Seminário #4: Paradoxo de Russell e NeoFregeanismo

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

- *O que vimos atè agora?*
  1. Introdução ao Logicismo de Frege;
  2. Teorema de Frege:
     (a) Os elementos necessários para a redução da aritmética à lógica:
        i. Análise dos primitivos da aritmética em termos lógicos;
        ii. Sistema lógico de dedução;
        iii. Axiomas lógicos
        iv. Demonstração que os axiomas da aritmética são deriváveis dos axiomas lógicos mais definições no sistema lógico de dedução.
     (b) Teorema de Frege: A aritmética de Dedekind-Peano de segunda odem é uma consequência do princípio de Hume mais definições na lógica de segunda ordem;
     (c) Porquê pensar que o Teorema de Frege demonstra a redução da aritmética à lógica?
     (d) O que mostra o Teorema de Frege acerca da natureza das proposições aritméticas e do conhecimento aritmético.

- *Para hoje*:
  1. A queda do Logicismo de Frege
  2. NeoFregeanismo

- *Questões para hoje*:

1. Qual a justificação para o Princípio de Hume?
2. É o Princípio de Hume analítico? É o Princípio de Hume uma verdade *lógica*?

---

2. Paradoxo de Russell

2.1. Teoria Ingénua dos Conjuntos

- *Teoria Ingénua dos Conjuntos*: A *teoria ingénua dos conjuntos* (proposta, entre outros, por Cantor, na segunda metade to séc. XIX) assume a verdade do seguinte princípios:

Extensionalidade: $\forall x \forall y((Cx \wedge Cy) \rightarrow (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in z \in y) \rightarrow x = y))$.

Princípio Ingénuo de Compreensão: $\exists x(Cx \wedge \forall y(y \in x \leftrightarrow \varphi))$
(i.e., $\exists x(x = \{y : \varphi\})$, onde x não ocorre livre em φ).

2.2. Paradoxo de Russell

- *Problemas para o* Princípio ingénuo da compreensão:

Teorema 1 (Paradoxo de Russell (1901))**.** *O* princípio ingénuo da compreensão *é falso (implica uma contradição).*

Demonstração do Teorema 1. Suponha-se, para redução ao absurdo, que o princípio ingénuo da compreensão é verdadeiro. Considere-se a seguinte fórmula '$x \notin x$'. Pelo princípio da compreensão, o seguinte conjunto Russelliano existe (*conjuntos da forma* $\{x : \varphi \wedge x \notin x\}$ *são comumente chamados 'conjuntos Russellianos'*):

$$R =_{\text{df}} \{x : x \notin x\}.$$

Temos que $R \in R$ ou $R \notin R$. Suponha-se primeiro que $R \in R$. Em tal caso, R satisfaz a condição '$x \notin x$'. Logo, $R \notin R$. Suponha-se agora que $R \in R$. Em tal caso, R é uma das coisas que não pertence a si mesma. Logo, $R \notin R$. Assim, temos que $R \in R$ sse $R \notin R$. Contradição. Portanto, o princípio ingénuo da compreensão é falso. □

- *Ilustração do Paradoxo de Russell*: O Paradoxo do Barbeiro
  - O barbeiro da cidade é um homem da cidade que faz a barba a todos aqueles homens da cidade, e somente àqueles homens da cidade, que não barbeiam a si mesmos.
    - I.e., x é o barbeiro da cidade sse

$$x \text{ é um homem da cidade} \wedge \forall y(x \text{ barbeia } y \leftrightarrow (y \text{ é um homem da cidade} \wedge \neg(y \text{ barbeia } y))$$

  - Existe um barbeiro da cidade?
    1. O barbeiro da cidade faz a barba a si mesmo ou o barbeiro da cidade não faz a barba a si mesmo;

2. Se o barbeiro da cidade faz a barba a si mesmo, então o barbeiro da cidade não lhe faz a barba. Logo, o barbeiro da cidade não faz a barba a si mesmo;
3. Se o barbeiro da cidade não faz a barba a si mesmo, então o barbeiro da cidade é um daqueles homens da cidade a quem o barbeiro da cidade faz a barba. Logo, o barbeiro da cidade faz a barba a si mesmo;
4. Portanto, o barbeiro da cidade faz a barba a si mesmo se e somente se não faz a barba si mesmo;
5. Logo, o barbeiro da cidade faz a barba a si mesmo sse o barbeiro da cidade não faz a barba a si mesmo;
6. Contradição;
7. Não há tal coisa como o barbeiro da cidade (tal como o predicado 'barbeiro da cidade' foi definido).

2.3. Teoria dos Conjuntos Contemporânea e o Paradoxo de Russell

- *Sem o* PRINCÍPIO INGÉNUO DA COMPREENSÃO:
  1. A actual teoria standard de conjuntos é a teoria de Zermelo-Fraenkel – a teoria ZF – expandida com o axioma da escolha (C). A esta teoria chama-se 'teoria ZFC'
     - Em ZFC em vez do PRINCÍPIO INGÉNUO DA COMPREENSÃO temos o seguinte princípio como axioma:

AXIOMA DA SEPARAÇÃO: $\forall z \exists x (\forall y (y \in x \leftrightarrow y \in z \wedge \varphi))$
* Isto é, $\forall z(\exists x(x = \{y \in z : \varphi\}))$, onde x não ocorre livre em φ.

  2. Ao contrário do PRINCÍPIO INGÉNUO DA SEPARAÇÃO, o AXIOMA DA SEPARAÇÃO implica somente a existência de *subconjuntos* de conjuntos já existentes.

- *Conjuntos Russellianos e consequências do* AXIOMA DA SEPARAÇÃO:

Definição (Conjunto Universal)**.** Um conjunto U é um conjunto universal se e somente se $\forall x(x \in U \leftrightarrow Cx)$
* Isto é, dada EXTENSIONALIDADE, U é um conjunto universal se e somente se $U = \{x : Cx\}$.

Facto 1. *ZFC implica que não há um conjunto universal.*

Demonstração do Facto (1). Suponha-se, para redução ao absurdo, que há um conjunto universal U. Então, o AXIOMA DA SEPARAÇÃO garante a existência do seguinte conjunto Russelliano:

$$R = \{x : x \in U \ \& \ x \notin x\}.$$

Suponha-se que $R \in R$. Então, $R \notin R$. Suponha-se que $R \notin R$. Uma vez que R é um conjunto,

$R \in U$. Logo, $R \in U$ e $R \notin R$. Logo, $R \in U$. Assim, $R \in R$ sse $R \notin R$. Contradição. Logo, ZFC implica que não há um conjunto universal. □

2.4. Paradoxo de Russell e a LEI BÁSICA V

LEI BÁSICA V: $\forall F \forall G(\epsilon(F) = \epsilon(G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$.

Teorema 2. *O* PRINCÍPIO INGÉNUO DA COMPREENSÃO *é um teorema do sistema que contém com regras de inferência as regras de inferência da lógica de segunda ordem e como axiomas os axiomas da lógica de segunda-ordem mais a* LEI BÁSICA V.

Corolário 1. *A* LEI BÁSICA V *é falsa (implica uma contradição).*
* *Assumindo-se os axiomas da lógica de segunda-ordem e as regras de inferência da lógica de segunda-ordem.*

Demonstração do Corolário 1. É uma consequência óbvia do Teorema 1 e Teorema 2. □

---

3. LEI BÁSICA V e o Problema de César

PRINCÍPIO DE HUME: $\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow F \approx G)$.

- Teorema de Frege, PRINCÍPIO DE HUME *e* LEI BÁSICA V:
  1. O Teorema de Frege depende não da LEI BÁSICA V mas sim do PRINCÍPIO DE HUME;
  2. O PRINCÍPIO DE HUME é consistente se e somente se a aritmética de segunda-ordem de Dedekind-Peano for consistente.
  3. Frege considerava que o PRINCÍPIO DE HUME não possuía o carácter de um primeiro princípio lógico na base do "problema de César" (por exemplo).

- *O* Problema de César:
  1. Frege nota que o PRINCÍPIO DE HUME não decide identidades entre números quando essas identidades não são da forma $\#(F) = \#(G)$;
  2. Este é o 'problema de César': O problema de saber se o número de um conceito é ou não idêntico a César.

- *Porque é o* Problema de César *um problema?*:
  1. É óbvio que nenhum número natural é idêntico a César;
  2. Mas, uma vez que de acordo com o projecto Fregeano números são objectos lógicos, a evidência para a tese de que nenhum número natural é idêntico a César deverá provir não de intuições que

tenhamos acerca da natureza de números mas sim a partir de princípios lógicos básicos;

3. De acordo com Frege, a justificação para o PRINCÍPIO DE HUME, e para o seu carácter analítico, provém deste ser uma consequência lógica de um princípio (ou princípios) mais básico;
   ◦ Este princípio mais básico implica não apenas o PRINCÍPIO DE HUME mas também outros princípios que implicam a verdade ou falsidade de todas as proposicões acerca da identidade de números.

■ *A justificação de Frege para o* PRINCÍPIO DE HUME:

1. Frege tomava a justificação para a verdade e analiticidade do PRINCÍPIO DE HUME como sendo garantidos pelo facto de este ser uma consequência de um princípio "lógico" tomado como mais básico – a LEI BÁSICA V
2. Do ponto de vista de Frege, a inconsistência da LEI BÁSICA V retira a justificação para a verdade e analiticidade do PRINCÍPIO DE HUME
3. Do ponto de vista de Frege, a inconsistência da LEI BÁSICA V deita por terra o seu projecto de redução da matemática à lógica.

---

4. NeoFregeanismo

NEOFREGEANISMO:

1. O princípio de Hume é analítico;
2. A aritmética é analítica, uma vez que é redutível à lógica de segunda ordem + o PRINCÍPIO DE HUME.

4.1. Analiticidade sem redução à lógica

■ *Proposta NeoFregeana (em particular, de Wright & Hale)*:

1. A aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano não é redutível à lógica
   ◦ Em particular, o PRINCÍPIO DE HUME não é uma verdade lógica;
2. A aritmética de segunda ordem de Dedekind-Peano é *analítica* e portanto *priori*;
3. Existem números e estes são entidades abstractas.

■ *O* PRINCÍPIO DE HUME *é analítico*:

1. No PRINCÍPIO DE HUME, o lado esquerdo e o lado direito da bicondicional têm exactamente o mesmo significado, por *estipulação*;
2. Mais especificamente, o PRINCÍPIO DE HUME fixa o significado do operador '#':
   (a) De acordo com o PRINCÍPIO DA COMPOSICIONALIDADE (também proposto por Frege!) o significado de uma frase é uma funcão do significado das suas partes;

   (b) '#' tem como significado aquela função de conceitos para objectos que, conjuntamente com o significado de '=' e o significado de 'F' e 'G', faz com que '$\#(F) = \#(G)$' tenha o mesmo significado que '$F \approx G$'.

- *O* PRINCÍPIO DE HUME *é conhecível a priori*: Uma vez que no *princípio de Hume* o lado direito e o lado esquerdo têm o mesmo significado por estipulação, a verdade do *princípio de Hume* é conhecível a priori

- *O* PRINCÍPIO DE HUME *não é lógico*:
  1. A posição standard acerca de princípios lógicos é que estes não implicam a existência de entidades ("não têm compromissos ontológicos").
     - Princípios lógicos são verdadeiros seja o universo como for – são verdadeiros mesmo que o universo não contenha objectos.
  2. Mas o PRINCÍPIO DE HUME implica a existência de entidades.
     (a) O PRINCÍPIO DE HUME implica $\#(F) = \#(F) \leftrightarrow F \approx F$;
     (b) $F \approx F$ é uma verdade lógica;
     (c) $\#(F) = \#(F) \leftrightarrow F \approx F$ e $F \approx F$ implicam $\#(F) = \#(F)$;
     (d) $\#(F) = \#(F)$ implica $\exists x(x = \#(F))$.
  3. Mais a geral, o PRINCÍPIO DE HUME implica que existem infinitos objectos. Mas tais princípios são comumente tomados como não lógicos.

- *Números são abstractos*:
  1. Números são abstractos precisamente porque a sua existência é uma "consequência" de reconceptualizar o significado de '$F \approx G$' como o significado de '$\#(F) = \#(G)$;
  2. Números diferem assim de entidades concretas;
     - Contrariamente ao que sucede com entidades abstractas, a existência de entidades concretas não resulta simplesmente da reconceptualização de factos;
  3. Factos acerca de números são, em geral, parasíticos de factos acerca da relação entre conceitos que se aplicam a entidades concretas;
     - O que garante que o número de portugueses é igual, ou não, ao número de espanhóis é o facto de os conceitos *é português* e *é espanhol* serem, ou não, equinumerosos.
     - Ainda que números sejam entidades abstractas, sã ainda assim "baseadas" ou "enraizadas" no concreto.

- *O estatuto da Aritmética*:
  1. Os axiomas e teoremas da aritmética são todos eles analíticos na medida em que são consequências de leis lógicas, princípios analíticos e definições;
  2. Nesta medida as verdades da aritmética são conhecíveis a priori.

4.2. Dificuldades para o NeoFregeanismo

- *O problema de César*: Como sabemos se César é idêntico a algum número, se tudo o que nos dá acesso epistemico a números é o PRINCÍPIO DE HUME?
  - Resposta NeoFregeana:
    1. O PRINCÍPIO DE HUME é um critério de identidade para números;
    2. O PRINCÍPIO DE HUME não é um critério de identidade César e outros objectos;
    3. Portanto, há uma propriedade que números têm mas César e outros objectos não têm;
    4. Logo, nenhum número é idêntico a César nem a qualquer outro objecto cujo critério de identidade não seja dado pelo PRINCÍPIO DE HUME.

- *A objecção da má companhia*:
  1. O PRINCÍPIO DE HUME e a LEI BÁSICA V são ambos *princípios de abstracção*;
     - Como pode o PRINCÍPIO DE HUME ser analítico e a sua verdade ser conhecível a priori quando a LEI BÁSICA V é contraditória?
  2. Há princípios de abstracção que são todos eles individualmente consistentes mas conjuntamente inconsistentes:
     - Há princípios de abstracção que são verdadeiros só em universos finitos, enquanto que o PRINCÍPIO DE HUME é verdadeiro só em universos infinitos;
     - Quais os "bons" e os "maus" princípios de abstracção?

- *É a lógica de segunda-ordem realmente lógica?*
  1. A lógica de segunda-ordem, em particular os *princípios de compreensão* para conceitos e para relações implicam a existência de conceitos e relações correspondentes às formulas abertas da linguagem da lógica de segunda-ordem;
  2. Assim, tal como o PRINCÍPIO DE HUME, os princípios de abstracção têm compromissos ontológicos;
  3. A tese que os princípios de abstracção são lógicos ou analíticos é, por esta razão, controversa;
  4. Mas o Teorema de Frege depende dos princípios de abstracção.

---

5. Desafio

- *Desafio*: Escolham uma objecção ao NEOFREGEANISMO e apresentem uma resposta à objecção em defesa do NEOFREGEANISMO.