para cada uma das quantidades fluentes e depois coloque-se a soma de todos os produtos igual a nada, e tem-se a equação desejada"[41]. Como exemplo,

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

Usando a progressão aritmética 3, 2, 1, 0, obteve, primeiro (considerando polinómio em *x*)

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$$

Usando a mesma progressão, obteve depois (considerando polinómio em *y*)

$$ax\dot{y} - 3y^2\dot{y}$$

Somando e igualando a nada:

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Donde, por exemplo $\quad \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$

Nota: Newton não parte de uma função, mas sim de uma equação da forma *f(x,y)=0* em que ambos *x* e *y* são funções do tempo *t*.

E o que obtém é a equação diferencial satisfeita pela curva correspondente à equação dada:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0.$$

Newton apresenta uma justificação para a sua regra, com efeito, através de infinitesimais. Ele define primeiro o **momento** de uma quantidade fluente como sendo o montante pelo qual ela aumenta num período de tempo "infinitamente pequeno". Assim, o aumento de x num tempo infinitesimal o é o produto da velocidade de x por o, ou $\dot{x}o$. Segue-se que após este intervalo de tempo, x tornar-se-á $x + \dot{x}o$ e similarmente y tornar-se-á $y + \dot{y}o$. "Consequentemente, uma equação que expresse a relação de quantidades fluentes sem variação em todos os momentos expressará essa relação igualmente entre $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ como entre x e y; e portanto $x + \dot{x}o$ e $y + \dot{y}o$ podem ser substituídas no lugar das últimas quantidades, x e y, na dita equação."

Newton continua mostrando como o método se aplica ao exemplo $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ dado anteriormente. Substituindo $x + \dot{x}o$ por x e $y + \dot{y}o$ por y, a nova equação torna-se

$$\left(x^3 + 3x^2\dot{x}o + 3x\dot{x}^2o^2 + \dot{x}^3o^3\right) - \left(ax^2 + 2ax\dot{x}o + a\dot{x}^2o^2\right) + \left(axy + ay\dot{x}o + ax\dot{y}o + a\dot{x}\dot{y}o^2\right) - \left(y^3 + 3y^2\dot{y}o + 3y\dot{y}^2o^2 + \dot{y}^3o^3\right) = 0.$$

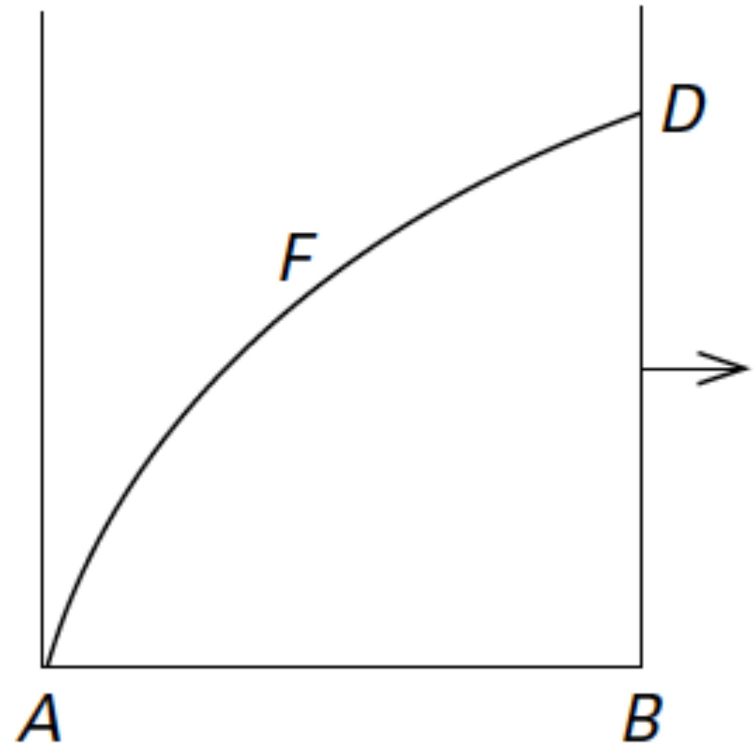
"Agora por hipótese $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, e quando estes termos são apagados e o resto dividido por o restará

$$3x^2\dot{x} + 3x\dot{x}^2o + \dot{x}^3o^2 - 2ax\dot{x} - a\dot{x}^2o + ay\dot{x} + ax\dot{y} + a\dot{x}\dot{y}o - 3y^2\dot{y} - 3y\dot{y}^2o - \dot{y}^3o^2 = 0.$$

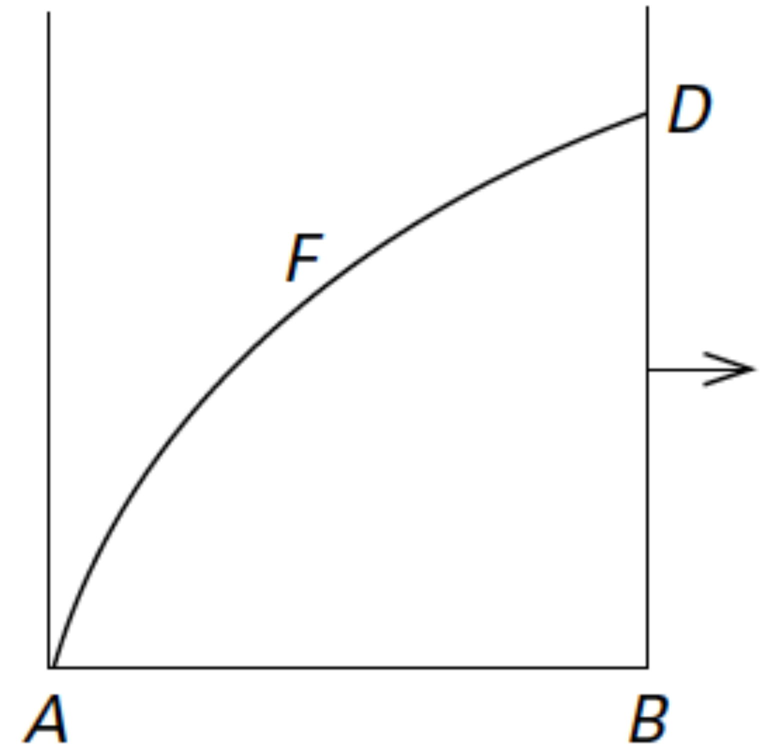
Mas para além disso, uma vez que *o* é pressuposto como sendo infinitamente pequeno de forma que [será] capaz de exprimir os momentos de quantidades, termos que o têm como um factor serão equivalentes a nada em relação aos outros. Consequentemente eu excluo-os e resta $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$, como… acima."

Cumprido o cálculo de fluxões, Newton utiliza-as para resolver vários problemas. O máximo e o mínimo são encontrados igualando a fluxão relevante a zero. Pois "quando uma quantidade é a maior ou a menor, nesse momento o seu fluxo nem aumenta nem diminui; pois se aumenta, isso prova que era menor e que imediatamente será maior do que é agora, e reciprocamente se diminui" Mais uma vez ele utiliza a equação $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ como exemplo para determinar o maior valor de x. Estabelecendo $\dot{x} = 0$ na equação envolvendo as fluxões, ele obtém $-3y^2\dot{y} + ax\dot{y} = 0$ ou $3y^2 = ax$. Esta equação deve, então, ser resolvida simultaneamente com a original para encontrar o valor desejado para x. Similarmente, para descobrir o valor máximo de y, estabelece-se $\dot{y} = 0$ e utiliza-se a equação resultante $3x^2 - 2ax + ay = 0$.

A ideia central de Newton para desenhar tangentes é utilizar o triângulo diferencial de Barrow. Assim, se x muda para $x + \dot{x}o$ enquanto y muda para $y + \dot{y}o$, então o *ratio* $\dot{y}o : \dot{x}o = \dot{y} : \dot{x}$ dos lados deste triângulo é a inclinação da linha de tangente, pensada como a direcção de movimento instantâneo da partícula descrevendo a curva. Este *ratio* é por sua vez igual ao da ordenada y para a subtangente t. uma vez que desenhar a tangente significa descobrir a subtangente, Newton nota simplesmente que $t = y(\dot{x}/\dot{y})$. Como uma ligeira simplificação neste cálculo e outros, Newton estabelece por vezes $\dot{x} = 1$. Isto é equivalente a considerar x como fluindo uniformemente, ou como representando ele próprio o tempo.



O problema 2 do *Tratado sobre Métodos* pede que se encontre a distância, dada a velocidade. Newton percebeu muito cedo nas suas investigações que este problema é equivalente a descobrir a área sob uma curva a partir da sua equação. Da sua leitura de Wallis, também sabia como encontrar a área para curvas cujas equações fossem somas finitas de termos da forma ax^n ($n \neq -1$) e desenvolveu esta ideia base para somas infinitas, ou séries de potências. Contudo, Newton também descobriu e utilizou o teorema fundamental do cálculo para resolver problemas de área. Para ele, este teorema era virtualmente auto-evidente. Como ele pensava a curva *AFD* como sendo gerada pelos movimentos de x e y,

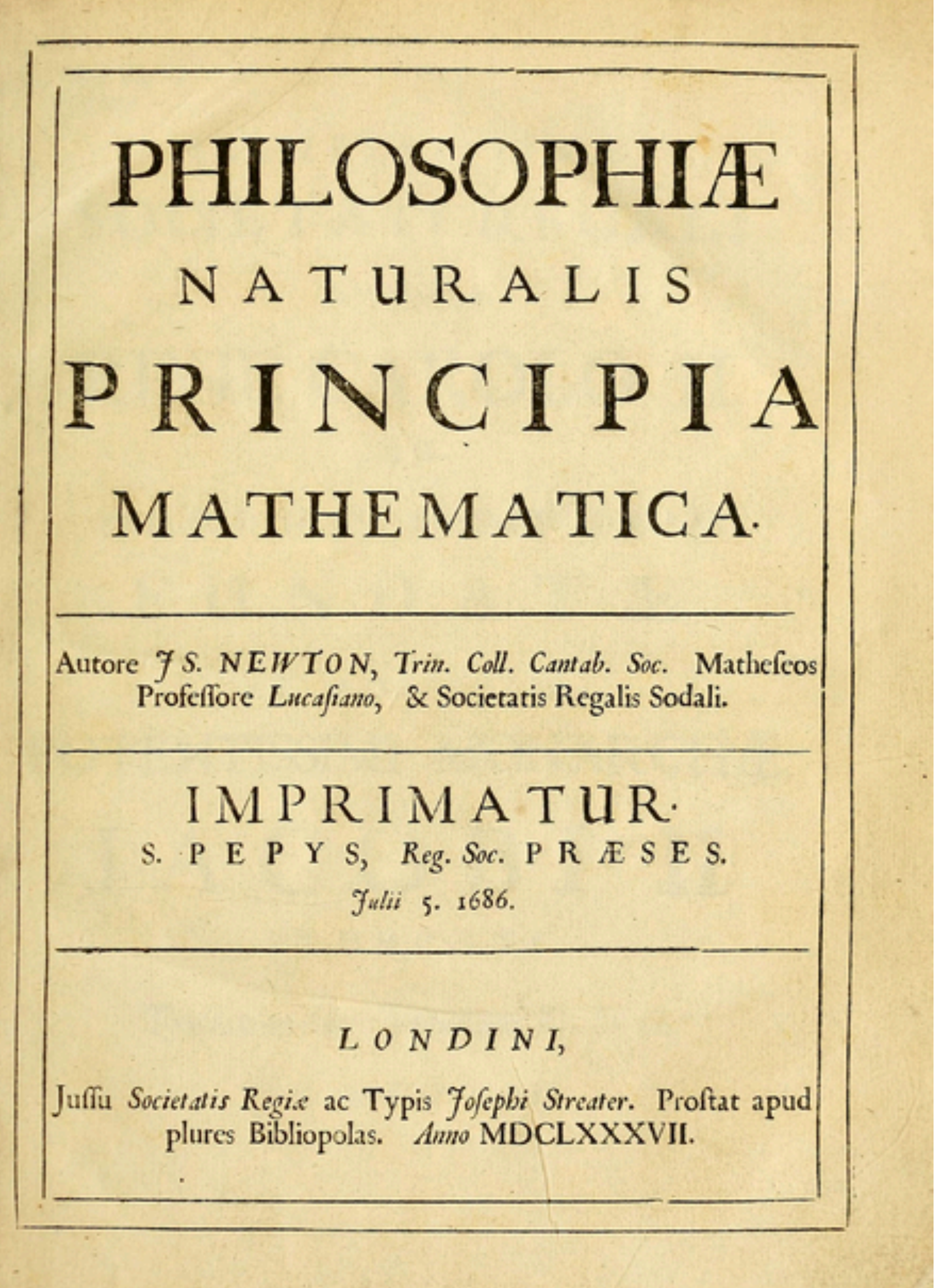


seguia-se que a área *AFDB* era gerada pelo movimento da ordenada em movimento *BD* (Fig. 12.24). Era, portanto, óbvio que a fluxão da área era na verdade a ordenada multiplicada pela fluxão de *BD*. Isto é, se z representa a área sob a curva, então $\dot{z} = y\dot{x}$, or $\dot{z}/\dot{x} = y$. Esta equação traduz-se imediatamente em parte do teorema fundamental moderno, que se $A(x)$ representa a área sob $y = f(x)$ de 0 a x, então $dA/dx = f(x)$.

Newton calcularia este limite em poucos minutos. Quanto tempo demoram vocês?...

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x)-\tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x)-\arctan(\arcsin x)}$$

Muito fica por dizer sobre Newton, claro...



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Mathefeos Profeffore *Lucafiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juffu *Societatis Regiæ* ac Typis *Jofephi Streater*. Proftat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

A grande obra de Newton.
O Calculo Infinitesimal
não se expandiu muito para
fora da ilha.
Por falta de publicações,
pela sua dificuldade, ...

Biografia

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

O segundo inventor do cálculo, Gottfried Wilhelm Leibniz (Fig. 12.30), nasceu em Leipzig da terceira mulher do vice-reitor da Faculdade de Filosofia da Universidade de Leipzig. Embora o seu pai tenha morrido tinha ele apenas 6 anos, o jovem Leibniz estava já inculcado de um desejo de ler e estudar. Durante a sua adolescência aprendeu sozinho latim e sulcou os clássicos latinos tanto os trabalhos filosóficos como teológicos, na enorme biblioteca do seu pai. Em 1661, entrou para a universidade de Leipzig onde passou a maior parte do tempo a estudar filosofia. Obteve o grau de bacharel em 1663 e mestre em 1664 mas, embora tenha preparado uma dissertação para o grau de Doutor em Direito, a universidade recusou dar-lho, provavelmente devido a alguns problemas políticos na faculdade. Então Leibniz abandonou Leipzig e obteve o seu diploma, em 1667, na Universidade de Altdorf, em Nuremberga.

Entretanto, Leibniz fez a sua introdução nas matemáticas avançadas durante a sua estadia na Universidade de Jena, em 1663, e começou por organizar os pormenores daquilo que esperava poder ser a sua mais importante contribuição para a filosofia, o desenvolvimento de um alfabeto do pensamento humano, representando todos os conceitos fundamentais simbolicamente e um método de combinação desses símbolos para representar os pensamentos mais complexos. Embora Leibniz nunca tenha terminado o seu projecto, as ideias iniciais estão contidas nas suas *Dissertatio de arte combinatoria (Dissertação da arte combinatória)*, de 1666, em que deduziu tanto o triângulo aritmético de Pascal como as várias relações entre as quantidades nele contidas. Contudo, este interesse por encontrar símbolos apropriados para representar pensamentos e maneiras de os combinar, conduziu-o finalmente à invenção dos símbolos para o cálculo que usamos hoje.

Pouco depois de Leibniz ter terminado os seus estudos universitários, entrou primeiro para a carreira de diplomacia como Eleitor de Mainz e, bastante mais tarde, como Conselheiro do Duque de Hanover. Embora tenha passado por vários períodos em que o seu trabalho o mantinha muito ocupado, ele conseguia mesmo assim tempo para prosseguir as suas ideias na matemática e manter uma animada correspondência sobre o assunto com os seus colegas por essa Europa fora.

ACTA
ERUDITORUM
ANNO M DC LXXXXI

publicata,

ac

POTENTISSIMO SERENISSIMO-QUE PRINCIPI AC DOMINO

DN. JOHANNI
GEORGIO IV
S.R. IMPERII ARCHIMARE-SCALLO & ELECTORI
&c. &c. &c.

DICATA.

Cum S. Cæsareæ Majestatis & Potentissimi Electoris Saxoniæ Privilegiis.

LIPSIÆ,

Prostant apud J. GROSSII HÆREDES & J. F. GLEDITSCHIUM.

Excusa typis CHRISTOPHORI GUNTHERI.

Anno M DCXCI.

A ideia base a partir da qual o seu cálculo se desenvolveu era a relação inversa de somas e diferenças, no caso de sucessões de números. Ele observou que sendo A, B, C, D, E uma sucessão crescente de números, e L, M, N, P a sucessão das diferenças, então $E - A = L + M + N + P$

Por exemplo, dada a sequência 2, 3, 5, 9, 12

As diferenças serão 1, 2, 4, 3

E tem-se 12-2 = 1+2+4+3

Assim Leibniz não só considerou o triângulo aritmético de Pascal, em que cada coluna consiste na soma de elementos da coluna precedente, ou reciprocamente, cada coluna consiste nas diferenças da coluna seguinte, mas também um novo triângulo de fracções com propriedades similares, a que chamou "triângulo harmónico":

$\frac{1}{1}$						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{7}$

Neste triângulo harmónico, cada coluna é formada pelos quocientes da primeira coluna com as colunas correspondentes do triângulo aritmético. Por exemplo, os elementos 1/3, 1/12, 1/30... da terceira coluna resultam da divisão 1/1, 1/2, 1/3... por 3, 6, 10,..., os elementos da terceira coluna do triângulo de Pascal. Na medida em que cada coluna consiste nas diferenças dos elementos da coluna da esquerda, resulta que a soma dos elementos em cada coluna até um determinado valor pode ser achada pelo princípio de Leibniz como a diferença entre o primeiro e último valores da coluna imediatamente anterior. Assim, $1/2 + 1/6 + 1/12 = 1/1 - 1/4$.

Ao aplicar o seu método, o diminuendo aproxima-se cada vez mais de zero, pelo que se pode passar a somas infinitas.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)/2} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Os resultados de Leibniz aqui não eram novos. A sua importância resulta daquilo que a possibilidade da soma de sucessões de diferenças implica, quando a ideia é transferida para a geometria.

considerou uma curva definida num intervalo dividida em subintervalos e levantou ordenadas y_i para cada ponto x_i da divisão. Se se formar a sucessão $\{\delta y_i\}$ das diferenças dessas ordenadas, a sua soma, $\sum_i \delta y_i$, é igual à diferença $y_n - y_0$ entre as ordenadas final e a inicial. Da mesma forma, se se formar a sucessão $\{\sum y_i\}$, em que $\sum y_i = y_0 + y_1 + \ldots + y_i$, a sucessão das diferenças $\{\delta \sum y_i\}$ é igual à sucessão original das ordenadas.

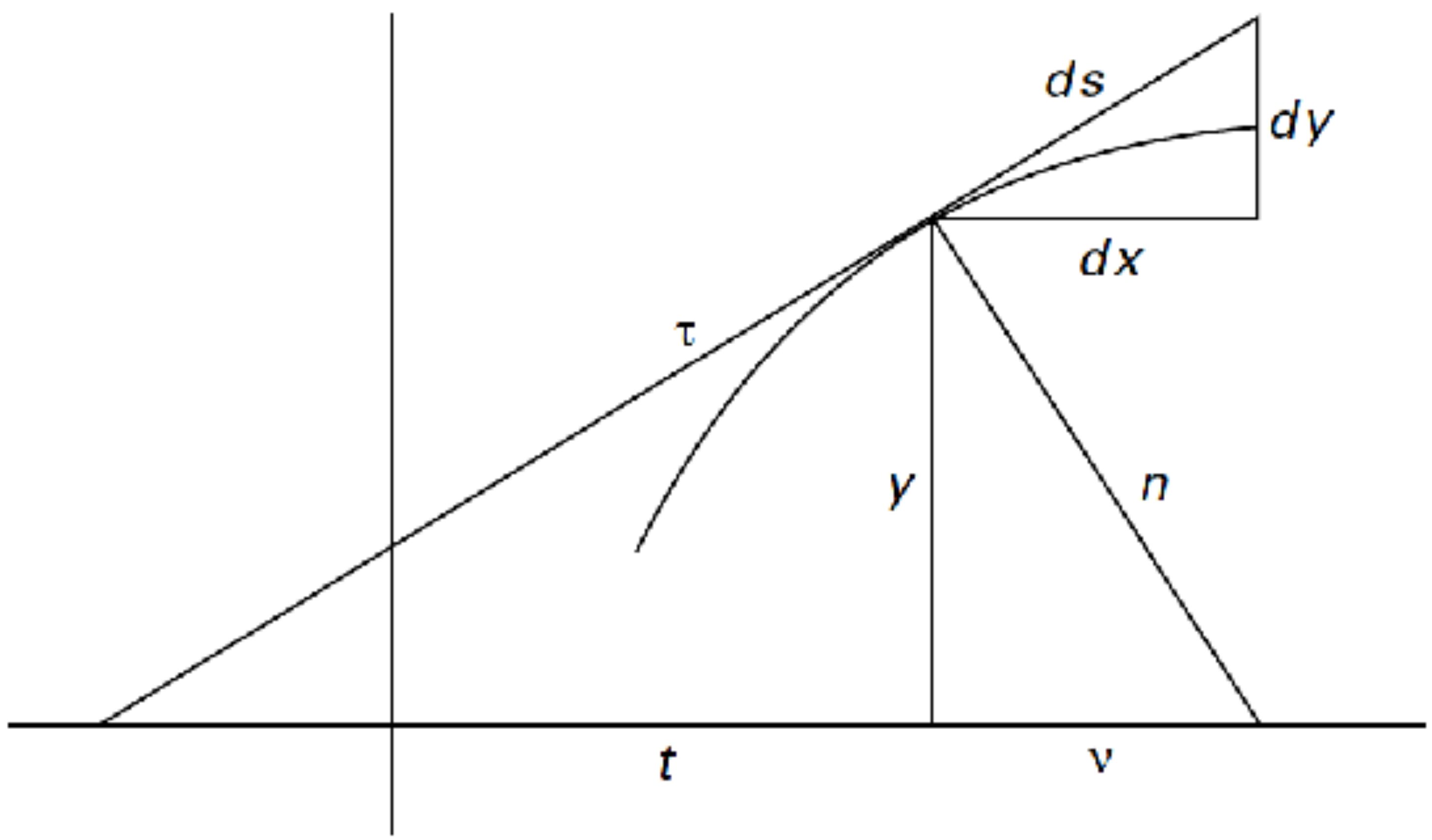
Leibniz extrapolou estas duas regras para tratar a situação em que havia um número infinito de ordenadas. Considerou a curva como um polígono com um número infinito de lados, em que cada ponto de intersecção deles traçada uma ordenada y no eixo. Se a diferença infinitesimal em ordenada for designada por dy, e se a soma do número infinito de ordenadas for designado por $\int y$, a primeira regra traduz-se por $\int dy = y$ enquanto a segunda resulta em $d \int y = y$.

Como parte da sua investigação para a representação de ideias através de notações apropriadas, Leibniz introduziu as duas notações d e $\int$ para representar a sua generalização da ideia de diferença e soma.

***d**iferentia*

***s**umma*

O Teorema da Transmutação



Da semelhança dos triângulos tiram-se muitas consequências.

$$\int_0^{x_0} y dx = \frac{1}{2}\left(x_0 y_0 + \int_0^{x_0} (y - x\frac{dy}{dx})dx\right)$$

Como aplicação, Leibniz calculou a área do quarto de círculo unitário, considerando a equação da circunferência centrada em (1,0) de raio 1.

$$\int y dx = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2} dx$$

Obtendo, após cálculos que omitiremos,

$$\int y\, dx = 1 - \int \frac{z^2}{1+z^2}\, dz.$$

Como conhecia

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots)$$

Somando, ou integrando, termo a termo obteve

$$\int y\,dx = 1 - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots.$$

Donde

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$$

Pra os seus *d*, diferenciais, Leibniz desenvolveu as regas da soma, da diferença produto, etc

Para demonstrar a utilidade do seu novo cálculo, Leibniz discute como determinar os máximos e os mínimos. Assim nota que dv será positivo quando v é crescente e negativo quando v é decrescente, uma vez que o *ratio* de dv para o sempre positivo dx dá a inclinação da linha de tangente. É claro que $dv = 0$ quando v não é nem crescente nem decrescente. Nesse local a ordenada será um máximo (se a curva for côncava para baixo) ou um mínimo (se a curva for côncava para cima). A tangente aí será horizontal.

A questão da concavidade, nota Leibniz mais à frente, depende das segundas diferenças *d dv*: “Quando lidamos com ordenadas crescentes *v* e os seus incrementos ou diferenças *dv* também são crescentes (isto é, quando *dv* é positivo, *d dv*, a diferença das diferenças, também é positiva, e quando *dv* é negativo, *d dv* também é negativo), então a curva é [côncava para cima], no outro caso [côncava para baixo]. Onde o incremento é máximo ou mínimo, ou onde os incrementos decrescentes se tornam crescentes, ou o oposto, há um *ponto de inflexão*” , ou seja, quando $d\,dv = 0$.

Algumas palavras acerca da controvérsia da prioridade entre Leibniz e Newton impõem-se aqui. Deverá ficar claro que, embora os dois homens tenham descoberto essencialmente as mesmas regras e procedimentos a que hoje chamamos colectivamente cálculo, as suas abordagens ao tema foram completamente diferentes. A abordagem de Newton fez-se através das ideias de velocidade e distância enquanto a de Leibniz foi através das diferenças e somas.

Não obstante, uma vez que a obra de Newton apenas foi publicada em inícios do século XVIII, apesar de ser bem conhecida em Inglaterra muito antes, o sucesso de Leibniz e dos irmãos Bernoulli na aplicação da sua versão levou determinados matemáticos ingleses a acusar Leibniz de plágio, particularmente uma vez que ele tinha lido algum do material de Newton durante as suas breves visitas a Londres nos anos de 1670 e que tinha recebido duas cartas de Newton por mão de Henry Oldenburg, o secretário da Royal Society, nas quais o próprio Newton discutia alguns dos seus resultados. Reciprocamente, precisamente porque Newton não tinha publicado, os Bernoulli acusaram Newton de plagiar Leibniz. Em 1711, a Royal Society, da qual Newton era o presidente, nomeou uma comissão para investigar as acusações. Naturalmente, a comissão considerou que Leibniz era culpado. O infeliz resultado da controvérsia foi que a matemática inglesa e a continental cessaram virtualmente a troca de ideias. No que respeita ao cálculo, os matemáticos ingleses adoptaram os métodos e notação de Newton, enquanto no Continente os matemáticos usavam os de Leibniz. Acabou por se perceber que a notação de Leibniz e os seus cálculos de diferenciais eram mais fáceis para trabalhar, e assim o progresso na análise foi mais rápido no Continente. Em seu próprio detrimento, a comunidade matemática inglesa privou-se deste progresso significativo durante quase todo o século XVIII.

Caixa 12.3

Newton, Leibniz e a Invenção do Cálculo

Newton e Leibniz são considerados os inventores do cálculo, mais do que Fermat ou Barrow ou outros, porque executaram quatro tarefas. Cada um deles desenvolveu conceitos gerais – Newton a fluxão e o fluente, Leibniz o diferencial e o integral – que estão relacionados com os dois problemas do cálculo, extremos e área. Desenvolveram notações e algoritmos, que permitiram a fácil utilização desses conceitos. Eles compreenderam e aplicaram a relação inversa dos seus dois conceitos. Finalmente, usaram estes dois conceitos na solução de muitos problemas difíceis e até então insolúveis. O que eles, no entanto, não fizeram foi estabelecer os seus métodos com o rigor da geometria grega clássica, porque na realidade usaram quantidades infinitesimais.