Seminário #6: Formalismo e Deductivismo

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

- *O que vimos até agora?*
  1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo
     (a) Introdução ao Logicismo de Frege;
     (b) Teorema de Frege;
     (c) Paradoxo de Russell e NeoFregeanismo.
  * Análise de argumentos

- *Para hoje*:
  1. Formalismo
     (a) Formalismo de Termos;
     (b) Formalismo de Jogos;
  2. Deductivismo.

- *Questão*: Qual é a relação entre o conhecimento matemático e a manipulação de símbolos?

---

2. Formalismo

Formalismo: A matemática não contém noções semânticas; ou se as contém, estas são redutíveis a noções sintáticas.

2.1. Formalismo de Termos

Formalismo de Termos: As entidades matemáticas são entidades linguísticas. Em particular, as entidades matemáticas são idênticas aos seus nomes.

2.1.1. Noções importantes

- *Uso e menção*:
  - Quando um nome é usado, ele é usado para se referir a alguma coisa;
  - Quando um nome é mencionado, ele é mencionado para se referir ao próprio nome;
  - Exemplos:
    - Na frase 'O Bruno é do Benfica' o nome 'Bruno' é usado para se referir ao Bruno;
    - Na frase ''Bruno' tem cinco letras' o nome 'Bruno' é mencionado para se referir a si mesmo, i.e., ao nome 'Bruno', não ao adepto do Benfica.

- Formalismo de Termos, *Uso e Menção*:
  - Tipicamente quando uma nome é usado, ele é usado para se referir a algo diferente de si mesma;
  - O formalismo de termos toma os nomes da aritmética como sendo diferentes, na medida em que estes se referem às mesmas coisas quando usados e quando mencionadas;
  - Exemplo:
    - '2' refere-se a '2';
    - '2' menciona '2'.

- *Tipos e Tokens*: Entidades linguísticas podem ser tanto *tipos* como *tokens*
  - Exemplo: 'Bruno' e 'Bruno' são dois tokens (exemplares) da palavra(-tipo) 'Bruno'.
  - Tokens são entidades *concretas*;
  - Tipos são entidades *abstractas*;
  - Tipos são, ainda assim, entidades *quasi-concretas*:
    - Tipos linguísticos têm instanciações no espaço-tempo;
    - Outras entidades abstractas não têm, à partida, instanciações no espaço-tempo.

2.1.2. A matemática à luz do formalismo de termos

- *Tipos, não tokens*:
  1. Na expressão '$2 + 2 = 4$' ocorrem dois tokens do tipo '2';

2. Existem infinitos números naturais, mas a evidência não suporta a existência de infinitos tokens de numerais;
3. À partida, tipos parecem mais aptos que tokens para serem a referência de numerais.

- *Reinterpretação de asserções de identidade*: Um formalista de termos não pode interpretar '=', tal como esta expressào é utilizada em aritmética, do mesmo como esta expressão é commumente interpretada em contextos não aritméticos – i.e., como significando *é indêntico a*. E.g.:
  - $2 + 2 = 4$ é uma frase verdadeira da aritmética;
  - As expressões '$2 + 2$' e '4' são diferentes, quer estas sejam compreendidas como tipos quer como tokens.

- *Putativas asserções de identidade como asserções de redução*: Uma opção atractiva para o FORMALISMO DE TERMOS consiste em compreender putativas asserções de identidade como asserções acerca da existência de reduções de um termo a outro termo.
  - *Funções aritméticas*: Funções aritméticas são compreendidas em termos de regras de reescrita de termos. E.g.:
    1. $m + 0 \rightsquigarrow m$;
    2. $m + S(n) \rightsquigarrow S(m + n)$;
    3. $m \times 0 \rightsquigarrow 0$;
    4. $m \times S(n) \rightsquigarrow (m \times n) + m$.

- *Exemplo de uma redução*: $1 + 2 = 3$:
  1. $1 =_{\text{df}} S(0)$, $2 =_{\text{df}} S(S(0))$, $3 =_{\text{df}} S(S(S(0)))$.
  2. $$1 + 2 =_{\text{df}} S(0) + S(S(0)) \rightsquigarrow S(S(0) + S(0))$$ $$\rightsquigarrow S(S(S(0) + 0)) \rightsquigarrow S(S(S(0))) =_{\text{df}} 3$$

2.1.3. A favor e contra o FORMALISMO DE TERMOS

- *Porquê o* FORMALISMO DE TERMOS:
  1. A explicação para a relação da matemática com a manipulação de símbolos torna-se (relativamente) trivial;
  2. Existência de entidades matemáticas torna-se (relativamente) incontroversa;
  3. Não há grande dificuldade em explicar a verdade de proposições matemáticas;
  4. Explicação para o conhecimento matemático torna-se relativamente trivial:
     - Tal conhecimento consiste em conhecimento de expressões linguísticas, da relação entre estas, e de como manipulá-las;
     - A aplicabilidade da matemática torna-se também relativamente simples de explicar:

(a) Numerais são correlacionados com a ’ultima das coisas a ser contada, e assim fornecem o “número” das coisas a serem contadas;
(b) A função sucessor corresponde à adição de um elemento à colecção;
(c) Etc.

- *Objecções ao* FORMALISMO DE TERMOS:
  1. Não é claro como dar conta do conteúdo de frases aritméticas formuladas em termos do quantificador universal:
     - Regra mais natural para o quantificador universal parece ser algo como a seguinte regra de reescrita: $\forall x \varphi(x) \rightsquigarrow \varphi(1) \wedge \ldots \varphi(2) \wedge \ldots$
     - Mas não é possível reduzir expressões através desta regra, dadas as nossas capacidades finitas;
  2. São necessários infinitos numerais para dar conta da aritmética de Peano;
  3. No caso da análise real, nem sequer temos os nomes de todos os reais existentes. Como se compreendem assim afirmações acerca de todos os números reais?
     - À partida, construções de mais numerais como sequências infinitas de outros numerais, e outras estratégias similares, parecem comprometer-nos com entidades de carácter tão controverso quanto os números naturais;
     - Em particular, tais entidades não são quasi-concretas.

2.2. Formalismo de Jogos

Formalismo de Jogos: A aritmética consiste num jogo com regras sobre como manipular símbolos. As expressões da aritmética não possuem qualquer significado para lá daquele que possuem em virtude da forma como podem ser manipuladas de acordo com as regras.

2.2.1. A favor do Formalismo de Jogos

- *Porquê o* FORMALISMO DE JOGOS:
  1. A explicação para a relação da matemática com a manipulação de símbolos torna-se (relativamente) trivial;
  2. Dado que não há entidades matemáticas, não há qualquer embaraço em explicar a sua natureza;
  3. Dado que as frases da aritmética não têm significado, não é necessário explicar em virtude do quê as frases da aritmética têm valores de verdade específicos;
  4. Explicação para o conhecimento matemático torna-se relativamente trivial:
     - Tal conhecimento consiste em conhecimento de regras de jogos e como utilizar essas regras.

2.2.2. Objecções ao Formalismo de Jogos

- *É a aplicabilidade da matemática um problema?*
  1. Frege pensava que sim: se a prática da matemática fosse somente um jogo, o que garantiria a sua aplicabilidade?
  2. Resposta do formalismo de jogos:
     (a) Ainda que a escolha do jogo a jogar possa ser influenciada pelo desejo de aplicar a matemática na explicação de fenómenos empíricos, a prática da matemática é independente da sua aplicação;
     (b) É possível aplicar a matemática, enquanto jogo, ao mundo real, desde que haja "princípios-ponte" que relacionem as frases matemáticas com asserções acerca dos fenómenos em questão;
        - Tal modo de aplicação da matemática pode tornar bem mais curtas várias derivações de princípios acerca do mundo real para as suas consequências.

- *Consistência e Metateoria*:
  1. A utilidade da matemática, mesmo enquanto jogo, depende da sua consistência;
  2. Há por isso interesse em investigar se as teorias matemáticas presentemente estudadas são consistentes;
  3. Fazê-lo exige uma metateoria do sistema matemático a ser estudado;
  4. Essa metateoria tem todas as caracterîsticas de uma teoria matemática;
  5. A teoria tem como objecto um fenómeno matemático, a estrutura de jogos, e as suas frases acerca desse fenómeno têm significado;
  6. Logo, o formalismo de jogos é falso, pelo menos acerca das teorias matemáticas assumidas no estudo dos "jogos" matemáticos;
  7. As expressões dessas teorias têm significado, e as frases dessas teorias são verdadeiras ou falsas.

---

3. Deductivismo

Deductivismo: A matemática consiste na investigação das consequências deductivamente válidas de conjuntos de axiomas conjuntamente consistentes arbitrariamente escolhidos e formulados numa linguagem formal e não interpretada.

3.1. Noções preliminares

Definição (Assinatura)**.** Uma assinatura $\mathcal{L}$ (para uma linguagem de primeira ordem) consiste num conjunto de constantes individuais (nomes), termos para funções n-árias, para todo o $n \in \mathbb{N}$, e termos para relações n-árias, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Definição (Modelos)**.** Um *modelo* $\mathcal{M}$ baseado numa assinatura $\mathcal{L}$ (i.e., um $\mathcal{L}$-modelo) consiste no seguinte:
1. Um conjunto (não vazio) $D_{\mathcal{M}}$ (o domínio de $\mathcal{M}$)
2. Um objecto $c^{\mathcal{M}} \in D_{\mathcal{M}}$ para cada constante individual c em $\mathcal{L}$;
3. Uma função $f^{\mathcal{M}} : D^n_{\mathcal{M}} \to D_{\mathcal{M}}$, para todos os termos f para funções n-árias;
4. Uma relação $R^{\mathcal{M}} \subseteq D^n_{\mathcal{M}}$, para todos os termos R para relações n-árias.

- *Exemplo*:
  1. Assinatura $\mathcal{L}$:
     (a) '0' (constante individual);
     (b) 'S' (termo unário para a função sucessor);
     (c) '$+$' (termo binário para a função soma);
     (d) '$\times$' (termo binário para a função multiplicação)
  2. $\mathcal{L}$-modelo $\mathcal{M}$:
     (a) $D_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$;
     (b) $0^{\mathcal{M}} = 0$;
     (c) $S^{\mathcal{M}}$ é a função unária *sucessor*;
     (d) $+^{\mathcal{M}}$ é a função binária *adição*;
     (e) $\times^{\mathcal{M}}$ é a função binária *multiplicação*.

Definição (Variáveis de primeira ordem)**.** As variáveis de primeira ordem são as seguintes: 'x', 'y', 'z', 'u', 'w', com ou sem subscritos numéricos (e.g., 'x_1' e 'u_{57}' também são variáveis de primeira ordem).

Definição (Termos singulares)**.** Os termos singulares de $\mathcal{L}$ são os seguintes:
1. As variáveis de primeira ordem são termos singulares de $\mathcal{L}$;
2. As constantes individuais de $\mathcal{L}$ são termos singulares de $\mathcal{L}$;
3. Se f é um termo para uma função n-ária de $\mathcal{L}$ e $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ são termos singulares de $\mathcal{L}$, então $f(\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ é um termo singular de $\mathcal{L}$;
4. Nada mais é um termo singular de $\mathcal{L}$.

Definição (Fórmulas de primeira ordem)**.** As fórmulas de primeira ordem de $\mathcal{L}$ são as seguintes:
1. $\alpha^1 = \alpha^2$, onde os αs são termos singulares de $\mathcal{L}$;
2. $R\alpha^1, \alpha^2 \ldots, \alpha^n$, onde R é um termo para uma relação n-ária de $\mathcal{L}$ e os αs são termos singulares de $\mathcal{L}$;
3. $\neg\varphi$, onde φ é uma fórmula de primeira ordem de $\mathcal{L}$;
4. $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, onde φ e ψ são fórmulas de primeira ordem de $\mathcal{L}$;
5. $\forall v\varphi$ e $\exists v\varphi$, onde v é uma variável de primeira ordem;
6. Nada mais é uma fórmula de primeira ordem de $\mathcal{L}$.

- *Pergunta*: Quais das seguintes não são fórmulas de primeira ordem da assinatura $\mathcal{L}$?
  1. '$\forall x(S(x) + x = x)$';

2. ‘$\exists(y \wedge \forall x(S(x) + x = x))$;
3. ‘$\forall x((S(x) \wedge S(S(x))) = S(S(S(x))))$;
4. ‘$\exists y \forall x(S(x) = y)$.

Definição (Atribuição de Valores a Variáveis).
1. Uma atribuição de valores a variáveis de um modelo $\mathcal{M}$ é uma função que mapeia cada variável v para um elemento $(v)^\sigma$ de $D_\mathcal{M}$;
2. Se σ é uma atribuição de variáveis, v é uma variável e o é um elemento de $D_\mathcal{M}$, então $\sigma[o/v]$ é uma atribuição de variáveis tal como σ excepto que $\sigma[o/v](v) = o$.

Definição (Denotação de termos singulares). A denotação de um termo singular α de $\mathcal{L}$ num modelo $\mathcal{M}$ relativa a uma atribuição de variáveis σ, $(\alpha)^{\mathcal{M},\sigma}$, é definida da seguinte forma:
1. α é uma constante individual: $(\alpha)^{\mathcal{M},\sigma} = (\alpha)^\mathcal{M}$;
2. α é uma variável: $(\alpha)^{\mathcal{M},\sigma} = (\alpha)^\sigma$;
3. $\alpha = f(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$: $(f(\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n))^{\mathcal{M},\sigma} = f^\mathcal{M}((\beta^1)^{\mathcal{M},\sigma}, (\beta^2)^{\mathcal{M},\sigma}, \ldots, (\beta^n)^{\mathcal{M},\sigma})$.

- *Exemplo*: Seja $\sigma(x) = 1$. Então:

$$(S(S(x)))^{\mathcal{M},\sigma} = S^\mathcal{M}((S(x))^{\mathcal{M},\sigma}) = S^\mathcal{M}(S^\mathcal{M}(x)^{\mathcal{M},\sigma}) = S^\mathcal{M}(S^\mathcal{M}(x)^\sigma) = S(S(1)) = 3$$

Definição (Satisfabilidade num modelo). Uma fórmula φ de primeira ordem de $\mathcal{L}$ onde não ocorrem variáveis é satisfeita num modelo $\mathcal{M}$ e atribuição de valores a variáveis σ de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, \sigma \vDash \varphi$ se e somente se:
1. $(\alpha^1)^{\mathcal{M},\sigma} = (\alpha^2)^{\mathcal{M},\sigma}$, se φ é a fórmula $\alpha^1 = \alpha^2$;
2. $\langle(\alpha^1)^{\mathcal{M},\sigma}, (\alpha^2)^{\mathcal{M},\sigma}, \ldots, (\alpha^n)^{\mathcal{M},\sigma}\rangle \in (R)^\mathcal{M}$, se φ é a fórmula $R\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$;
3. $\mathcal{M}, \sigma \nvDash \psi$, se φ é a fórmula $\neg\psi$;
4. ($\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$ e $\mathcal{M}, \sigma \vDash \chi$), se φ é a fórmula $\psi \wedge \chi$;
5. ($\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$ ou $\mathcal{M}, \sigma \vDash \chi$), se φ é a fórmula $\psi \vee \chi$;
6. ($\mathcal{M}, \sigma \nvDash \psi$ ou $\mathcal{M}, \sigma \vDash \chi$), se φ é a fórmula $\psi \rightarrow \chi$;
7. ($\mathcal{M}, \sigma \vDash \psi$ se e somente se $\mathcal{M}, \sigma \vDash \chi$), se φ é a fórmula $\psi \leftrightarrow \chi$;
8. (existe o tal que $o \in D_\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}, \sigma[o/v] \vDash \psi$), se φ é a fórmula $\exists v\psi$;
9. (para todo o o, se $o \in D_\mathcal{M}$, então $\mathcal{M}, \sigma[o/v] \vDash \psi$), se φ é a fórmula $\forall v\psi$.

Definição (Verdade num modelo). Uma fórmula φ é verdade num modelo, $\mathcal{M} \vDash \varphi$, se e somente se, para toda a atribuição de variáveis σ do modelo, $\mathcal{M}, \sigma \vDash \varphi$.

- *Exercício*:

1. Considerem o seguinte modelo $\mathcal{M}$:
   (a) $D_\mathcal{M} = \mathbb{N}$;
   (b) $0^\mathcal{M} = 2$;
   (c) $S^\mathcal{M}$ é a função *sucessor*;
   (d) $+^\mathcal{M}$ é uma função binária tal que, para todo o m e n em $\mathbb{N}$, $+^\mathcal{M}(m, n) = max(m, n) + 1$;
2. É o caso que:

(a) $\mathcal{M} \models S(0) + S(S(0)) = S(S(S(0)))$?
(b) $\mathcal{M} \models 0 + 0 = S(0)$?
(c) $\mathcal{M} \models S(0 + S(0)) = S(S(0))$?

Definição (Consequência modelo-teorética). Onde Γ é um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ e φ é uma fórmula de $\mathcal{L}$, φ é uma consequência modelo-teorética de φ, $\Gamma \models \varphi$, se e somente se, para todos os modelos $\mathcal{M}$ baseados em $\mathcal{L}$ e para todas as atribuições de variáveis σ de $\mathcal{M}$, se $\mathcal{M}, \sigma \models \gamma$ para todas as frases em Γ, então $\mathcal{M}, \sigma \models \varphi$.

- *Consequência modelo-teorética e consequência lógica*: A posição standard é que uma frase φ de uma assinatura $\mathcal{L}$ é uma consequência lógica de um conjunto de frases Γ de $\mathcal{L}$ se e somente se $\Gamma \models \varphi$.
  * A consequência modelo-teorética e a *consequência sintáctica* coincidem no caso de linguagens de primeira ordem.

3.2. A matemática à luz do DEDUCTIVISMO

- *O conteúdo de frases matemáticas*:
  1. Cada frase φ de primeira ordem de uma assinatura $\mathcal{L}$ determina a propriedade $\hat{M}(\mathcal{M} \models \varphi)$, isto é, a propriedade que um modelo $\mathcal{M}$ tem quando φ é verdadeira em $\mathcal{M}$.
  2. O conteúdo de uma frase matemática φ é a propriedade $\hat{M}(\mathcal{M} \models \varphi)$.

- *Conhecimento matemático*:
  1. A matemática consiste na investigação de que frases de teorias matemáticas são consequências lógicas dos axiomas da teoria;
     - Para que esta investigação seja realizada com o rigor necessário as frases da linguagem devem ser regimentadas numa linguagem (tipicamente, numa linguagem de primeira ordem) que permita discernir se os teoremas da teoria são de facto consequências lógicas dos axiomas;
     - Tal investigação é independente do significado das expressões não lógicas que ocorrem nas frases
     - E.g., o trabalho matemático em geometria é independente do significado dos primitivos da teoria (e.g., é independente do significado de, respectivamente 'ponto' e 'linha');
  2. O conhecimento dado por uma teoria matemática consiste no conhecimento que todo o modelo que tem todas as propriedades correspondentes aos axiomas da teoria tem a propriedade correspondente a qualquer um dos teoremas da teoria;
  3. Neste sentido, conhecimento matemático é conhecimento lógico.

- *Como a matemática tipicamente procede*:
  1. Primeiro identifica-se um modelo $\mathcal{M}$ de interesse;
     - Este pode ser um modelo cujo domínio possui objectos concretos (localizados no espaço-tempo e com eficácia causal) ou um modelo cujo domínio possui objectos abstractos, se houver tais objectos);

2. Depois isola-se um conjunto de princípios que se julga serem verdadeiros acerca do modelo $\mathcal{M}$ previamente isolado;
3. Esses princípios passam a ser os axiomas de uma teoria matemática;
4. Depois investiga-se que propriedades um qualquer modelo $\mathcal{N}$ tem na suposição que $\mathcal{N}$ possui todas as propriedades que correspondem aos axiomas da teoria;
5. Tal investigação é independente de se o modelo inicial, $\mathcal{M}$, tem de facto todas as propriedades que correspondem aos axiomas da teoria.

3.3. A favor do DEDUCTIVISMO

- *Pontos e linhas*:
  - A concepção deductivista da matemática dá conta de modo particularmente feliz dos desenvolvimentos na geometria não-Euclideana;
  - De acordo com Hilbert, os axiomas da geometria são tanto acerca de pontos e linhas como acerca de cadeiras e mesas. O que interessa é como os axiomas podem ser interpretados;
  - Para a matemática, é irrelevante quais são os princípios que são verdadeiros acerca do espaço físico. Essa é uma questão *empírica* a ser averiguada por uma ou outra ciência natural, não pela matemática;
    - Intuições, físicas ou outras, não têm lugar em matemática.

- *Porquê o* DEDUCTIVISMO:

1. O DEDUCTIVISMO não tem qualquer compromisso com entidades abstractas;
   - o DEDUCTIVISMO está somente comprometido com a tese que se houver sistemas com determinadas propriedades, então há sistemas com outras propriedades;
2. A explicação para o conhecimento matemático fornecida pelo DEDUCTIVISMO alinha particularmente bem com muita da prática matemática corrente;
3. O conhecimento matemático é robusto na medida em que é conhecimento lógico;
   - A abordagem deductivista deixa de lado intuições muito pouco robustas acerca de noções como 'coisas que não têm partes' e teses como a tese que 'o todo é maior que as partes';
   - O que interessam são as consequências *lógicas* do que se postulou.

3.4. Objecções ao DEDUCTIVISMO

- *Interpretação fundacional vs. interpretação estrutural de axiomas*:
  - Interpretação fundacional: axiomas enquanto asserções acerca do mundo;
  - Interpretação estrutural: axiomas enquanto propriedades de modelos.

- *Objecção: História da matemática*:

1. A história da matemática revela inúmeras instâncias em que era dada uma interpretação fundacional aos axiomas da teoria em causa, e em que muitos dos passos dados eram justificados não à luz da lógica mas sim por juízos acerca do tópico em causa;
2. O que estavam esses teóricos a fazer, se isso não era matemática?

- *Objecção: metamatemática*:
  1. São necessárias teorias que assegurem quais são os passos inferenciais que correspondem a consequências lógicas (tipicamente, a da teoria da demonstração ou a teoria dos modelos);
  2. Estas teorias têm compromissos com a existência de entidades de carácter não dissimilar ao carácter de números. Estas teorias estão também comprometidas com a verdade de proposições de carácter similar, senão ainda mais controverso, que os compromissos da aritmética;
  3. À partida, essas teorias são teorias matemáticas. Mas o seu uso parece requerir que os seus axiomas sejam interpretados de modo fundacional.
     - Caso contrário, como podem os passos inferenciais realizados em matemática estar justificados?

- *Objecção: existência de modelos*:
  1. As propriedades de modelos nas quais os matemáticos estão tipicamente interessados não têm instâncias no mundo natural;
  2. Mas é importante mostrar que as propriedades determinadas pelos axiomas de uma teoria têm instâncias (i.e., que são instanciadas por algum modelo) – pelo menos instâncias possíveis. Caso contrário a matemática torna-se totalmente desinteressante;
     - Os matemáticos tipicamente *procuram mostrar* que propriedades determinadas por conjuntos de axiomas de uma teoria são de facto instanciadas;
     - Para tal "constroem" modelos a partir de entidades cuja existência tomam como adquirida e de princípios que tomam como sendo verdadeiros acerca dessas entidades;
       - Tipicamente os matemáticos apelam à teoria dos conjuntos para demonstrar que as propriedades determinadas pelos axiomas de uma teoria são instanciadas por modelos que têm no seu domínio conjuntos.
  3. Uma vez que as propriedades de modelos em que os matemáticos estão interessados tipicamente não têm instâncias no mundo natural, o que demonstra que estas propriedades têm instâncias são modelos que têm no seu domínio entidades matemáticas, e acerca das quais axiomas *fundacionais* são verdadeiros.