Seminário #3: Teorema de Frege

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

- *O que vimos até agora?*
  - Introdução ao Logicismo de Frege:
    1. O argumento linguístico de Frege para a existência de números;
    2. Acesso epistémico aos números:
       - o nosso acesso epistémico aos números dá-se através do nosso acesso epistémico à verdade do PRINCÍPIO DE HUME;
       - Conhecimento de relações de equinumerosidade entre números implicam relações de identidade entre números;
    3. A relação entre números e conceitos:
       - 0 é o número do conceito ser distinto de si mesmo
       - $n + 1$ é número do conceito ser igual a algum número m menor que $n + 1$;
    4. A natureza dos números naturais: nùmeros são nada mais, nada menos que conjuntos de conceitos;
    5. O argumento Fregeano para o carácter abstracto dos números:
       (a) Conceitos são abstractos;
       (b) Se todos os membros de um conjunto são abstractos, então o conjunto é abstracto;
       (c) Números são conjuntos de conceitos;
       $\therefore$ Números são abstractos.
    6. O argumento Fregeano para a existência necessária de números:
       (a) Se todos os elementos de um conjunto existem, então o conjunto existe;
       (b) Conceitos existem necessariamente;
       (c) Números são conjuntos de conceitos;

$\therefore$ Números existem necessariamente.

- *Questões para hoje*:
  1. Qual o argumento de Frege para a tese que a aritmética é redutível à lógica?
     - Em particular, o que é o Teorema de Frege?
  2. Como temos conhecimento da verdade das proposições da aritmética?
  3. Qual o modo da verdade das proposições da aritmética?

---

2. Redução da aritmética à lógica

2.1. Mãos à obra

- *Aritmética Dedekind-Peano de Segunda Ordem*:
  - Primitivos da teoria:
    1. '0': uma constante individual; denota o 0;
    2. 'P': um predicado binário; denota a relação sucessão;
    3. 'N': um predicado unário; denota o conceito ser um número natural;
  - Axiomas da teoria:
    1. $N0$;
    2. $\forall x \forall y((Nx \wedge Pxy) \rightarrow Ny)$
    3. $\forall x \forall y \forall z((Nx \wedge Pxy \wedge Pxz) \rightarrow y = z)$;
    4. $\forall x \forall y \forall z((Ny \wedge Pxy \wedge Pzy) \rightarrow x = z)$;
    5. $\forall x(Nx \rightarrow \exists y(Pxy))$;
    6. $\forall F((F0 \wedge \forall x \forall y((Nx \wedge Fx \wedge Pxy) \rightarrow Fy)) \rightarrow \forall x(Nx \rightarrow Fx))$.

- *Como reduzir a aritmética à lógica?*
  1. Analisar os primitivos da teoria utilizando somente expressões puramente lógicas;
     - Isto é, identificar os primitivos da teoria com objectos ou conceitos lógicos.
  2. Formular um sistema de demonstração (uma lógica) no qual todos os passos inferenciais são logicamente justificados;
  3. Distinguir princípios de carácter lógico e mostrar que destes se seguem, no sistema de demonstração isolado no passo 2, os axiomas da Aritmética de Dedekind-Peano de Segunda Ordem (após a substituição dos primitivos da teoria pelos seus definiens lógicos).

2.2. Análise dos primitivos da aritmética

- *Análise de zero*:
  - $0 \equiv \#\hat{x}(x \neq x)$;
    - Isto é, 0 é nada mais nada menos que o número do conceito ser distinto de si mesmo;

* estou a utilizar '$\varphi \equiv \psi$' para indicar que φ é nada mais, nada menos que ψ;

** Como veremos adiante, '#' é ela mesma uma expressão definível em termos de outras na teoria de Frege.

- *Análise da relação de sucessão*:
  - $Pxy \equiv \exists F \exists z(Fz \wedge x = \#\hat{u}(Fu \wedge u \neq z) \wedge y = \#\hat{u}(Fu))$.
    - Isto é, y ser o sucessor de x é nada mais nada menos do que haver um conceito F e um objecto z tais que:
      1. z é um F;
      2. y é o número de F;
      3. x é o número do conceito é um F mas não é z.

- *Análise de número natural*:

> **Definição** (Hereditariedade)**.** Um conceito F é hereditário, $Her(F)$ se e somente se $\forall x \forall y((Fx \wedge Pxy) \rightarrow Fy)$.

  - $Nx \equiv \forall P((P0 \wedge Her(P)) \rightarrow Px)$.
    - Isto é, x ser um número natural é nada mais, nada menos que x ter todos os conceitos hereditários que o 0 tem.

2.3. A lógica

- *Lógica de Segunda Ordem*: o sistema lógico de Frege consistia na lógica de segunda ordem, por ele descoberta
  - Antes de Frege havia a lógica aristotélica e a lógica dos estóicos (lógica proposicional)
    - A lógica aristotélica trata das relações entre frases da forma 'Todo o A é B', 'Nenhum A é B', 'Algum A é B' e 'Algum A não é B';
    - A lógica dos estóicos tratava das relações booleanas entre frases ('não', 'e', 'ou', 'se então', 'se e somente se', etc.);
  - A lógica de Frege engloba a lógica aristotélica e dos estóicos (ambas são sublógicas da lógica de Frege);
  - Mas a lógica de Frege é capaz de dar conta das relações lógicas entre frases com quantificadores iterados
    - Exemplo: a frase '0 é menor ou igual a 0, 0 é menor ou igual a 1 e 0 é menor ou igual 2' segue-se logicamente das frases:
      1. '$\exists x \forall y$(se y é um número natural, então x é um número natural menor ou igual a y)';
      2. '0, 1 e 2 são números naturais';
  - Nem a lógica aristotélica nem a lógica estóica são capazes de dar conta de relações lógicas entre frases nas quais quantificadores iterados ocorrem;

- Mas relações lógicas entre frases deste tipo são essenciais para as práticas inferenciais em matemática.

Definição (Lógica de Segunda Ordem)**.**
1. Axiomas da lógica proposicional:
   (a) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$;
   (b) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$;
   (c) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$.
2. Axiomas da lógica de primeira ordem:
   (a) Quantificadores:
      i. $\forall v\varphi \to \varphi^{\tau}_{v}$ (onde φ^{τ}_{v} é o resultado de substituir uniformemente as ocurrências livres de v em φ por τ e v é substituível por τ;
      ii. $\forall v((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall v(\psi))$ (onde v não ocorre livre em ψ);
   (b) **Abstracção de predicados de primeira ordem**: $\forall x(\hat{y}(\varphi) \leftrightarrow \varphi^{x}_{y})$;
   (c) *Identidade*:
      i. $x = x$;
      ii. $x = y \to (\varphi \to \varphi')$ (onde φ' é o resultado de substituir uma mais ocorrências de x por y em φ)
3. Axiomas da lógica de segunda ordem
   (a) Quantificadores:
      i. $\forall v(\varphi \to \varphi^{\rho}_{v})$ (onde φ^{ρ}_{v} é o resultado de substituir uniformemente as ocurrências livres de v em φ por ρ e v é substituível por ρ em φ);
      ii. $\forall V((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall V(\psi)))$ (onde V não ocorre livre em ψ);
   (b) **Abstracção de predicados de segunda ordem**: $\forall X(\hat{Y}(\varphi) \leftrightarrow \varphi^{X}_{Y})$;
   (c) **Princípios de Compreensão**:
      i. Conceitos: $\exists F\forall x(Fx \leftrightarrow \varphi)$ (onde φ é qualquer fórmula onde F não ocorra livre);
      ii. Relações: $\exists R\forall x\forall y(Rxy \leftrightarrow \varphi)$ (onde φ é qualquer fórmula onde R não ocorre livre);
4. Regras de Inferência:
   (a) Modus Ponens: Se φ e $\varphi \to \psi$ são teoremas, então ψ é um teorema;
   (b) Regras de Generalização: Se φ é um teorema, então $\forall v\varphi$ e $\forall V\varphi$ são teoremas.

2.4. O outro axioma lógico de Frege: a LEI BÁSICA V

- *Princípio acerca de conceitos e extensões*:
  - Os axiomas da lógica de segunda ordem são insuficientes para derivar os axiomas da aritmética de Dedekind-Peano de segunda-feira (mesmo quando os primitivos da aritmética são definidos de acordo com a proposta Fregeana);
  - Frege enriquece a sua teoria lógica com um princípio lógico (de acordo com Frege) acerca da relação entre conceitos e as suas extensões – a LEI BÁSICA V;
    * ‘$\epsilon(F)$’ denota a <u>extensão</u> do conceito F;
    ** Informalmente: $\epsilon(F) = \{x : Fx\}$.

LEI BÁSICA V: $\forall F\forall G(\epsilon(F) = \epsilon(G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx))$
  * Este é um caso especial do princípio a que Frege originalmente chamou de ‘lei básica V’.

- *Poder expressivo acerca de conjuntos da teoria de Frege*: Pertença e conjunto são definíveis na Teoria de Frege:

Definição (Pertença). $x \in y =_{\text{df}} \exists F(y = \epsilon(F) \wedge Fx)$

Definição (Conjunto). $Cx =_{\text{df}} \exists F(x = \epsilon(F))$

- *Definição de 'o número de'*: Frege define o operador '#' como um operador que envia conceitos de segunda ordem para as suas extensões:

Definição (O número de). $\#(F) =_{\text{df}} \epsilon(\hat{X}(X \equiv F))$

- *Poder deductivo acerca de conjuntos da teoria de Frege*: Na teoria de Frege é possível derivar princípios acerca de conjuntos como os seguintes:

Princípio da Extensionalidade: $\forall x \forall y((Cx \wedge Cy) \rightarrow (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y))$.

Lei das extensões: $\forall F \forall x(Fx \leftrightarrow x \in \epsilon(F))$

2.5. Teorema de Frege

Princípio de Hume: $\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow F \approx G)$.

- Lei Básica V *e* Princípio de Hume: A Lei Básica V, em conjunção com o sistema de Frege para a lógica de segunda ordem, implicam o Princípio de Hume

- *Redução da aritmética à lógica?*:

Teorema 1 (Teorema de Frege (Frege 1884)). *Os axiomas de Dedekind-Peano para a aritmética de segunda ordem, quando os seus primitivos são analisados de acordo com a proposta de Frege, são deriváveis do* Princípio de Hume *na lógica de segunda ordem.*

---

3. Redução da aritmética à lógica?

- *Redução da aritmética à lógica*: Frege interpretou o Teorema de Frege e a implicação do Princípio de Hume pela Lei Básica V como mostrando que a aritmética não é mais do que lógica.

- *Estatuto lógico das regras de inferência*: O estatuto lógico das regras de inferência da lógica de segunda ordem é relativamente incontroverso.

- *Estatuto lógico dos axiomas da lógica de segunda ordem*: Os axiomas da lógica de segunda ordem são aceites como lógicos na base de considerações como as seguintes:
  1. Os axiomas são verdadeiros e as expressões que figuram nestes são "lógicas";
     - Expressões lógicas: as expressões primitivas da lógica de segunda-ordem são lógicas na medida em que são:
       - universalmente aplicáveis (ao invés das expressões utilizadas em princípios das diferentes ciências); ou
       - Invariantes sob todas as transformações 1-1 do universo de discurso para si mesmo; ou
       - Etc.
  2. Os axiomas da lógica de segunda ordem são verdadeiros, e são-no meramente em virtude do seu significado (são analíticos);
  3. Os axiomas da lógica de segunda ordem são necessários sob qualquer reinterpretação das expressões não lógicas neles presentes.
  4. ...

- *É a* LEI BÁSICA V *uma lei lógica?*
  - Frege defendia que a LEI BÁSICA V era lógica uma vez que as expressões que ocorrem nesta lei são também elas universalmente aplicáveis (em qualquer ciência se fala de conceitos e extensões destes).

---

4. Desafio

- *Questões*:
  - Qual a relevância epistémica da redução da matemática à lógica, de acordo com Frege?
  - Concordam com Frege acerca da relevância epistémica da redução da aritmética à lógica?

---

5. Natureza das proposições aritméticas e do conhecimento aritmético

- *Necessidade*: Os teoremas da aritmética são necessários uma vez que consistem em leis gerais acerca de entidades necessárias.

- *A Prioricidade*: Os teoremas da aritmética são conhecíveis a priori uma vez que são acerca não de fenómenos empíricos mas sim dos conceitos através dos quais leis acerca de fenómenos empíricos são formuladas.

- *Analiticidade*: Teoremas da aritmética são analíticos, se as leis lógicas o forem;

  - Frege entendia ‘analiticidade’ de uma forma diferente àquela como a expressão é hoje utilizada. Uma frase é Frege-analítica se e somente se é uma consequência lógica de princípios lógicos gerais mais definições;
  - Logo, de acordo com a sua forma de entender ‘analiticidade’, as verdades matemáticas eram analiticamente verdadeiras.

Definição (Analiticidade Epistémica)**.** Uma frase é epistemicamente analítica se e somente se um agente está justificado a acreditar na sua verdade somente em virtude de apreender o seu significado.

- *Analiticidade epistémica e a justificação para os axiomas e teoremas da aritmética*:
  1. Conjectura: Frege tomava as leis lógicas (básicas), e definições, como sendo epistemicamente analíticas;
  2. A justificação epistémica para os axiomas e teoremas da aritmética advém do facto de estes serem consequências lógicas de frases epistémicamente analíticas.