SEMINÁRIO #2: INTRODUÇÃO AO LOGICISMO DE FREGE

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

1.1. Logicismo e Logicismo Fregeano

LOGICISMO (acerca da aritmética): A aritmética é redutível à lógica. Especificamente, as verdades da aritmética são logicamente redutíveis a verdades lógicas mais definições:

- Isto é, as verdades da aritmética são consequências lógicas de:
  - princípios lógicos básicos; e
  - definições.

LOGICISMO DE FREGE: Constituido pelo LOGICISMO (acerca da aritmética) e pelas seguintes teses:

1. REALISMO ACERCA DE VALORES DE VERDADE (das proposições aritméticas);
2. REALISMO ACERCA DE DISCURSO (aritmético);
3. NECESSITISMO ACERCA DE VALORES DE VERDADE (das proposições aritmética);

4. RACIONALISMO (acerca do conhecimento aritmético);
5. ANALITICIDADE (acerca das frases da aritmética);
6. REALISMO ACERCA DE OBJECTOS (em primeira instância, acerca dos números naturais);
7. NECESSITISMO ACERCA DE OBJECTOS (acerca de números naturais);
8. ABSTRACTA (acerca de números naturais).

1.2. Duas Questões

- *Questão*: Em que medida estamos justificados a acreditar em proposições da aritmética?
- *Resposta Fregeana*: Estamos justificados a acreditar em proposições da aritmética na medida em que proposições aritméticas são nada mais nada menos que proposições *lógicas*;
  1. As proposições da aritmética são verdadeiras independentemente de mentes na medida em que as proposições da lógica são verdadeiras independentemente de mentes;
  2. As proposições da aritmética são conhecíveis *a priori* na medida em que as proposições da lógica são conhecíveis *a priori*;
  3. As proposições da aritmética são necessárias na medida em que as proposições da lógica são necessárias;
  4. As proposições da aritmética são analíticas na medida em que as proposições da lógica são analíticas.

- *Questão*: Qual é a natureza das entidades aritméticas (i.e., dos números)?
- *Resposta Fregeana*: Números são objectos *lógicos*
  1. Números existem necessariamente na medida em que objectos lógicos existem necessariamente;
  2. Números não se encontram localizados no espaço-tempo e são causalmente ineficazes na medida em que objectos lógicos são causalmente ineficazes.

1.3. Defesa do Logicismo acerca da aritmética

- *Como se defende a tese logicista?* A abordagem de Frege é notável: Pondo as mãos à obra!
  1. Distinguindo as verdades lógicas (básicas) das restantes;
  2. Mostrando que as verdades da aritmética são consequências lógicas das verdades básicas da lógica em conjunto com definições nas quais as expressões utilizadas no definiens são todas de cariz lógico;
  3. Distinguindo a natureza da lógica como uma ciência que lida não com as leis da natureza mas sim com relações de carácter universal entre proposições e propriedades (conceitos);
     - É por este motivo que as proposições da aritmética são necessárias, conhecíveis a priori e analíticas(*):
  4. Distinguindo os objectos lógicos como aqueles cuja existência e identidade é uma consequência lógica da existência de relações particulares de equivalência;
     - É por este motivo que os números existem necessariamente e são abstractos.

- *O Frege pôs mesmo mãos à obra*:

1. É o inventor da lógica moderna (de primeira ordem e de ordem superior);
2. Muitas das posições que defendeu e argumentos que avançou são ainda o *cânone* em filosofia da lógica, filosofia da matemática, filosofia da linguagem, filosofia da mente e metafísica.

---

2. Existência dos Números Naturais

- *Distinção entre sujeito e predicado de frases*:
  - Predicados: '... está a correr', '... é do Benfica', '... é igual a cinco', '... é filho de ...', etc.
  - Sujeitos: 'João', 'Benfica', 'número sete', etc.

- *O Argumento Fregeano*:
  - Frege apresenta o seguinte argumento para a tese que existem números naturais:
    - Premissa 1: Os teoremas da aritmética são verdadeiros;
    - Premissa 2: Se uma frase na qual um predicado é aplicado a um sujeito é verdadeira, e o sujeito da frase é um termo singular, então existe um *objecto* que é idêntico ao referente desse termo singular;
      - Ser é ser o (referente do) sujeito de uma predicação verdadeira;
    - Premissa 3: Há frases verdadeiras da aritmética nas quais os seus termos singulares ocorrem (na posição de sujeito);
      - E.g., $0 = 0 + 0$, $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, etc.
    - Conclusão: Logo, os termos singulares da aritmética referem-se a objectos. Os números são os referentes dos termos singulares da aritmética
  - O Frege suporta a Premissa 1 na base da tese que os teoremas da aritmética não são mais que teoremas lógicos e da tese que os teoremas lógicos são verdadeiros.

---

3. Acesso Epistémico a Números Naturais

3.1. Princípios de Abstração

- *Como temos acesso epistémico aos números naturais?*
  - Resposta Fregeana:
    1. Temos acesso epistémico aos números naturais através do acesso à verdade de certas proposições;
    2. Em particular, temos acesso epistémico aos números naturais através do acesso à verdade de um *princípio de abstracção* para números.

Definição (Relacções de Equivalência). Uma relação binária R é uma relação de equivalência se e somente se:
1. *Reflexividade*: $\forall x(xRx)$;
2. *Transitividade*: $\forall x \forall y \forall z((xRy \land yRz) \rightarrow xRz)$;
3. *Simetria*: $\forall x \forall y(xRy \rightarrow yRx)$.

- *Quiz!*: Vão a `www.menti.com` e coloquem o código que vos irei (uma questão).

- *Princípios de Abstracção*: Princípios de abstracção são princípios com a seguinte forma (onde $\delta(\cdot)$ é uma função, $\delta(x)$ e $\delta(y)$ são objectos – as imagens de x e y, respectivamente, e $\sim$ é uma relação de equivalência):

$$\forall x \forall y (\delta(x) = \delta(y) \leftrightarrow x \sim y)$$

- *Princípios de Abstração dão acesso a condições de identidade entre objectos abstractos*:

$$\forall x \forall y (d(x) = d(y) \leftrightarrow x || y)$$

  (A direcção da linha x é igual à direcção da linha y se e somente se x é paralela a y)
  - Ficamos a conhecer condições de identidade de objectos abstractos ao sabermos que certas relações de equivalência obtém entre objectos concretos;
  - Identidades entre objectos abstractos redescrevem factos concretos que envolvem relações de equivalência.

3.2. Números de conceitos

- *Acerca de conceitos (propriedades) e objectos*:
  1. Frege chamava 'conceitos' às entidades que são o significado de expressões que ocupam a posição de predicado em frases;
     - Exemplos de predicados: '... está a correr', '... é do Benfica', '... é igual a cinco', '... é filho de ...', etc.
  2. Objectos são tipicamente as entidadades que são o significado de nomes próprios e outras expressões que ocorrem na posição de sujeito em frases
     - Exemplos de palavras que ocorrem na posição de sujeito: 'João', 'Benfica', 'número sete', etc.
  3. Para Frege conceitos e objectos são entidades de tipo distinto: conceitos são "insaturados"; objectos são "saturados"
     - Objectos saturam conceitos quando os conceitos se aplicam aos objectos
     - Exemplo:
       (a) o Benfica satura o conceito *é campeão* quando o conceito *é campeão* se aplica ao Benfica;
       (b) Proposições expressam que conceitos se aplicam a objectos;

- *Aplicação de números a conceitos*: Frege nota que números aplicam-se a conceitos.
  - Exemplos:
    - 'Três das árvores do meu jardim são de fruto';
    - 'Cinco jogadores foram expulsos';
    - 'Sete ministros faltaram à reunião', etc.
  - Estes factos podem ser redescritos da seguinte forma (onde $\#(\cdot)$ é uma função que mapeia um conceito para o número de coisas que cai sob o conceito):

- '#(árvores são de fruto) = 3';
- '#(jogadores expulsos) = 5';
- '#(ministros que faltaram à reunião) = 7'

- *Princípio de abstracção para números*:
  - Frege propõe um princípio de abstrac¸ão para números através da aplicação de números a conceitos
  - o principío proposto por Frege tem a seguinte forma:

$$\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow F \sim G)$$

  - Resta determinar a relação de equivalência $\sim$ relevante para determinar quando conceitos têm o mesmo número. Esta será a relação de *equinumerosidade*.

3.3. Equinumerosidade

- *Quiz!*: (uma questão)

Definição (Relação Funcional)**.** Uma relação binária R é *funcional* (i.e., é uma função) se e somente se $\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge xRz) \rightarrow y = z)$.

Definição (Relação Injectiva)**.** Uma relação binária é *injectiva* se e somente se $\forall x \forall y \forall z((xRy \wedge zRy) \rightarrow x = z)$.

Definição (Domínio de uma Relação)**.** Uma propriedade P (conjunto p) é o *domínio* de uma relação binária R se e somente se $\forall x(\exists y(xRy) \leftrightarrow Px)$ ($\forall x(\exists y(xRy) \leftrightarrow x \in p)$).

Definição (Imagem de uma Relação)**.** Uma propriedade P (conjunto p) é a *imagem* de uma relação binária R se e somente se $\forall x(\exists y(yRx) \leftrightarrow Px)$ ($\forall x(\exists y(yRx) \leftrightarrow x \in p)$).

Definição (Bijecção)**.** Uma relação R é uma bijecção entre uma propriedade P e uma propriedade Q (um conjunto p e um conjunto q) se e somente se:

1. R é funcional;
2. R é injectiva;
3. O domínio de R é P (p);
4. A imagem de R é Q (q).

Definição (Equinumerosidade)**.** Propriedades P e Q (conjuntos p e q) são *equinumerosas*, $P \approx Q$, se e somente se há pelo menos uma bijecção entre P e Q.

- *Exemplos*:

1. Bijecção entre a equipas titulares do Benfica e do Sporting na última jornada;
2. Bijecção entre números pares e números ímpares;
3. Bijecção entre os naturais e os inteiros.

3.4. Princípio de Hume

Princípio de Hume: $\forall F \forall G(\#(F) = \#(G) \leftrightarrow F \approx G)$
(onde 'H' denota um conceito, '$\#(H)$' denota o número do conceito denotado por 'H').

- *Acesso epistémico a números dá-se através do princípio de Hume*:
  - De acordo com Frege, é através da verdade do princípio de Hume que ficamos a conhecer condições de identidade de números;
  - Números de conceitos são idênticos se e somente se os conceitos são equinumerosos; Exemplo:
    - O número de jogadores do Sporting é equinumeroso com o número de jogadores do Benfica se e somente se os conceitos *jogador do Sporting* e *jogador do Benfica* são equinumerosos.

---

4. Interlúdio (mas importante): Tamanhos de Conjuntos

4.1. Teorema de Schröeder-Bernstein

Definição (Subpropriedade e subconjunto).
1. Uma propriedade P é uma subpropriedade de uma propriedade Q, $P \subseteq Q$, se e somente se $\forall x(Px \rightarrow Qx)$;
2. Um conjunto p é um subconjunto do conjunto q, $p \subseteq q$, se e somente se $\forall x(x \in p \rightarrow x \in q)$.

Definição (Pelo menos tão grande). A propriedade P (o conjunto p) é pelo menos tão grande quanto a propriedade Q (conjunto q), $P \preceq Q$ ($p \preceq q$), se e somente há uma subpropriedade Q' de Q (subconjunto q' de q) tal que $P \approx Q'$ ($p \approx q'$).

Teorema 1 (Schröeder-Bernstein). *Se $p \preceq q$ e $q \preceq p$, então $p \approx q$.*

Lema 1. *Se $p \preceq q$ e $q \preceq r$, então $p \preceq r$.*

4.2. Comparação de tamanhos de alguns conjuntos

Lema 2. $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}_0^+$.

Lema 3. $\mathbb{Q}_0^+ \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demonstração do Lema 3. Seja f uma função com domínio $\mathbb{Q}_0^+$ e conjunto de chegada $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{Q}_0^+$, $f(x) = \langle y, z \rangle$ se e somente se $x = \frac{y}{z}$ e para todo o $u, v \in \mathbb{N}$, se $v \leqslant z$ and $x = \frac{u}{v}$, então $v = z$. É claro que f é uma bijeção de $\mathbb{Q}_0^+$ para $\{y : \exists x(f(x) = y)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. □

Teorema 2. $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Demonstração do Teorema 2. Mostrar diagrama com Zig-Zag Cantoriano! O diagrama revela claramente que f é uma bijecção de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Uma função possível: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $f(0) = \langle 0, 0 \rangle$, e

$$f(n+1) = \begin{cases} \langle i+1, j-1 \rangle & \text{se } f(n) = \langle i, j \rangle \ \& \ j \neq 0 \\ \langle 0, i+1 \rangle & \text{se } f(n) = \langle i, j \rangle \ \& \ j = 0 \end{cases}$$

□

Corolário 1. $\mathbb{Q}_0^+ \approx \mathbb{N}$.

Demonstração do Corolário 1. Uma vez que $\mathbb{N} \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, segue-se que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$. E dado que $\mathbb{Q}_0^+ \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, segue-se que $\mathbb{Q}_0^+ \preceq \mathbb{N}$. Uma vez que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Q}_0^+$, segue-se que $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}_0^+$. □

Teorema 3.
1. $\mathbb{N} \preceq [0, 1[$;
2. $[0, 1[\not\preceq \mathbb{N}$.

Demonstração do Teorema 2. O caso 1 é trivial. Para o caso 2, note-se que para cada número n em $[0, 1[$ há exactamente um numeral com a forma $0.a^1, a^2, a^3, \ldots$, tal que $n = 0.a^1, ^2, a^3, \ldots$, onde cada a^i é um número natural entre 0 e 9, e $0.a^1, a^2, a^3, \ldots$ não termina numa sequência infinita de 9s.

Suponha-se, para reductio, que há uma bijecção f de $\mathbb{N}$ para $[0, 1[$. Logo, para número natural n temos que $f(n) = 0.a_n^1, a_n^2, a_n^3, \ldots$.

Considere-se a seguinte função g dos naturais para $\{0, 1\}$:

$$g(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Considere-se agora o número real *mau*, dado pela seguinte expansão decimal: *mau* $= 0.g(a_1^1)g(a_2^2)g(a_3^3)\ldots$.

Suponha-se que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) =$ *mau*. Em tal caso $a_n^n = g(a_n^n)$. Mas tal não é o caso. Logo, não existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) =$ *mau*. Mas como *mau* é um número real, f não é uma bijecção. Logo, $\mathbb{N} \not\approx [0, 1[$. Mas $\mathbb{N} \preceq [0, 1[$. Portanto, $[0, 1[\not\preceq \mathbb{N}$, por Schröeder-Bernstein. □

4.3. Teorema de Cantor

Teorema 4 (Teorema de Cantor)**.** *Para todo o conjunto x, $x \prec \wp(x)$.*

Demonstração do Teorema de Cantor. Suponha-se, para redução ao absurdo, que há uma função com domínio x e imagem $\wp(x)$. Considere-se o seguinte conjunto (cuja existência é garantida pelo AXIOMA DA SEPARAÇÃO):

$$C = \{y \in x : y \notin f(y)\}.$$

Claramente, $\forall y(y \in C \to u \in x)$. Logo, $C \in \wp(x)$. Portanto, existe um $y \in x$ tal que $f(y) = C$. Temos que $y \in C$ ou $y \notin C$. Suponha-se que $y \in C$. Assim, $y \notin f(y) = C$. Portanto, $y \in C$ somente se $y \notin C$. Suponha-se que $y \notin C$. Uma vez que $y \in x$, temos que $y \in C$, uma vez que y satisfaz a condição de pertença a C. Portanto, $y \notin C$ somente se $y \in C$. Logo, $y \in C$ se e somente se $y \notin C$. Contradição. Logo, não há uma função com dominínio x e imagem y. Logo, $x \prec y$. □

---

5. NATUREZA DOS NÚMEROS NATURAIS

5.1. Números naturais e equinumerosidade

- *Números naturais e equinumerosidade*:
  1. Usando '$\hat{x}(\varphi)$' para o conceito de ser um x tal que φ, Frege equaciona os números naturais com números de conceitos da seguinte forma:
     (a) $0 = \#(\hat{x}(x \neq x))$;
     (b) $1 = \#(\hat{x}(x = 0))$;
     (c) $2 = \#(\hat{x}(x = 0 \vee x = 1))$;
     (d) $3 = \#(\hat{x}(x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2))$;
     (e) $\ldots$

     Em geral, tem-se que:

$$n + 1 = \#(\hat{x}(x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots \vee x = n))$$

5.2. Conceitos, objectos e extensões

- *Conceitos têm extensões*: A extensão de um conceito consiste no conjunto de coisas às quais o conceito se aplica
  - Exemplo: A extensão do conceito *está no top três dos melhores futebolistas actuais* consiste no conjunto cujos elementos são o Cristiano Ronaldo, o Lionel Messi e o Robert Lewandowski.

- *Conjuntos são objectos*:

- Conjuntos têm elementos mas não se aplicam aos seus elementos:
  - Exemplo: o conjunto que contém o Cristiano Ronaldo, o Lionel Messi e o Robert Lewandowski não se aplica a nenhum dos seus elementos. O que se aplica a estes elementos são o conceito *pertence ao conjunto cujos elementos são o Cristiano Ronaldo, o Lionel Messi e o Robert Lewandowski* e o conceito *está no top três dos melhores futebolistas actuais*.
- Os membros de um conjunto são necessariamente membros desse conjunto. Contudo, em geral é contingente que uma propriedade se aplique a um determinado objecto;
  - O Cristiano Ronaldo pertence necessariamente ao conjunto {Ronaldo, Messi, Lewandowski};
  - É contingente que o Cristiano Ronaldo esteja no top três dos melhores futebolistas actuais.

5.3. Números são Conjuntos de Conceitos

■ *Números de conceitos*: Frege defende a seguinte identidade:

$$\#(F) = \{G : G \text{ é um conceito e } F \approx G\}$$

* Há números de conceitos que não são números naturais

5.4. Números são necessários e abstractos

■ *Números existem necessariamente*:

- Premissa 1: Conceitos existem necessariamente;
- Premissa 2: Se todos os elementos de um conjunto existem necessariamente, o conjunto existe necessariamente;
- Premissa 3: Números são conjuntos de conceitos;
- Conclusão: Logo, números existem necessariamente.

■ *Números são entidades abstractas*:

- Frege toma como óbvio o facto de números não terem localização espaço-temporal nem eficácia causal.
- Contudo, un argumento similar ao anterior encontra-se disponível a Frege:
  - Premissa 1: Se conjuntos têm localização, então conjuntos estão localizados onde os seus membros estão localizados, e se conjuntos têm eficácia causal, esta deriva dos seus membros;
  - Premissa 2: Conceitos não têm localização temporal nem eficácia causal;
  - Premissa 3: Números são conjuntos de conceitos;
  - Conclusão: Logo, números são abstractos.

---

6. Desafio

- *Desafio*: De acordo com Frege, o nosso acesso epistémico a entidades abstractas dà-se através de princípios de abstração. Mas, o que nos justifica a acreditar em princípios de abstracção?
  - *A fazer*: Apresentem um argumento a favor da verdade de princípios de abstracção (se possível, a favor da verdade do PRINCÍPIO DE HUME)
  - Link para Sala 1: `https://docs.google.com/document/d/1aHnzqZvV1Js8mMWA3RDHXPXVL-JwBN0wr86R73uv0gU/edit?usp=sharing`
  - Link para Sala 2: `https://docs.google.com/document/d/1SvF0cAmlYhvCeukBWuPYhoWxV_Q65vUxA6pdqrh1iBM/edit?usp=sharing`
  - Link para Sala 3: `https://docs.google.com/document/d/10lI12CEI5thBSdhbnDa-cSR6c0UPecNL0blvhth` `edit?usp=sharing`