Seminário #8: Lógica Intuicionista e Idealismo em Filosofia da Matemática

Conteúdo

1. Preâmbulo

- *O que vimos até agora?*
  1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo
  (*) Análise de argumentos
  2. Finitismo
     (a) Finitismo;
     (b) O Programa de Hilbert;
     (c) Consequências dos Teoremas da Incompletude de Gödel para o Programa de Hilbert

- *Para hoje*: Lógica Intuicionista e Idealismo em Filosofia da Matemática

- *Questões*:
  1. O que justifica a adopção de um sistema lógico?
  2. São as verdades e objectos matemáticos dependentes de mentes?

- *Lógica e matemática*:

- As razões para advogar uma lógica não clássica podem ser também razões para rejeitar teorias matemáticas commumente aceites;
- As razões para rejeitar teorias matemáticas commumente aceites podem ser também razões para rejeitar a lógica clássica na qual essas teorias aparentemente assentam.

---

2. Dedução Natural

- *Dedução Natural*:
  - Sistemas de dedução natural são sistemas lógicos que permitem a suposição assim como a "descarga" de premissas;
  - Nos sistemas de dedução natural que iremos ver, uma dedução consiste numa árvore cuja raíz é a conclusão a que se pretende chegar e cujos folhas consistem nas suposições de que a derivação da conclusão depende

- *Linguagem*: Os sistemas de dedução natural que iremos ver são formulados para a linguagem da lógica de primeira ordem
  - Em particular, as expressões lógicas são as seguintes: '$\bot$', '$\neg$', '$\wedge$', '$\vee$', '$\rightarrow$', '$=$', '$\forall$', '$\exists$'.

2.1. Dedução Natural para a Lógica Clássica

Definição (Regra SUP)**.**

$$\varphi$$

Definição (Regras para $\wedge$)**.**

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi & \psi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{I}} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\varphi}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_R} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \varphi \wedge \psi\end{matrix}}{\psi}\,{\scriptstyle \wedge \mathrm{E}_L}$$

Definição (Regras para $\rightarrow$)**.**

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^{*} \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\varphi \rightarrow \psi}\,{\scriptstyle \rightarrow \mathrm{I}(*)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi & \varphi\end{matrix}}{\psi}\,{\scriptstyle \rightarrow \mathrm{E}}$$

Definição (Regras para $\vee$).

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\varphi \vee \psi}\ \vee\mathrm{I}_R \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\psi \vee \varphi}\ \vee\mathrm{I}_L \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [\varphi]^* & [\psi]^\dagger\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \varphi \vee \psi & \zeta & \zeta\end{matrix}}{\zeta}\ \vee\mathrm{E}(*,\dagger)$$

Definição (Regras para $\neg$).

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]^*\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi}\ \neg\mathrm{I}(*) \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \varphi & \neg\varphi\end{matrix}}{\bot}\ \neg\mathrm{E} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg\neg\varphi\end{matrix}}{\varphi}\ \mathrm{DNE}$$

Definição (Regras para $\exists$).

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi^v_a\end{matrix}}{\exists v\varphi}\ \exists\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix} & [\varphi^v_{v'}]^*\\ \vdots & \vdots\\ \exists v\varphi & \zeta\end{matrix}}{\zeta}\ \exists\mathrm{E}(*)$$

Onde a não ocorre em ζ nem em nenhuma suposição paramétrica.

Definição (Regras para $\forall$).

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi^v_a\end{matrix}}{\forall v\varphi}\ \forall\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \forall v\varphi\end{matrix}}{\varphi^v_a}\ \forall\mathrm{E}$$

Onde a não ocorre em nenhuma suposição paramétrica.

Definição (Regras para $=$).

$$\dfrac{}{\tau = \tau}\ {=}\mathrm{I} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \tau = \rho & \varphi(\tau)\end{matrix}}{\varphi(\rho)}\ {=}\mathrm{E}$$

Definição (Derivabilidade Clássica). φ é classicamente derivável de Γ, $\Gamma \vdash_C \varphi$, se e somente se há uma árvore tal que: a sua raíz é φ; as suas folhas são todas elementos de Γ (ou suposições descarregadas) e a árvore foi construída a partir de uma sequência finita de aplicações de uma ou mais das seguintes regras de inferência, e só destas: SUP, $\wedge$I, $\wedge$E, $\rightarrow$I, $\rightarrow$E, $\vee$I, $\vee$E, $\neg$I, $\neg$E, DNE, $\forall$I, $\forall$E, $\exists$I, $\exists$E, $=$I e $=$E.

Definição (Sequente)**.** Um sequente é um par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ onde Γ é um conjunto de frases da linguagem e φ é uma frase da linguagem.

- *Lógica Clássica*:
  - A lógica clássica consiste no conjunto de sequentes $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ tal que $\Gamma \vdash_C \varphi$;
  - A lógica clássica é o sistema lógico vigente em matemática.

- *Exercício*: Continuem a seguinte derivação de modo a mostrarem que $\vdash_C p \vee \neg p$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^1}{p \vee \neg p}\,{\scriptstyle \vee\mathrm{I}} \qquad \neg(p \vee \neg p)}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg p}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}(1)}$$

- *Exercício*: Continuem a seguinte derivação de modo a mostrarem que $\neg\forall x\varphi \vdash_C \exists x\neg\varphi$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi^x_a]^1}{\exists x\neg\varphi}\,{\scriptstyle \exists\mathrm{I}} \qquad \neg\exists x\neg\varphi}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg\neg\varphi^v_a}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}(1)}$$

2.2. Dedução Natural para a Lógica Intuicionista

- *Linguagem da Lógica Intuicionista*: A linguagem da lógica intuicionista é a mesma da lógica clássica, excepto que '$=$' não se encontra presente como uma constante lógica (os intuicionistas tendem a tratar '$=$' como uma constante não lógica que se comporta pelo menos como uma relação de equivalência).

Definição (Derivabilidade Intuicionista)**.** φ é intuicionisticamente derivável de Γ, $\Gamma \vdash_I \varphi$, se e somente se há uma árvore tal que: a sua raíz é φ; as suas folhas são todas elementos de Γ ou suposições descarregadas e a àrvore foi construída através de uma sequência finita de aplicações de uma ou mais das seguintes regras de inferência, e só destas: SUP, $\wedge$I, $\wedge$E, $\rightarrow$I, $\rightarrow$E, $\vee$I, $\vee$E, $\neg$I, $\neg$E, $\forall$I, $\forall$E, $\exists$I e $\exists$E.
(*) O ponto importante é que falta DNE

- *Exercício*: Continuem a seguinte derivação de modo a mostrarem que $\vdash_I \neg\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[p]^1 \quad \neg p}{\bot}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{E}}}{\neg\neg q}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{I}}}{q}\,{\scriptstyle \neg\mathrm{DNE}}}{p \rightarrow q}\,{\scriptstyle \rightarrow\mathrm{I}(1)}$$

- *Exercício*: Demonstrem que '¬' é definível na lógica intuicionista em termos de outras expressões lógicas.

- *A lógica intuicionista faz mais "distinções que a lógica clássica*:

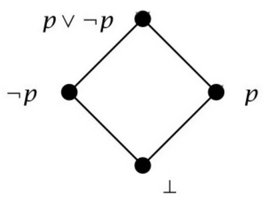

Figura 1: O reticulado da lógica clássica (com uma letra proposicional)

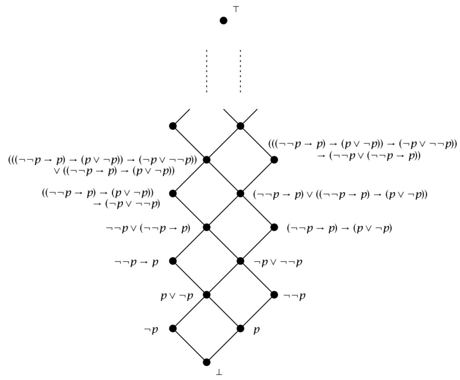

Figura 2: O reticulado de Rieger-Nishimura (com uma letra proposicional)

---

3. Intuicionismo de Brouwer

Intuicionismo de Brouwer:

1. Objectos matemáticos são <u>construções mentais</u> (a matemática nada tem que ver com a linguagem);
   * Slogan: "Existir é ser construído";
   - Uma construção mental consiste num acto mental através do qual a mente apreende as formas da percepção;
   - Entidades matemáticas, em particular os números naturais, são construídos na base da nossa intuição temporal;
   - Outros objectos matemáticos são construções a partir de números naturais;
2. Frases matemáticas são acerca do que o agente é ou não capaz de construir;
3. Frases matemáticas são verdadeiras se e somente se o agente efectuou as construções mentais que lhes correspondem;
4. Frases matemáticas são demonstradas pelo agente se e somente se o agente efectuou as construções mentais que lhe correspondem;
5. O conhecimento matemático é a priori;
6. O conhecimento matemático é sintético; encontra-se baseado na intuição;
   - Em particular, as verdades matemáticas não são verdades lógicas nem são verdadeiras meramente em virtude do seu significado;
   - A verdade de uma proposição matemática depende da capacidade criadora (constructiva) de sujeitos.

3.1. Infinito, Verdade e Demonstração

- *Infinito é somente potencial*:
  - Uma vez que as entidades matemáticas são construções mentais, não há uma classe infinita de entidades matemáticas;

- Em certos casos agentes possuem algoritmos que lhes permitem construir novos objectos matemáticos de um determinado tipo na base de outros objectos matemáticos desse tipo previamente construídos;
- Deste modo, algumas classes de objectos são potencialmente infinitas.

■ *O valor de verdade de frases matemáticas tem um carácter temporário*:
- Uma frase falsa pode tornar-se verdadeira em virtude de o agente efectuar, no futuro, uma determinada construção;
- Ainda assim, uma vez que uma frase é verdadeira, ela é verdadeira também em todos os tempos subsequentes;
  - Uma vez que uma construção foi efectuada, esta continua disponível em todos os tempos subsequentes.

■ *Acerca de Demonstração*:
- Demonstração, para um intuicionista, é uma noção informal;
- Sistemas formais procuram codificar a noção informal, mas o agente pode ser capaz de realizar construções que vão para além do que o sistema formal é capaz de captar;
- Isto é, agentes são potencialmente capazes de realizar construções que não correspondem a nenhuma regra de inferência de um sistema formal.
- Tais construções são realizadas na base do conteúdo, não só da forma, de outras construções.

3.2. Psicologismo

Psicologismo acerca das entidades matemáticas: As entidades matemáticas consistem em representações na mente do sujeito.

■ Psicologismo acerca das entidades matemáticas *e o* intuicionismo de Brouwer:
- O intuicionismo parece estar comprometido com o psicologismo;
- Se assim for, as objecções clássicas ao psicologismo são também objecções ao intuicionismo.

■ *Uma objecção ao* psicologismo: Como se explica a comunicação?
1. Se as entidades matemáticas são representações nas mentes de indivíduos, então diferentes indivíduos têm acesso a diferentes números;
   ("Os teus números existem na tua mente. Os meus números existem na minha mente.")
2. Se os teus números existem na tua mente e os meus números existem na minha mente, então quando eu falo do 1 estou a falar de algo na minha mente, e quando tu falas do 1 estás a falar de algo na tua mente;
3. Se nós significamos algo diferente por '1', então asseveramos coisas diferentes através das frases em que '1' ocorre;

4. Se asseveramos coisas diferentes através das frases em que '1' ocorre, não comunicamos um ao outro coisas acerca do 1;
5. Mas nós comunicamos coisas acerca do 1 um ao outro;

$\therefore$ As entidades matemáticas não são representações na mente de indivíduos.

- *Alternativa intuicionista ao* PSICOLOGISMO:
  - Sujeito de que os intuicionistas falam é um sujeito transcendental;
  - Tal sujeito consiste numa idealização que agrega aspectos da subjectividade comuns a todos os sujeitos e em virtude dos quais eles são sujeitos.

---

4. Teoria dos Modelos para a Lógica Intuicionista

4.1. Modelos Intuicionistas

Definição (Modelos (de Kripke) Intuicionistas)**.** Um modelo (de Kripke) intuicionista consiste num triplo $\mathcal{M} = \langle W_{\mathcal{M}}, \leqslant_{\mathcal{M}}, @_{\mathcal{M}}, D_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}} \rangle$, onde

1. $W_{\mathcal{M}} \neq \varnothing$; em particular, $@_{\mathcal{M}} \in W_{\mathcal{M}}$;
2. $\leqslant_{\mathcal{M}}$ é uma relação binária entre os elementos de $W_{\mathcal{M}}$ (i.e., $\leqslant_{\mathcal{M}} \subseteq W_{\mathcal{M}} \times W_{\mathcal{M}}$);
3. $D_{\mathcal{M}}$ é uma função que atribui a cada $w \in W_{\mathcal{M}}$ um conjunto não-vazio;
4. $V_{\mathcal{M}}$ é uma função tal que:
   (a) $V_{\mathcal{M}}$ atribui a cada constante individual α um elemento $(\alpha)^{\mathcal{M}}$ em $\bigcup_{w \in W_{\mathcal{M}}}(D_{\mathcal{W}}(w))$;
   (b) $V_{\mathcal{M}}$ atribui a cada predicado n-ário R e $w \in W_{\mathcal{M}}$ um conjunto $(R)^{\mathcal{M}}_w$ de n-tuplos de $D_{\mathcal{M}}(w)$ (i.e., $(R)^{\mathcal{M}}_w \subseteq (\mathcal{D}(w))^n$, para cada $w \in \mathcal{W}$, predicado n-ário R, e número inteiro positivo n);
   (c) $V_{\mathcal{M}}$ atribui a cada função n-ária f e $w \in W_{\mathcal{M}}$ uma função $(f)^{\mathcal{M}}_w$ de n-tuplos de $D_{\mathcal{M}}(w)$ para $D_{\mathcal{M}}(w)$;
5. Para todo o w e u em $W_{\mathcal{M}}$, se $w \leqslant_{\mathcal{M}} u$, então:
   (a) Para toda o predicado n-ário ou função n-ária δ, $(\delta)^{\mathcal{M}}_w \subseteq (\delta)^{\mathcal{M}}_u$;
   (b) $D_{\mathcal{M}}(w) \subseteq D_{\mathcal{M}}(u)$.

- *Observação*:
  - Quando R é um predicado 0-ário (i.e., uma letra propositional), então $(R)^{\mathcal{M}}_w = \{\langle\rangle\}$ ou $(R)^{\mathcal{M}}_w = \varnothing$;
  - Quando $(R)^{\mathcal{M}}_w = \{\langle\rangle\}$, este facto é interpretado como significando que R foi demonstrada/construída no estádio de conhecimento w; se $(R)^{\mathcal{M}}_w = \varnothing$, então não há uma demonstração/construção de R no estádio w.

- *Interpretação intuicionista dos modelos intuicionistas*:
  1. Cada elemento de $W_{\mathcal{M}}$ corresponde a um estádio na construção de objectos matemáticos e suas propriedades;
  2. Se um estádio v sucede a um outro w, então todos os objectos construídos em w encontram-se disponíveis (existem) em v;
     - Em v podem ter sido construídos novos objectos;

3. Do mesmo modo, todas as relações tais que objectos tenham sido construídos como estando nessas relações em w são tais que esses objectos são construídos como estando nessas relações em v;
   - dependendo das capacidades do sujeito, os mesmos objectos podem ser construídos como também estando em novas relações em v.

4.2. Suporte Modelo-Teorético

Definição (Atribuição de Valores a Variáveis)**.**
1. Uma atribuição de valores a variáveis de um modelo intuicionista $\mathcal{M}$ é uma função que mapeia cada variável v para um elemento $(v)^\sigma$ de $\bigcup_{w \in W_\mathcal{M}}(D_\mathcal{M}(w))$;
2. Se σ é uma atribuição de variáveis, v é uma variável e o é um elemento de $\bigcup_{w \in W_\mathcal{M}}(D_\mathcal{M}(w))$, então $\sigma[o/v]$ é uma atribuição de variáveis tal como σ excepto que $\sigma[o/v](v) = o$.

Definição (Denotação de termos singulares)**.** A denotação de um termo singular α de $\mathcal{L}$ num modelo intuicionista $\mathcal{M}$ relativa a uma atribuição de variáveis σ e a um elemento $w \in W_\mathcal{M}$, $(\alpha)_w^{\mathcal{M},\sigma}$, é definida da seguinte forma:
1. α é uma constante individual: $(\alpha)_w^{\mathcal{M},\sigma} = (\alpha)^\mathcal{M}$;
2. α é uma variável: $(\alpha)_w^{\mathcal{M},\sigma} = (\alpha)^\sigma$;
3. $\alpha = f(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$: $(f(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n))_w^{\mathcal{M},\sigma} = f_w^\mathcal{M}((\beta^1)_w^{\mathcal{M},\sigma}, (\beta^2)_w^{\mathcal{M},\sigma}, \ldots, (\beta^n)_w^{\mathcal{M},\sigma})$.

Definição (Suporte)**.** A noção de suporte de uma fórmula φ por um modelo intuicionista $\mathcal{M}$, $w \in W_\mathcal{M}$ e atribuição de valores a variáveis σ de $\mathcal{M}$ é definida inductivamente do seguinte modo:
1. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash R\alpha^1\alpha^2 \ldots \alpha^n$ sse $\langle (\alpha^1)_w^{\mathcal{M},\sigma}, (\alpha^2)_w^{\mathcal{M},\sigma}, \ldots, (\alpha^n)_w^{\mathcal{M},\sigma} \rangle \in (R)_w^{\mathcal{M},\sigma}$;
2. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi$ e $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \psi$;
3. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \psi$;
4. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi \to \psi$ sse, para todo o u tal que $w \leqslant_\mathcal{M} u$, $\mathcal{M}, u, \sigma \nVdash \varphi$ ou $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \psi$;
5. $\mathcal{M}, w, \sigma \nVdash \bot$;
6. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \neg\varphi$ sse, para todo o u tal que $w \leqslant_\mathcal{M} u$, $\mathcal{M}, u, \sigma \nVdash \varphi$;
7. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \exists v \varphi$ sse, existe um $o \in D_\mathcal{W}(w)$ tal que $\mathcal{M}, w, \sigma[o/v] \Vdash \varphi$;
8. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \forall v \varphi$ sse, para todo o u tal que $w \leqslant_\mathcal{M} u$ e para todo o $o \in D_\mathcal{W}(u)$, $\mathcal{M}, u, \sigma[o/v] \Vdash \varphi$.

Definição (Suporte num modelo intuicionista)**.** Uma fórmula φ é suportada por um modelo intuicionista, $\mathcal{M} \Vdash \varphi$, se e somente se, para toda a atribuição de variáveis σ do modelo, $\mathcal{M}, @, \sigma \Vdash \varphi$.

Facto 1 (Hereditariedade)**.** *Para toda a fórmula φ, modelo intuicionista $\mathcal{M}$, w e v em $W_\mathcal{M}$ tais que $w \leqslant_\mathcal{M} v$ e atribuição de valores a variáveis σ: se $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash \varphi$, então $\mathcal{M}, v, \sigma \Vdash \varphi$.*

- *Exercício*: São as seguintes estruturas modelos intuicionistas?
  1. $\mathcal{M}$ é tal que:
     (a) $W_\mathcal{M} = \{1\}$;

   (b) $@_{\mathcal{M}} = 1$;
   (c) $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} @_{\mathcal{M}}$;
   (d) $D_{\mathcal{M}}(1) = \{2\}$; $(R)_1^{\mathcal{M}} = \varnothing$, onde R é um predicado unário;
2. $\mathcal{N}$ é tal que:
   (a) $W_{\mathcal{N}} = \{1, 2, 3\}$;
   (b) $@_{\mathcal{N}} = 1$;
   (c) $D_{\mathcal{M}}(1) = D_{\mathcal{M}}(2) = D_{\mathcal{M}}(3) = \{4\}$;
   (d) $1R_{\mathcal{N}}1$, $2R_{\mathcal{N}}1$, $2R_{\mathcal{N}}2$, $3R_{\mathcal{N}}1$, $3R_{\mathcal{N}}2$, $3R_{\mathcal{N}}3$;
   (e) $(R)_1^{\mathcal{N}} = (R)_2^{\mathcal{N}} = \varnothing$, $(R)_3^{\mathcal{N}} = \{4\}$ onde R é um predicado unário;
3. $\mathcal{O}$ é tal que:
   (a) $W_{\mathcal{N}} = \{1, 2, 3\}$;
   (b) $@_{\mathcal{N}} = 1$;
   (c) $D_{\mathcal{M}}(1) = D_{\mathcal{M}}(2) = D_{\mathcal{M}}(3) = \{4\}$;
   (d) $1 \leqslant_{\mathcal{M}} 1$, $2 \leqslant_{\mathcal{M}} 2$, $1 \leqslant_{\mathcal{M}} 2$, $3 \leqslant_{\mathcal{M}} 3$, $1 \leqslant_{\mathcal{M}} 3$, $2 \leqslant_{\mathcal{M}} 3$;
   (e) $(R)_1^{\mathcal{N}} = (R)_2^{\mathcal{N}} = \{4\}$, $(R)_3^{\mathcal{N}} = \varnothing$ onde R é um predicado unário.

4.3. Construção e Suporte

- *Construção em modelos intuicionistas*: A relação de suporte de cada modelo intuicionista representa o modo como a construção de proposições complexas em cada estádio é determinada pela construção de proposições mais simples nesse ou outros estádios:
  1. Uma construção de uma predicação $R\alpha^1\alpha^2 \ldots \alpha^n$ num estádio consiste na aplicação, nesse estádio, da relação R aos objectos $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$;
  2. Uma construção de $\varphi \wedge \psi$ num estádio consiste na construção de φ e de ψ nesse estádio;
  3. Uma construção de $\varphi \vee \psi$ num estádio consiste na construção, nesse estádio, de pelo menos uma de φ ou ψ;
  4. Uma construção de $\varphi \to \psi$ num estádio consiste na construção de ψ em qualquer estádio posterior no qual φ tenha sido construída;
  5. Uma construção de $\neg\varphi$ num estádio consiste na falha na construção de φ em todos os estádios posteriores;
  6. $\bot$ não é construtível em estádio algum;
  7. Uma construção de uma existencial $\exists x(\varphi)$ num estádio consiste na construção de $\varphi(x)$ nesse estádio, para algum objecto x disponível nesse mesmo estádio;
  8. Uma construção de uma universal $\forall x(\varphi)$ num estádio consiste na construção de $\varphi(x)$ em todo o estádio posterior w, para todo o objectos x disponível no estádio w.

4.4. Consequência modelo-teorética intuicionista

Definição (Consequência modelo-teorética intuicionista)**.** Onde Γ é um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ e φ é uma fórmula de $\mathcal{L}$, φ é uma consequência (modelo-teorética) intuicionista de φ, $\Gamma \vDash_I \varphi$, se e somente se, para todos os modelos intuicionistas $\mathcal{M}$ e todas as atribuições de valores a variáveis σ de $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \vDash \gamma$ para todas as frases em Γ, então $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \Vdash \varphi$.

Teorema 1 (Completude da Lógica Intuicionista (Kripke 1965))**.** $\Gamma \vdash_I \varphi$ *se e somente se* $\Gamma \vDash_I \varphi$

4.5. Exemplos e Exercícios

- *Exemplo*: $\neg\neg p \nvDash_I \rightarrow p$

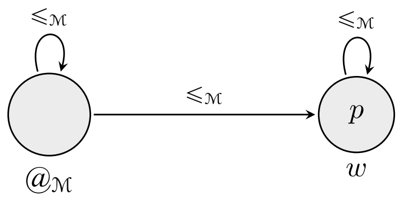

Figura 3: Modelo $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \Vdash \neg\neg p$ e $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash p$

1. $(p)^{\mathcal{M}}_{@_{\mathcal{M}}} = \varnothing$;
2. $(p)^{\mathcal{M}}_{@_{\mathcal{M}}} = \{\langle\rangle\}$;
3. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash p$
4. $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash p$
5. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \neg p$
   - $\exists w \in W_{\mathcal{M}}$ s. t. $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} w$ and $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash p$
6. $\mathcal{M}, w_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \neg p$
   - $\exists w \in W_{\mathcal{M}}$ s. t. $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} w$ and $\mathcal{M}, w, \sigma \Vdash p$
7. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \Vdash \neg\neg p$
   - $\forall w \in W_{\mathcal{M}}$ s. t. $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} w$: $\mathcal{M}, w, \sigma \nVdash \neg p$

- *Exemplo*: $\forall x(Px \vee Qx) \nvDash_I \forall x(Px) \vee \exists x(Qx)$

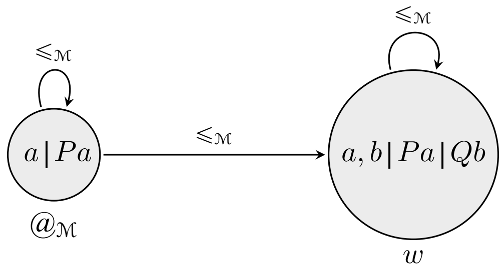

Figura 4: Modelo $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \Vdash \forall x(Px \vee Qx)$ e $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \forall x(Px) \vee \exists x(Qx)$

1. $D_{\mathcal{M}}(@_{\mathcal{M}}) = \{a\}$;
2. $D_{\mathcal{M}}(w) = \{a, b\}$;
3. $(P)^{\mathcal{M}}_{@_{\mathcal{M}}} = (P)^{\mathcal{M}}_{w} = \{a\}$;
4. $(Q)^{\mathcal{M}}_{@_{\mathcal{M}}} = \varnothing$; $(Q)^{\mathcal{M}}_{w} = \{b\}$;
5. $M, @_{\mathcal{M}}, \sigma \Vdash \forall x(Px \vee Qx)$;
   (a) $M, @_{\mathcal{M}}, \sigma[a/x] \Vdash Px$ e $M, w, \sigma[a/x] \Vdash Px$;
   (b) $M, @_{\mathcal{M}}, \sigma[a/x] \Vdash Px \vee Qx$; e $M, w, \sigma[a/x] \Vdash Px \vee Qx$;
   (c) $M, w, \sigma[b/x] \Vdash Qx$;
   (d) $M, w, \sigma[b/x] \Vdash Px \vee Qx$;
   (e) Logo, para todo o u tal que $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} u$ e para todo o o em $D_{\mathcal{M}}(u)$, $M, u, \sigma[o/x] \Vdash Px \vee Qx$;
6. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \exists x(Qx)$;
   (a) $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma[a/x] \nVdash Qx$.
   (b) Logo, não é o caso que há um o em $D_{\mathcal{M}}(@_{\mathcal{M}})$ tal que $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma[o/x] \Vdash Qx$
7. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \forall x(Px)$;
   (a) $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma[b/x] \nVdash Px$;
   (b) Logo, existe um u tal que $@_{\mathcal{M}} \leqslant_{\mathcal{M}} u$ e existe um $o \in D_{\mathcal{M}}(u)$ tal que $\mathcal{M}, u, \sigma[o/x] \nVdash Px$.
8. $\mathcal{M}, @_{\mathcal{M}}, \sigma \nVdash \forall x(Px) \vee \exists x(Qx)$.

---

5. Intuicionismo e Terceiro Excluído

Lei do Terceiro Excluído: $\varphi \vee \neg\varphi$, para toda a frase φ (que expressa uma proposição).

- *Questão*: Porque rejeitam os proponentes do intuicionismo de Brouwer a lei do terceiro excluído?

---

6. Lógica Clássica e Lógica Intuicionista

Teorema 2. *Para todas as fórmulas* φ *da lógica proposicional:* $\vDash_C \varphi$ *se e somente se* $\vDash_I \neg\neg\varphi$.

Facto 2. $\vDash_C \forall x(Px \vee \neg Px)$ *mas* $\nvDash_I \neg\neg\forall x(Px \vee \neg Px)$.

- *Exercício bónus*: Mostrem, através de um contramodelo, que $\nvDash_I \neg\neg\forall x(Px \vee \neg Px)$.