Seminário #7: Finitismo, o Programa de Hilbert e os Teoremas da Incompletude de Gödel

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

- *Lembrete*:
  1. Data para entrega da análise de argumentos: 23:59 de 15 de Novembro de 2020
  2. Podem trabalhar em pares, desde que indiquem os autores do trabalho na folha de rosto do mesmo.

- *O que vimos até agora?*
  1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo
  (*) Análise de argumentos
  2. Formalismo e Deductivismo

- *Para hoje*: Finitismo, o Programa de Hilbert e Teoremas da Incompletude de Gödel
  1. Finitismo;
  2. O programa de Hilbert;
  3. Teoremas da Incompletude de Gödel e as suas consequências para o Programa de Hilbert.

- *Questão*: Como se justifica a matemática infinitária?

---

2. Motivações para o Finitismo

- *A matemática no início do século XX*:
  1. Fundações sólidas para o cálculo:
     - Estas teorias assumem a existência de conjuntos "actualmente" (i.e., não só "potencialmente") infinitos e princípios acerca de conjuntos deste tipo;
  2. Melhor compreensão do infinito:
     - Através da teoria de conjuntos de Cantor começou a ser possível determinar a existência de infinitos de diferentes tamanhos e a relação destes com relações de ordem;
  3. Paradoxo de Russell;
  4. O uso de "multidões inconsistentes" (i.e., de classes – "colecções" demasiado grandes para corresponderem a conjuntos).

- *O problema*:
  - As teorias matemáticas no início do séc. XX apresentam um grande grau de rigor e inovação conceptual;
  - Mas essas teorias pressupõem outras teorias que, à partida, carecem de justificação;
    - Em particular, há ou não modelos infinitos? Se não há qualquer garantia de que haja tais modelos, então as fundações da melhor matemática estão podres.

---

3. Base Segura: Aritmética Finitária

3.1. Hilbert acerca natureza dos objectos matemáticos e do conhecimento matemático

- *A aritmética finitária*:
  - A aritmética finitária, de acordo com Hilbert, é acerca de símbolos, compreendidos como tipos (i.e., como entidades quasi-concretas);
  - Em particular, a aritmética é acerca dos seguintes símbolos:
    - $1 =_{\text{df}}$ '|';
    - $2 =_{\text{df}}$ '| |';
    - $3 =_{\text{df}}$ '| | |';
    - etc.
  - Assim, Hilbert adopta o FORMALISMO DE TERMOS acerca da aritmética finitária;

- *Conhecimento acerca da aritmética finitária*:
  - Números, entendidos como '|'s, são intuitivamente reconhecíveis uma vez que contém apenas '|'s;
  - Frases como '$S(2) = 3$' comunicam que o 3 é o resultado de acrescentar um '|' ao 2;
  - Temos conhecimento de factos acerca destes símbolos através da nossa "intuição da forma da nossa sensibilidade";

- Pensamento requer uma capacidade prévia de reconhecimento e manipulação de símbolos;
- É o nosso acesso epistémico (através da intuição) à nossa capacidade de reconhecer e manipular símbolos que justifica os princípios da aritmética finitária;
- Esta justificação é comum a 'todo o ser pensante', dado que todo o pensamento requer este tipo de capacidade;

* Esta posição acerca da justificação para o nosso conhecimento da aritmética finitária baseia-se na epistemologia de Kant.

■ *Infinito só o infinito potencial*:

○ Hilbert rejeita a existência de colecções infinitamente grandes;

○ Ainda assim, subscreve à ideia de infinito enquanto potencial:

- há colecções tais que é sempre (ou talvez tais que é necessariamente) possível construir um novo elemento da colecção.

3.2. Aritmética finitária e aritmética primitiva recursiva

■ *Em que consiste exactamente a aritmética finitária?* O consenso parece ser que, para Hilbert, esta consiste em **PRA**, a *aritmética primitiva recursiva*:

○ Linguagem:

- O aspecto distintivo da aritmética primitiva recursiva é que não possui quantificação (embora algumas formas de quantificação possam ser simuladas em **PRA**);
- A linguagem consiste nos símbolos da lógica de primeira ordem, variáveis incluídas (mas quantificadores estão excluídos);
- A linguagem possui também os seguintes símbolos não lógicos (aritméticos):
  1. '0' (zero);
  2. 'S' (função sucessor);
  3. Um símbolo para cada função primitiva recursiva;
- Axiomas não lógicos:
  1. $S(x) \neq 0$;
  2. $S(x) = S(y) \to x = y$;
  3. Equações a definir o comportamento das funções primitivas recursivas;
- Regra não-lógica de inferência:
  – Indução : De $\varphi(0)$ e $\varphi(x) \to \varphi(S(x))$ pode deduzir-se $\varphi(y)$, para qualquer fórmula φ (na linguagem de **PRA**).

■ *Observações*:

1. Para simplificar a exposição não são indicados os primitivos lógicos, axiomas lógicos e regras lógicas de inferência;
2. A formulação típica do princípio da indução é como o seguinte esquema de primeira-ordem:

Axioma-Esquema da Indução: $(\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)))) \rightarrow \forall x(\varphi(x))$

- Esta formulação do princípio da indução não está disponível em **PRA**, dado que a linguagem não possui quantificadores;
- É por este motivo que se apela à regra da indução.

- *Acerca de funções primitivas recursivas*:

Definição (Função Primitiva Recursiva). O conjunto das funções primitivas recursivas é o menor conjunto tal que:
1. Zero: 0 (a função zero-ária zero) é primitiva recursiva;
2. Sucessor: S (a função unária sucessor) é primitiva recursiva;
3. Projecção: $P_i^n(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ (a função n-ária de projecção do i^{o} elemento) é primitiva recursiva, para todo o $n \geqslant 1$ e i tal que $1 \leqslant i \leqslant n$;
4. Composição: Se f é uma função k-ária primitiva recursiva e $g_1, \ldots, g_k$ são funções m-árias primitivas recursivas, então a função $h(x_1, \ldots, x_m) \mapsto f(g_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_m))$ é primitiva recursiva;
5. Recursão primitiva: Se f é uma função primitiva recursiva k-ária e g é uma função primitiva $k+2$-ária, então a seguinte função $k+1$-ária h (a recursão primitiva de f e g) é primitiva recursiva:
   (a) $h(0, x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$; e
   (b) $h(S(y), x_1, \ldots, x_k) = g(y, h(y, x_1, \ldots, x_k), x_1, \ldots, x_k)$.

- *Exemplo de um conjunto de axiomas para função $Pred$ (função predecessor nos naturais)*:
  1. $Pred(0) = 0$;
  2. $Pred(S(n)) = P_1^2(n, Pred(n))$
     - Uma vez que $P_1^2(n, Pred(n)) = n$, temos que $Pred(S(n)) = n$.

- *Exercício*: Encontrem dois axiomas que conjuntamente governem o comportamento de adição enquanto função recursiva.
  - Dica: olhem para as regras de reescrita de termos dadas na §4.1.2 do handout para a aula #6.

- *Porquê* **PRA**? Porque o compromisso de **PRA** é somente com o infinito potencial.
  1. Asserções gerais:
     (a) Fórmulas em que variáveis ocorrem abertas podem ser interpretadas como correspondendo a uma generalização acerca dos naturais;
       - E.g., '$x + 0 = x$' pode ser interpretada como correspondendo a uma generalização acerca dos naturais.

     (b) A interpretação do Hilbert do conteúdo destas generalizações não é problemática de um ponto de vista finitário uma vez que o seu conteúdo pode ser entendido como sendo somente acerca dos números que foram actualmente construídos: para cada n-tuplo de numerais que venham a ser produzidos, a fórmula que resulta quando se substitui esses numerais pelas variáveis é verdadeira;

- E.g.: $x + 0 = x$
  i. Quando eu produzo o numeral 1, $1 + 0 = 1$ é verdadeira;
  ii. Quando eu produzo o numeral 2, $2 + 0 = 2$ é verdadeira;
  iii. Quando eu produzo o numeral 3, $3 + 0 = 3$ é verdadeira;
  iv. ...
- Mesmo que os numerais não existam já todos, a frase é verdadeira de todos os numerais até agora produzidos.

2. Asserções existenciais delimitadas:
   (a) Asserções existenciais são admissíveis desde que os quantificadores existenciais estejam delimitados, uma vez que fórmulas com quantificadores existenciais delimitados são equivalentes a fórmulas sem ocorrência de quantificadores;
   - E.g., '$\exists n(n > 100 \wedge n < 105 \wedge n$ é primo)' é equivalente a '101 é primo $\vee$ 102 é primo $\vee$ 103 é primo $\vee$ 104 é primo'.

   (b) Cada frase deste tipo possui um número finito de disjuntos, pelo que é possível determinar a sua verdade num número finito de passos – verificando se pelo menos um dos disjuntos é verdadeiro;
   (c) Determinar se um disjunto é verdadeiro requer nada mais que a execução de um algoritmo.
3. Asserções existenciais não delimitadas:
   (a) Tais asserções não têm um correspondente em **PRA**;
   (b) De acordo com Hilbert, tais asserções não têm significado;
   - Se estas asserções tivessem significado, então seriam equivalentes a disjunções infinitas, e pressuporiam a existência de infinitos numerais;
   - Mas, do ponto de vista de Hilbert, não há colecções actualmente infinitas;
   - Exemplo: '$\exists y(y$ é o sucessor de $x)$'
     - Não é o caso que, para cada numeral n que se produza, o seu sucessor exista também nessas circunstâncias – o seu sucessor de n pode ainda não ter sido produzido.

---

4. A Justificação para a Aritmética Infinitária

- *Hilbert acerca da aritmética infinitária*:
  - De acordo com Hilbert, a aritmética infinitária não tem conteúdo;
  - Hilbert adopta uma espécie de FORMALISMO DE JOGOS acerca da aritmética infinitária:
    - A aritmética infinitária consiste assim num jogo de manipulação de símbolos;
    - O jogo é útil na medida em que nos permite mais facilmente extrair conclusões acerca da aritmética finitária; E.g.:
      – A demonstração do resultado do Arquimedes que a área do segmento da parábola é igual a $\frac{4}{3}$ da àrea do triângulo $\triangle ABC$ torna-se um exercício simples quando se utiliza o cálculo infinitesimal.

- Para que o jogo seja de facto útil, teorias infinitárias têm que ser extensões conservativas da aritmética finitária.

4.1. Extensões Conservativas

Definição (Consequência sintáctica)**.** Uma fórmula φ é uma consequência sintáctica de um conjunto de fórmulas Γ, $\Gamma \vdash \varphi$, se e somente se há uma sequência finita de fórmulas $\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^n$ tal que $\psi^n = \varphi$ e cada para todo o i tal que $1 \leqslant i \leqslant n$, φ^i está em Γ, φ^i é um axioma lógico ou φ^i resulta da aplicação de uma das regras lógicas de inferência a uma ou mais fórmulas φ^j, para algum $j < i$.

- *Observação: consequência sintáctica, consequência modelo-teorética (semântica) e consequência lógica*:
  - Consequência sintáctica e consequência modelo-teorética coincidem;
    - i.e., $\Gamma \vdash \varphi$ iff $\Gamma \vDash \varphi$, for all formulae φ and set of formulae Γ (of a first-order language);
  - Logo, se uma destas noções coincide com a noção de consequência lógica, as duas coincidem com esta última noção.

Definição (Teoria)**.** Uma teoria consiste num conjunto de frases.

Definição (Extensão conservativa (sintáctica))**.** Uma teoria T_2 é uma extensão conservativa (sintáctica) de uma teoria T_1 se e somente se, a linguagem de T_2 inclui a linguagem de T_1 e, para toda a fórmula φ na linguagem de T_1, se φ é um teorema de T_2, então φ é um teorema de T_1 (i.e., se e somente, para toda a fórmula φ na linguagem de T_1, $T_2 \vdash \varphi$ somente se $T_1 \vdash \varphi$).

- *Exemplo*:
  - Seja **SA** uma teoria cujo único primitivo é 'S' e cujos axiomas não lógicos são os seguintes:
    1. $\forall x(S(x) \neq 0;$
    2. $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y).$
  - **PA**, a aritmética de Peano de primeira ordem (a teoria standard da aritmética de primeira ordem) é uma extensão conservativa de **SA**.

- *A legitimidade do uso da aritmética infinitária*:
  - Do ponto de vista Hilbertiano, teorias matemática são úteis somente se forem extensões conservativas da aritmética finitária;
  - Assim, o uso de uma teoria matemática é legítimo se e somente se essa teoria é uma extensão conservativa de **PRA**.

4.2. Consistência

Definição (Consistência (sintáctica))**.** Uma teoria T é consistente sse, para toda a frase de T, $T \nvdash \varphi \wedge \neg\varphi$.

Teorema 1. *Se T_1 é consistente, então T_2 é uma extensão conservativa de T_1 somente se T_2 é consistente.*

Demonstração do Teorema 1. Suponha-se que T_1 é consistente e que T_2 é uma extensão conservativa de T_1. Suponha-se, para redução ao absurdo, que T_2 é inconsistente. Logo, para todas as frases φ de T_2, $T_2 \vdash \varphi$. Mas as frases de T_2 incluem as frases de T_1. Logo, para todas as frases φ de T_1, $T_1 \vdash \varphi$. Logo, T_1 é inconsistente. ↯ Portanto, T_2 é consistente. □

- *Extensões conservativas e consistência*:
  - O requisito que T seja uma extensão conservativa de **PRA** implica a consistência de T, na suposição que **PRA** é consistente;
  - Hilbert tomava **PRA** como consistente:
    1. As frases de **PRA** têm conteúdo, e os seus teoremas são verdadeiros;
    2. Logo, **PRA** é consistente: nenhuma proposição é simultaneamente verdadeira e falsa (!)
  - Logo, dado o Teorema 1, o uso de uma teoria matemática é legítimo somente se essa teoria é consistente.

4.3. Consistência e Existência de Modelos

Definição (Modelo de uma Teoria)**.** Um modelo $\mathcal{M}$ é um modelo de uma teoria T se e somente se, para todas as fórmulas de T, $\mathcal{M} \vDash T$.

Teorema 2 (Correcção Forte)**.** *φ é uma consequência sintáctica de Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) somente se φ é uma consequência semântica de φ ($\Gamma \vdash \varphi$).*

Teorema 3 (Completude (Semântica) Forte)**.** *φ é uma consequência semântica de Γ ($\Gamma \vDash \varphi$) somente se φ é uma consequência sintáctica de φ ($\Gamma \vdash \varphi$).*

Facto 1. *Uma teoria é consistente se e somente se tem um modelo.*

Demonstração do Facto 1.

$\Rightarrow$: Suponha-se que T é uma teoria consistente. Logo, $T \nvdash p \wedge \neg p$. Portanto, $T \nvDash p \wedge \neg p$, pelos Teorema 3. Logo, existe um modelo $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \vDash \varphi$, para todas as fórmulas em T (e $\mathcal{M} \nvDash p \wedge \neg p$). Logo, T tem um modelo.

$\Leftarrow$: Suponha-se que T é uma teoria inconsistente. Em tal caso, $T \vdash p \wedge \neg p$. Logo, $T \vDash p \wedge \neg p$, pelo Teorema 2. Mas nenhum modelo $\mathcal{M}$ é tal que $\mathcal{M} \vDash p \wedge \neg p$. Logo, T não tem modelos. □

- *Consistência e existência de modelos*:
  - Intuitivamente, o requisito de consistência da teoria equivale ao requisito de existência de pelo menos um modelo da teoria, à luz do Facto 1;
  - Mas Hilbert tomava a linguagem de teoria dos conjuntos, na qual a teoria de modelos é formulada, como não possuindo ela mesma sentido;
  - De modo relacionado, a teoria de conjuntos ZFC, de que dependem as demonstrações dos Teoremas 2 e 3, carece de legitimação pela aritmética finitária;
  - Deste modo, o requisito de consistência pode ser visto como simplesmente substituindo o requisito de existência de modelos de uma teoria;
    - Em particular, a matemática infinitária não carece de modelos para que esteja legitimada;
    - Ao invés, o critério de consistência substitui o critério de existência de modelos.
  - Dito isto, suponha-se que a teoria dos conjuntos é legítima. Então, estamos legitimados a utilizar afirmações como 'a teoria T tem um modelo', mesmo que estas afirmações estejam desprovidas de sentido;
  - Em tal caso, estamos também legitimidos a afirmar a existência de um modelo de T se e somente se T é consistente, à luz do Facto 1.

---

5. Finitismo e o Programa de Hilbert

Finitismo Hilbertiano:

1. Não há infinito actual;
2. Só as asserções da aritmética finitária têm sentido e são portadoras de valores de verdade;
3. A aritmética é acerca de numerais, entendidos como tipos de símbolos, os numerais são os únicos objectos matemáticos;
4. O nosso conhecimento acerca da aritmética finitária dá-se através da nossa "intuição da forma da nossa sensibilidade", pelo que tal conhecimento é sintético;
5. Teorias matemáticas são legítimas se e somente se forem extensões conservativas da aritmética finitária e somente se forem consistentes.

- *O Programa de Hilbert*:
  1. Objectivo do programa: Demonstrar, na aritmética finitária, que as diferentes teorias matemáticas vigentes estão são legítimas, mesmo as de carácter infinitário;
  2. A ideia:
     (a) Frases de uma teoria podem ser codificadas como frases acerca dos números naturais;
     (b) A propriedade de ser uma consequência sintáctica dos axiomas da teoria pode também ela ser codificada como um predicado acerca dos números naturais;
     (c) Assim sendo, pode usar-se a aritmética finitária para demonstrar que as teorias matemáticas vigentes são extensões conservativas da aritmética finitária;
       - Que uma teoria é uma extensão conservativa da aritmética finitária seria deste modo um

teorema da aritmética finitária;
    - No mínimo, a consistência da teoria seria um teorema da aritmética finitária;
  - (!) (! A ideia é genial !)
3. Como proceder:
   (a) Regimentar as diferentes teorias matemáticas numa linguagem formal, distinguindo para isso os seus axiomas e modos inferenciais;
   (b) Demonstrar, na aritmética finitária, que as teorias em causa são extensões conservativas da aritmética finitária, ou pelo menos consistentes.

---

6. A Queda: Teoremas da Incompletude da Aritmética

6.1. Primeiro Teorema da Incompletude da Aritmética

Definição (Completude Sintáctica)**.** Uma teoria T é sintáticamente completa se e somente se, para toda a fórmula φ da teoria, $T \vdash \varphi$ ou $T \nvdash \varphi$.

- *Observação*:
  1. Completude semântica $\neq$ completude sintáctica;
  2. O Primeiro Teorema da Incompletude tem que ver com completude sintáctica, não com completude semântica.

Definição (Sub-teoria)**.** Uma teoria T_1 é uma subteoria de uma teoria T_2 se e somente se, para toda a fórmula φ de T_1, $T_1 \vdash \varphi$ somente se $T_2 \vdash \varphi$.

Definição (ω-Consistência)**.** Uma teoria T é ω-consistente se e somente se, não é o caso que há uma fórmula φ de T tal que $T \vdash \exists x \varphi(x)$ e, para todo número natural n, $T \vdash \neg\varphi(\overline{n})$, onde $\overline{n}$ é o númeral canónico de n (i.e., $\overline{n} =_{\mathrm{df}} \underbrace{S(\ldots(S}_{\times n}(0))))$.

- *Aritmética de Robinson* (**Q**):
  - Linguagem da lógica de primeira ordem suplementada com '0', 'S', '+' e '$\times$';
  - Axiomas:
    1. $\forall x(S(x) = 0)$
    2. $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$;
    3. $\forall y(y = 0 \vee \exists x(S(x) = y))$
    4. $\forall x(x + 0 = x)$;
    5. $\forall x \forall y(x + S(y) = S(x + y))$;
    6. $\forall x(x \times 0 = 0)$;
    7. $\forall x \forall y(x \times S(y) = (x \times y) + x)$.

- ○ Regras de inferência da lógica de primeira ordem.

- *Aritmética de Robinson e Aritmética de Peano (de primeira-ordem)*:
  1. Quando se acrescenta à aritmética de Robinson o AXIOMA-ESQUEMA DA INDUÇÃO obtém-se o sistema **PA**, a aritmética de Peano de primeira ordem;
  2. A aritmética de Peano de primeira-ordem é a teoria standard de primeira-ordem para a aritmética;

- *Comparação entre teorias aritméticas*:
  - ○ A aritmética de Robinson é uma subteoria de **PRA**;
  - ○ **PRA** é uma subteoria da aritmética de Peano;
  - ○ a aritmética de Peano é uma subteoria a teoria dos conjuntos ZF (quanto extendida com símbolos aritméticos definíveis explicitamente em termos de expressões de ZF).

Teorema 4 (Primeiro Teorema da Incompletude (Gödel))**.** *Para qualquer teoria T, se a aritmética de Robinson é uma subteoria de T, então, existe uma frase G_T, construída a partir de T, tal que:*
- *Se T é consistente, então $T \nvdash G_T$;*
- *Se T é ω-consistente, então $T \nvdash \neg G_T$.*

- *Observação*: G_T é uma fórmula com a seguinte propriedade:

$$T \vdash (G_T \leftrightarrow \neg Prov_T(\ulcorner G_T \urcorner))$$

  - ○ '$Prov_T(\varphi)$' é um predicado de números naturais que representa a propriedade de ser demonstrável em T;
  - ○ $\ulcorner G_T \urcorner$ é um número natural que representa a frase G_T.
  - ○ Intuitivamente, G_T afirma de si mesma que não é demonstrável.

- *Qual a relevância do Primeiro Teorema da Incompletude para o Programa de Hilbert?*
  - ○ A relevância do Primeiro Teorema da Incompletude para o Programa de Hilbert é disputada;
  - ○ Mas aqui vai um esboço de um argumento a mostrar que a suposição que uma teoria é legítima somente se é uma extensão conservativa de **PRA** leva a uma conclusão aparentemente absurda:
    1. Pelo Primeiro Teorema da Incompletude, se **PRA** é consistente e ω-inconsistente, há uma frase $G_{\mathbf{PRA}}$ de **PRA** tal que **PRA** $\nvdash G_{\mathbf{PRA}}$ e **PRA** $\nvdash \neg G_{\mathbf{PRA}}$
    2. Dado que a aritmética é a teoria fundacional da matemática, esta teoria é consistente, ω-consistente, e todos os seus teoremas são verdadeiros;
    3. $G_{\mathbf{PRA}}$ é verdadeira (uma vez que $G_{\mathbf{PRA}}$ "diz" que $G_{\mathbf{PRA}}$ não é demonstrável em **PRA**, e $G_{\mathbf{PRA}}$ não é demonstrável em **PRA**);
    4. Considere-se a teoria $\mathbf{PRA}^+$ que resulta de **PRA** ao acrescentar-se-lhe $G_{\mathbf{PRA}}$ como axioma extra;
    5. Os axiomas de $\mathbf{PRA}^+$ são, à partida, todos verdadeiros, na suposição que os axiomas de **PRA** são todos verdadeiros;
    6. Mas $\mathbf{PRA}^+$ não é uma extensão conservativa de **PRA**;
    7. Logo, $\mathbf{PRA}^+$ não está legitimada (!);

8. Raciocínio análogo mostra que **PRA**$^{++}$ nã está legitimada, **PRA**$^{+++}$ nã está legitimada, etc.
9. Mas, intuitivamente, todos os axiomas de **PRA**$^{+}$, **PRA**$^{++}$, **PRA**$^{+++}$, etc. são verdadeiros.

6.2. Segundo Teorema da Incompletude da Aritmética

Teorema 5 (Segundo Teorema da Incompletude de Gödel)**.** *Para toda a teoria* T*, se* **PRA** *é uma subteoria de* T *e* T *é consistente, então* $T \nvdash Con(T)$.

- *Observações*:
  1. $Con(T)$ é uma fórmula acerca de números naturais que representa a proposição que T é consistente (e.g., representa a proposição que '$0 = 1$' não é derivável em T);
  2. Como antes mencionado, **PRA** é mais forte que **Q**;
  3. o Segundo Teorema da Incompletude pode ser visto como resultando do Primeiro Teorema da Incompletude do seguinte modo:
     (a) $T \vdash (G_T \leftrightarrow \neg Prov_T(\ulcorner G_T \urcorner))$;
     (b) $T \vdash Con(T) \to G_T$, pela "aritmetização" em **PRA** do raciocínio do Primeiro Teorema da Incompletude, uma vez que se T é consistente, então G_T não é derivável em T, e portanto G_T é verdadeira (dado (a));
     (c) Suponha-se que $T \vdash Con(T)$. Em tal caso, $T \vdash G_T$ (por (b)).
     (d) Mas $T \nvdash G_T$, pelo Primeiro Teorema da Incompletude;
     (e) Logo, $T \nvdash Con(T)$ (por (c) e (d)).

- *Qual a relevância do Segundo Teorema da Incompletude para o Programa de Hilbert*:
  1. Se **PRA** é uma subteoria de T e $T \nvdash \varphi$, então **PRA** $\nvdash \varphi$;
  2. Logo, se T não demonstra a consistência de T, então **PRA** não demonstra a consistência de T;
  3. Em particular, **PRA** não demonstra a consistência de, entre muitas outras, as seguintes:
     - **PA**;
     - A teoria de conjuntos ZF;
     - **PRA**;
  4. Mais ainda, uma vez que **PRA** não demonstra a consistência destas teorias, então **PRA** também não demonstra que estas são extensões conservativas de **PRA**
     - Pois se **PRA** demonstrasse que estas teorias são extensões conservativas de **PRA**, então **PRA** demonstraria a consistência destas teorias.

- *A Queda do Projecto*: o programa de Hilbert falhou. A matemática infinitária não é justificável na base do finitismo (pelo menos não da forma através da qual o programa procurava justificar a matemática infinitária na base do finitismo).