Seminário #9: Intuicionismo, Verificacionismo e Infinito Potencial

Conteúdo

1 Preâmbulo **1**

2 Verificacionismo e Lógica Intuicionista **2**
- 2.1 Significado e Condições de Verdade . . . 2
- 2.2 Desafio da Manifestação e Verificacionismo . . . 2
- 2.3 Interpretação BHK, Inferencialismo Lógico e Lógica Intuicionista . . . 3
- 2.4 Verificacionismo, Inferencialismo Lógico e Matemática . . . 5
- 2.5 Desafio . . . 5

3 Infinito Potencial **5**
- 3.1 O Intuicionismo de Brouwer e a aritmética infinitária . . . 5
- 3.2 Potencialismo Estrito . . . 6

4 Análise Real Intuicionista **7**

---

1. Preâmbulo

- *O que vimos até agora?*
  1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo
  (*) Análise de argumentos
  2. Finitismo e o Programa de Hilbert
  3. Lógica Intuicionista e Idealismo em Filosofia da Matemática
     (a) Derivabilidade clássica vs. derivabilidade intuicionista;
     (b) O intuicionismo de Brouwer
     (c) Modelos (de Kripke) Intuicionistas;
     (d) Relação entre modelos intuicionistas e o intuicionismo de Brouwer.

- *Para hoje*: Intuicionismo, Verificacionismo e Infinito Potencial:
  1. A interpretação BHK das expressões lógicas;
  2. Verificacionismo;
  3. Infinito Potencial;
  4. Análise Real Intuicionista.

- *Questões*:
  1. É a lógica intuicionista mais apta que a lógica clássica para dar conta do raciocínio matemático, mesmo que o de intuicionismo de Brouwer seja falso?
  2. São sistemas mutuamente inconsistentes de análise real igualmente legítimos?

2. Verificacionismo e Lógica Intuicionista

2.1. Significado e Condições de Verdade

Princípio da Composicionalidade: O significado de uma expressão complexa é determinado pelo significado das expressões que a compõem e o modo como estas a compõem.

- *Semântica em termos de condições de verdade*:
  - Uma forma comum de dar conta do significado de frases é em termos das suas condições de verdade;
  - O significado de uma expressão que não uma frase tem que ser algo que parcialmente determine as condições de verdade das frases em que ocorre;

- *Posição standard acerca das condições de verdade de frases logicamente complexas*:
  1. $\neg\varphi$ é verdadeira se e somente se φ não é verdadeira;
  2. $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira se e somente se φ e ψ são ambas verdadeiras;
  3. $\varphi \vee \psi$ é verdadeira se e somente pelo menos uma de φ e ψ é verdadeira;
  4. $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira se e somente φ é falsa ou ψ é verdadeira;
  5. $\forall x\varphi$ é verdadeira se e somente se, para todo o objecto a, $\varphi(a)$ é verdadeira;
  6. $\exists x\varphi$ é verdadeira se e somente se, há pelo menos um a tal que $\varphi(a)$ é verdadeira.

2.2. Desafio da Manifestação e Verificacionismo

Requisito da Manifestação: Quem quer que apreenda o significado de uma expressão linguística é capaz de demonstrar o seu conhecimento através do seu uso da expressão.

- *Significado e uso*:
  - Um slogan comum é que o significado de uma expressão é determinado pelo seu uso;
  - O requisito da manifestação vai além deste slogan ao ao requerer que haja uma diferença comportamental (ou na presença de uma abilidade que se manifesta comportamentalmente) no uso de uma expressão entre quem compreende e quem não compreende o seu significado.

Definição (Condição de verdade transcendente a verificação)**.** Uma condição de verdade é transcendente a verificação se e somente se somos incapazes de determinar se esta obtém ou não.

- *Exemplos de condições de verdade transcendente a verificação*:
  - Houve exactamente uma noite em que Platão teve exactamente 7 macacos no nariz;
  - A conjectura de Goldbach (talvez).

VERIFICACIONISMO: Não há condições de verdade transcendentes a verificação.

- *O Desafio da manifestação*: Dummett (1973) argumenta que o REQUISITO DA MANIFESTAÇÃO cria o seguinte desafio à tese segundo a qual frases podem ter condições de verdade que sejam transcendentes a verificação:
  1. Suponha-se, para redução ao absurdo, que há pelo menos uma frase φ que compreendemos e que tem condições de verdade C que são transcendentes a verificação (Suposição para redução ao absurdo)
  2. Se compreendemos φ, apreendemos C (Premissa);
  3. Se apreendemos C, somos capazes de manifestar este conhecimento através do nosso uso de φ (Premissa: REQUISITO DA MANIFESTAÇÃO);
  4. A apreensão de condições de verdade que transcendem verificação não são manifestáveis através do uso de frases com esses valores de verdade (Premissa);
  5. Logo, a apreensão de C não é manifestável através do nosso uso de φ (1,2,4);
  6. Logo, a aprensão de C é manifestável através do nosso uso de φ (1,2,3)
  7. Contradição (5,6)
  8. Portanto, 1. é falsa (1,7).

  * Dummett levanta um outro desafio à tese que há condições de verdade que são transcendentes a verificação, o desafio da aquisição (uma vez que este desafio é similar ao desafio da manifestação, não iremos discuti-lo na aula)

- *Suporte para a premissa 4*: O suporte para premissa 4 consiste na observação que a atribuição que para dar conta do uso da linguagem é suficiente apreender condições de verdade não transcendentes

  > "How can the account be viewed as a description of any *practical* ability of use? No doubt someone who understands such a statement can be expected to have many relevant practical abilities. He will be able to appraise evidence for or against it, should any be available, or to recognize that no information in his possession bears on it. He will be able to recognize at least some of its logical consequences, and to identify beliefs from which commitment to it would follow. And he will, presumably, show himself sensitive to conditions under which it is appropriate to ascribe propositional attitudes embedding the statement to himself and to others, and sensitive to the explanatory significance of such ascriptions. In short: in these and perhaps other important respects, he will show himself competent to use the sentence. But the headings under which his practical abilities fall so far involve no mention of evidence-transcendent truth-conditions." (Wright, *Realism, Meaning and Truth*, p. 17)

2.3. Interpretação BHK, INFERENCIALISMO LÓGICO e Lógica Intuicionista

- *Semântica em termos de condições de verificação*: Muito embora não seja possível a agentes manifestarem a sua compreensão de condições de verdade transcendentes, é possível a agentes manifestarem a sua compreensão das condições em que uma frase é verificada.

- *Semântica em termos de condições de demonstrabilidade*: Dado que não há condições de verdade que sejam transcendentes a verificação, o significado de frases pode ser compreendido em termos de verificabilidade;
  - Em matemática, verificabilidade é demonstrabilidade;
  - Assim, o significado de frases matemáticas pode ser compreendido em termos das condições em que estas são demonstradas.

Definição (Interpretação BHK)**.** A interpretação BHK (Brouwer-Heyting-Kolmogorov) das expressões lógicas é a seguinte:

1. Uma demonstração de $\neg\varphi$ é uma derivação de uma contradição a partir da suposição que φ;
2. Uma demonstração de $\varphi \wedge \psi$ é uma demonstração de φ e uma demonstração de ψ;
3. Uma demonstração de $\varphi \vee \psi$ é uma demonstração de φ ou uma demonstração de ψ;
4. Uma demonstração de $\varphi \to \psi$ é uma construção que transforma uma demonstração de φ numa demonstração de ψ;
5. Uma demonstração de $\forall x\varphi$ é uma construção que, para qualquer objecto a, gera uma demonstração de $\varphi(a)$;
6. Uma demonstração de $\exists x\varphi$ é uma especificação de um objecto a e uma demonstração de $\varphi(a)$.

Inferencialismo Lógico

1. As regras lógicas básicas consistem nas regras legítimas de introdução das expressões lógicas;
2. As regras de introdução de uma expressão determinam as regras de eliminação dessa expressão de tal modo que as regras de eliminação de uma expressão lógica são estáveis relativamente às suas regras de introdução:
   - A ideia intuitiva de estabilidade é que as regras de eliminação não permitem derivar "nem mais nem menos" do que aquilo que é justificado pelas regras de introdução da expressão lógica;
3. Uma regra é lógica se e somente se é derivável no sistema de dedução natural cujas regras de introdução são as regras lógicas básicas e as regras de eliminação por estas determinadas;
   - uma fórmula é uma verdade lógica se e somente se é um teorema deste sistema de dedução natural;
   - Uma fórmula φ é uma consequência lógica de um conjunto de fórmulas Γ se e somente se φ é derivável de Γ neste sistema de dedução natural.

- *A interpretação BHK e a lógica intuicionista*: A interpretação BHK favorece a lógica intuicionista dadas as seguintes suposições:

1. As regras logicamente básicas consistem nas regras de introdução das expressões lógicas que reflectem as cláusulas da interpretação BHK;
   - i.e., as regras logicamente básicas são $\neg$I, $\wedge$I, $\vee$I, $\to$, $\forall$I, $\exists$I;
2. O inferencialismo lógico é verdadeiro;
3. Para toda a expressão lógica δ, as suas regras de introdução determinam as regras de eliminação

δE;

- Destas suposições segue-se que:
  1. As regras de inferência lógicas são exactamente aquelas que são deriváveis no sistema de dedução natural intuicionista;
  2. Uma frase é uma verdade lógica se e somente se é um teorema da lógica intuicionista;
  3. Uma frase φ é uma consequência lógica de um conjunto de frases Γ se e somente se φ é derivável de Γ no sistema de dedução natural intuicionista.

2.4. Verificacionismo, Inferencialismo Lógico e Matemática

- *Lógica e Matemática*:
  - Até agora vimos um argumento a partir do verificacionismo e inferencialismo lógico para a lógica intuicionista;
  - Mas o argumento não implica que não há instâncias verdadeiras da lei do terceiro excluído;
  - Uma opção disponível a matemáticos clássicos é argumentar que todas as frases matemáticas que são instâncias do princípio do terceiro excluído são verdadeiras, não devido a considerações lógicas, mas sim em virtude da natureza das entidades matemáticas;
    * Porém, para que tal seja exequível, é preciso aceitar a tese que, para qualquer frase matemática, ela é demonstrável ou a sua negação é demonstrável.

2.5. Desafio

- *Desafio*: Como resistiriam ao Desafio da Manifestação?

---

3. Infinito Potencial

3.1. O Intuicionismo de Brouwer e a aritmética infinitária

- *Rejeição da aritmética infinitária*: "aprendendo a viver com os nossos meios";
  - Proponentes do intuicionismo de Brouwer rejeitam que haja totalidades infinitas;
  - Ao contrário dos finitistas, proponentes to intuicionismo de Brouwer não procuram justificar a aritmética infinitária;
  - Ao invés, simplesmente rejeitam-na, procurando desenvolver a aritmética (e análise) sem apelar a noções que envolvam infinitude.

- *Aritmética de Heyting*: A aritmética de Heyting é o sistema cujos axiomas são exactamente os axiomas da aritmética de Peano e cujas regras de inferência são as regras da lógica intuicionista.

- *A recepção dos teoremas da incompletude de Gödel*:

- A aritmética de Heyting é ela mesma incompleta (há frases φ da aritmética de Heyting tais que nem φ nem $\neg\varphi$ é um teorema da aritmética de Heyting);
- Os teoremas da incompletude foram tomados por proponentes do INTUICIONISMO DE BROUWER como algo esperado;
  1. O raciocínio matemático é inerentemente informal e creativo;
  2. A cada momento o sujeito pode encontrar novos modos de construção que lhe permitam conhecer factos aritméticos.

3.2. Potencialismo Estrito

POTENCIALISMO: Objectos matemáticos são gerados em sucessão. Não é possível completar o processo de geração de objectos matemáticos.

POTENCIALISMO ESTRITO: Duas teses:

1. POTENCIALISMO;
2. Toda a verdade é verdade "em virtude" de algum passo no estádio de geração.

- *Condições de verdade favoráveis ao* POTENCIALISMO ESTRITO:
  1. $\neg\varphi$ é verdadeira num estádio da geração de números se e somente se φ é falsa nesse e em todos os possíveis estádios posteriores de geração de números;
  2. $\varphi \wedge \psi$ é verdadeira num estádio de geração de números se e somente se φ e ψ são ambas verdadeiras nesse e em todos os possíveis estádios posteriores de geração de números;
  3. $\varphi \vee \psi$ é verdadeira num estádio de construção de números se e somente se φ é verdadeira ou ψ é verdadeira nesse e em todos os possíveis estádios posteriores de geração de números;
  4. $\varphi \rightarrow \psi$ é verdadeira num estádio de geração de números se e somente se ψ é verdadeira nesse e em todos os possíveis estaádios posteriores de geração de números se φ também o for;
  5. $\exists x\varphi$ é verdadeira num estádio de geração de números se e somente se $\varphi(x)$ é verdadeira nesse ou em algum possível estádio posterior de geração de números;
  6. $\forall x\varphi$ é verdadeira num estádio de geração de números se e somente se $\varphi(x)$ é verdadeira nesse e em todos os possíveis estádios posteriores de geração de números.

- POTENCIALISMO ESTRITO *e lógica intuicionista*:
  - Dado o Teorema da Hereditariedade para modelos intuicionistas, estas condições de verdade são equivalentes às condições através das quais a noção de suporte é definida em modelos intuicionistas;
  - Isto sugere que a lógica do POTENCIALISMO ESTRITO é a lógica intuicionista;
  - Caso assim seja, o POTENCIALISMO ESTRITO constitui uma posição a favor do uso da lógica intuicionista especificamente em matemática (onde estamos geralmente interessados no infinito).

---

4. Análise Real Intuicionista

- *Relação entre matemática intuicionista e matemática clássica*:
  - A lógica intuicionista é uma sublógica da lógica clássica;
  - A aritmética de Heyting é uma subteoria da aritmética de Peano;
  - Isto sugere que qualquer teoria matemática intuicionista é "mais fraca" que a teoria matemática clássica correspondente;
  - Contudo, a análise real intuicionista não é uma subteoria da análise real clássica.

- *Números reais clássicos*: Números reais clássicos podem ser concebidos como (classes de equivalência de) sequências de Cauchy:

> **Definição** (Sequências de Cauchy). Uma sequência infinita $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de racionais é Cauchy se e somente para todo o racional ϵ, há um número natural n tal que, para todos os naturais i e j tais que $i, j \geqslant n$, $|x_i - x_j| < \epsilon$.

- *Números reais intuicionistas*:
  - Proponentes do INTUICIONISMO DE BROUWER rejeitam a concepção clássica de números reais, uma vez que rejeitam a existência de totalidades infinitas
  - Ao invés tomam números reais como consistindo em sequências de escolha

- *Acerca de Sequências de Escolha*:
  - São sequências de números potencialmente infinitas, não acabadas; i.e., a continuação de uma sequência de escolha é sempre possível;
  - Qualquer sequência inicial de uma sequência de escolha é determinada;
  - Para algumas sequências de escolha, a sua continuação é dada por uma regra, enquanto que para outras, as sequências de escolha livre, a sua continuação é de carácter livre e arbitrário.

- *Números reais intuicionistas*: Consistem em sequências de escolha que sejam sequências de Cauchy (ou o análogo da noção de uma sequência de Cauchy para sequências potencialmente mas não actualmente infinitas).

- *Observação acerca de números reais intuicionistas dados por regras*: Estes são manifestamente poucos para dar conta do contínuo, uma vez que o número de regras (i.e., de procedimentos efectivos) é denumerável.

- *Sequências de escolha e o* PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE: De acordo com os intuicionistas, a noção de sequência de escolha justifica o seguinte princípio:

> **PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE:** Se $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $n \in \mathbb{N}$, então $\overline{f}(n)$ abrevia a sequência finita $\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle$. O PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE é o seguinte. Para toda a função $H : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$: $\forall f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \exists n \in \mathbb{N} \forall g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} (\overline{f}(n) = \overline{g}(n) \to H(f) = H(g))$.

- *Justificação para o princípio da continuidade*: Quando a sequência de escolha f é livre, somente se pode determinar os seus segmentos iniciais finitos. Assim, o valor de uma função H que tome como argumento f apenas pode depender de um segmento inicial finito de f.
  * Intuicionistas têm dificuldade em justificar o PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE quando a sequência de escolha em causa é dada por uma regra.

- *Consequências notáveis do* PRINCÍPIO DA CONTINUIDADE:

Facto 1. *Há instâncias de princípios clássicos cuja negação é verdadeira. E.g.:*

$$\neg\forall f(\forall n(f(n) = 0 \vee \neg\forall n(f(n) \neq 0)))$$

Teorema 1 (Continuidade)**.** *Toda a função total real é contínua.*

- *Matemática intuicionista e matemática clássica*:
  - Poderia à partida esperar-se que o intuicionismo daria lugar a uma matemática mais fraca, na medida em que é baseado numa lógica mais fraca;
  - Mas as teses anti-realistas que levam os intuicionistas à adopção de uma lógica mais fraca também os levam à a adopção de uma ontologia acerca dos reais que é incompatível com a matemática clássica;
    - Intuitivamente: como há menos reais para os intuicionistas (ou menos funções definidas nos reais), há frases que são verdades intuicionisticamente acerca desses reais, que têm reais clássicos como contra-exemplos.