Seminário #11: Indispensabilidade e Nominalismo

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

- *Ideias para o ensaio*: Confirmem comigo se os vossos planos para o ensaio vão na direcção daquilo que é esperado.

- *O que vimos até agora?*
  1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo

  (*) Análise de argumentos

  2. Finitismo e o Programa de Hilbert
  3. Lógica Intuicionista, o Intuicionismo de Brouwer, e Infinito Potencial
  4. Estruturalismo

- *Para hoje*:
  1. Argumento da Indispensabilidade;
  2. Teoria da Medição;
  3. Nominalismo e o Programa de Field;
  4. Reconstrução Nominalista e Representação Matemática;
  5. Conservatividade.

- *Questão*: É o uso da matemática em ciência dispensável?

2. Argumento da Indispensabilidade

- *Argumento da Indispensabilidade* (Quine, Putnam):
  1. As nossas teorias científicas quantificam existencialmente, de modo indispensável, sobre entidades matemáticas;
  2. Para que uma frase da forma $\exists x \varphi$ seja verdadeira,é necessário que haja pelo menos um objecto que satisfaça φ;
  3. Temos razão para acreditar no que nos é dito pelas nossas melhores teorias científicas;

  $\therefore$ Temos razão para acreditar que há objectos matemáticos.

- *Questão*: Que premissa do argumento da indispensabilidade rejeitam? Porquê?

---

3. Teoria da Medição

- *Representação em ciência*: A teoria da medição dá conta de um uso paradigmático da matemática em ciência – o uso representational por teorias científicas de entidades matemáticas e factos matemáticos.

Teoria Representacional da Medição: Medição consiste (em parte) na construção de funções de modelos empíricos relacionais para modelos numéricos relacionais.

3.1. Teoremas de Representação

- *Modelos empíricos e modelos relacionais*:
  - Um modelo empírico é um modelo cujo domínio consiste num conjunto de objectos "empíricos" e cujas relações consistem em relações "empíricas";
  - Um modelo matemático é um modelo cujo domínio consiste num conjunto de objectos matemáticos (tipicamente, o conjunto dos reais) e cujas relações consistem em relações matemáticas (tipicamente, relações entre números reais).

Definição (Homomorfismo)**.** Um homomorfismo entre um modelo $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ é uma função f tal que:
1. $f((c)^{\mathcal{M}}) = (c)^{\mathcal{N}}$;
2. $\langle o^1, \ldots, o^n \rangle \in (R)^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \langle f(o^1), \ldots, f(o^n) \rangle \in (R)^{\mathcal{N}}$;
3. $(g)^{\mathcal{M}}(\langle o^1, \ldots, o^n \rangle) = (g)^{\mathcal{N}}(\langle f(o^1), \ldots, f(o^n) \rangle)$.

- *Observações*:
  - Um isomorphismo é um homomorfismo 1-1.

- A noção de homomorfismo tipicamente usada em teoria dos modelos é mais fraca do que aquela que é utilizada pela TEORIA REPRESENTACIONAL DA MEDIÇÃO (a condição 2 é substituída por $\langle o^1, \ldots, o^n \rangle \in (R)^{\mathcal{M}} \Rightarrow \langle f(o^1), \ldots, f(o^n) \rangle \in (R)^{\mathcal{N}}$).

> **Definição** (Representação)**.** Um homomorfismo f de uma estrutura empírica $\mathcal{M}$ para uma estrutura matemática $\mathcal{N}$ é uma representação de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.

> **Definição** (Escala)**.** Se f é um homomorfismo de um modelo empírico $\mathcal{M}$ para um modelo matemático $\mathcal{N}$, então $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, f \rangle$ é uma escala de medição.

- *Exemplo: Temperatura*:
  - Seja D a relação empírica que obtém entre a, b, c e d quando a diferença entre a temperatura de a e a temperatura de b é maior que a diferença entre a temperatura de c e a temperatura de d;
  - Esta relação é tal que, para qualquer modelo empírico $\mathcal{M}$ que satisfaz os axiomas que governam D, existe um homomorfismo f de $\mathcal{M}$ para um modelo, com domínio $\mathbb{R}$, tal que $\langle a, b, c, d \rangle \in (D)^{\mathcal{M}}$ sse $\langle f(a), f(b), f(c), f(d) \rangle \in (D)^{\mathcal{N}}$, onde $(D)^{\mathcal{N}}$ é a seguinte relação nos reais:

$$\langle o^1, o^2, o^3, o^4 \rangle \in (D)^{\mathcal{N}} \text{ sse } o^1 - o^2 > o^3 - o^4.$$

    - Portanto, $\langle a, b, c, d \rangle \in (D)^{\mathcal{M}}$ sse $f(a) - f(b) > f(c) - f(d)$;
  - Uma escala de temperatura consiste num triplo $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, f \rangle$ onde $\mathcal{M}$ é um modelo empírico que satisfaz os axiomas que governam D e f é uma representação de $\mathcal{M}$ em $\mathcal{N}$.

- *Teoremas de Representação*: Um teorema de representação demonstra que se um modelo empírico satisfizer certas condições, então existe um homomorfismo entre esse modelo empírico e um modelo matemático particular.

- *Raciocínio "surrogativo"*: Teoremas de representação mostram que é possível utilizar modelos matemáticos específicos para realizar raciocínio "surrogativo" acerca de fenómenos empíricos.

3.2. Teoremas de Unicidade

- *Teoremas de Unicidade*:
  - Um teorema de unicidade oferece uma caracterização do conjunto dos homomorfismos de um modelo empírico $\mathcal{M}$ para um modelo matemático $\mathcal{N}$;
  - Esta caracterização tipicamente consiste em distinguir as transformações de um modelo matemático que são admissíveis, onde o conjunto Π das transformações admissíveis é caracterizado do seguinte modo:
    - se $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, f \rangle$ é uma escala, então $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, g \rangle$ é uma escala se e somente $g = \pi \circ f$ para algum $\pi \in \Pi$;

- Teoremas de unicidade dão conta do quão única é uma determinada representação de um modelo empírico num determinado modelo matemático ao indicarem que transformações do modelo matemático determinam novas representações do modelo empírico.

- *Exemplo: Temperatura*: Seja $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, f \rangle$ uma escala de temperatura tal que
  1. $D_{\mathcal{N}} = \mathbb{R}$; e
  2. $\langle o^1, o^2, o^3, o^4 \rangle \in D^{\mathcal{N}}$ sse $o^1 - o^2 > o^3 - 0^4$;

  Então, $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, g \rangle$ é uma escala de temperatura se e somente se $g = \pi \circ f$, onde $\pi(x) = \alpha \times x + \beta$, para algum real positivo α e real β

3.3. Significado Empírico

- *Significado empírico*:
  - Suponha-se que $\mathcal{M}$ é um modelo empírico representável em $\mathcal{N}$. Em tal caso, a aplicação de uma relação R de $\mathcal{N}$ aos elementos $f(o^1)$, $f(o^2)$, ..., $f(o^n)$ de $D_{\mathcal{N}}$, onde $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, f \rangle$ é uma escala, tem significado empírico (i.e., corresponde à existência de uma relação empírica entre os elementos o^1, ..., o^n do modelo empírico) se e somente se, para toda as escalas $\langle \mathcal{M}, \mathcal{N}, g \rangle$:

$$\langle g(o^1), \ldots, g(o^n) \rangle \in R$$

  - Caso tenhamos a unicidade de escalas dada em termos de transformações admissíveis, então é possível caracterizar significado empírico da seguinte forma:
    - a aplicação de uma relação R de $\mathcal{N}$ aos elementos $f(o^1)$, $f(o^2)$, ..., $f(o^n)$ de $D_{\mathcal{N}}$ tem significado empírico se e somente se, para todas as transformações admissíveis $\pi \in \Pi$, $\langle \pi \circ f(o^1), \ldots, \pi \circ f(o^n) \rangle \in R$.
- *Exemplo: Temperatura*: A relação o dobro da temperatura não tem significado empírico:
  - 6 é o dobro de 3 mas $1(6) - 1 = 5$ não é o dobro de $1(3) - 1 = 2$.

- *Tipos de escala*: Escalas podem ser caracterizadas em termos de transformações admissíveis:
  - *Escalas Absolutas*:
    - Única transformação é a função identidade;
    - Exemplos: Contagem, frequência relativa;
  - *Escalas de Rácios*:
    - Multiplicação por um qualquer real positivo;
    - Exemplos: Massa, distância;
  - *Escalas de Intervalos*:
    - Multiplicação por um qualquer real positivo e adição de um real arbitrário;
    - Exemplos: Temperatura, utilidade.

---

4. Nominalismo

Nominalismo de Field:

1. Não há entidades matemáticas;
2. Os teoremas de uma qualquer teoria matemática são, ou falsos, ou vacuamente verdadeiros;
3. A matemática é útil em ciência somente na medida em que permite efectuar raciocínio surrogativo expediente acerca de fenómenos empíricos.

4.1. A Defesa do Nominalismo

- *Rejeição da Indispensabilidade da Matemática*: Field defende o Nominalismo objectando ao argumento da indispensabilidade:
  1. O ónus da prova acerca da existência de entidades abstractas está da parte de quem propõe a sua existência;
  2. Entidades matemáticas, a existirem, são entidades abstractas;
  3. O único argumento "sério" a favor da existência de entidades matemáticas é o argumento da indispensabilidade;
  4. Mas o argumento da indispensabilidade não é sólido;

  ∴ Devemos rejeitar a existência de entidades matemáticas.

4.2. O Programa de Field

- *O programa*: Demonstrar a dispensabilidade da matemática em teorias científicas através dos seguintes passos:
  1. Oferecer reformulações nominalistas das teorias científicas vigentes;
  2. Demonstrar, na base destas reformulações nominalistas, que o uso de entidades matemáticas em ciência é nada mais que um uso "surrogativo";
     - Deste modo, discurso matemático pode ser entendido como nada mais que discurso ficcional, cuja utilidade está em permitir raciocínio surrogativo;
  3. Demonstrar que as teorias que resultam de acrescentar a matemática às reformulações nominalistas das teorias científicas são extensões conservativas destas teorias;
     - Mostra-se assim que raciocínio matemático não nos permite ganhar conhecimento para além daquele que está já contido nas ciências empíricas;
     - Embora a matemática seja útil em ciências, ela é, ainda assim, dispensável.

---

5. Reformulação Nominalista e Representação Matemática

5.1. Reformulação da Teoria Newtoniana da Gravitação

- *Reformulação Nominalista da Teoria Newtoniana da Gravitação*:
  - Como um primeiro passo no desenvolvimento do seu programa, Field oferece uma reformulação nominalista da teoria Newtoniana da gravitação;
  - Field demonstra vários teoremas de representação. Estes revelam, entre outras coisas, que:
    - Na reformulação nominalista do espaço-tempo Newtoniano este pode ser representado através de quádruplos de reais e relações específicas entre estes;
    - as reformulações nominalistas das noções de massa e carga da teoria Newtoniana da gravitação podem também elas ser representadas através de reais e relações específicas entre estes.

- *O uso da matemática em ciência*:
  1. Para cada frase φ da reconstrução nominalista C_N de uma teoria científica C, há uma frase φ' da teoria matemática C_M na qual C é originalmente formulada tal que $C_N \vdash \varphi$ se e somente se $C_N + C_M \vdash \varphi'$, onde $C_N + C_M$ é o resultado de combinar C_N com C_M;
  2. De premissas nominalista $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ o cientista obtém as frases matemáticas $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$;
  3. O cientista raciocina depois, usando a teoria matemática C_M, das premissas $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$ para uma conclusão ψ';
  4. O cientista depois vai de φ' para a sua equivalente nominalista ψ;
  5. O cientista conclui que ψ é verdade acerca do mundo empírico (dada a verdade de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$).

5.2. É a Reformulação de Field Realmente Nominalista?

- SUBSTANTIVALISMO *e* RELACIONISMO *acerca do espaço-tempo*:

SUBSTANTIVALISMO: O espaço-tempo existe <u>independentemente</u> da existência das coisas que (potencialmente) o ocupam e tem propriedades para além das propriedades das coisas que o ocupam.

RELACIONISMO: O espaço-tempo não consiste em entidades que existem independentendemente de objectos físicos. A estrutura espaciotemporal do universo é <u>totalmente determinada</u> pelas relações entre objectos (que não pontos espaciotemporais) e as suas mudanças de estados.

- *Field está comprometido com o* SUBSTANTIVALISMO: Os pontos espaciotemporais e as regiões (arbitrárias) compostas por estes pontos <u>realmente existem</u>, e a sua existência é independente da existência das coisas que os ocupam e das suas propriedades.

- *Problema: Pontos espaciotemporais entidades são entidades físicas, ou entidades matemáticas?*:
  - Na reconstrução Fieldiana da teoria Newtoniana da gravitação . . .

- . . . a cardinalidade dos pontos do espaço-tempo é a mesma que a dos reais;
- . . . a cardinalidade das regiões de espaço-tempo é a do conjunto potência dos reais;

◦ Um espaço-tempo com estas características, em particular com os seus compromissos infinitários, parece ser nada mais que um espaço matemático.

■ *Resposta de Field*:

◦ O problema com as teorias matemática não é a quantidade de objectos que existem de acordo com essas teorias mas sim o facto de os objectos que existem de acordo com essas teorias serem abstractos;

◦ Do mesmo modo uma teoria física não passa a ser uma teoria matemática por estar comprometida com a existência de um espaço-tempo com a cardinalidade dos reais;

◦ Mais ainda, pontos espaciotemporais não são entidades matemáticas mas sim entidades físicas. Embora sejam entidades teóricas isso não conta contra o seu estatuto de entidades físicas.

■ *Questão*: São os pontos espaciotemporais entidades concretas? Caso não o sejam, até que ponto é o seu carácter não-concreto um problema para o NOMINALISMO DE FIELD?

---

6. Conservatividade

CONSERVATIVIDADE: Para qualquer frase φ da linguagem da reconstrução nominalista C_N de uma teoria científica C, então $C_N + T \vdash \varphi$ somente se $C_N \vdash \varphi$, onde T é uma qualquer teoria matemática que faz parte da teoria científica C.

6.1. Contra a tese da CONSERVATIVIDADE

■ *A razão de Field a favor da tese da* CONSERVATIVIDADE: Seria incrível que factos acerca de objectos abstractos tivessem consequências acerca do mundo empírico.

■ *Teoremas da Incompletude sugerem a falsidade da tese da* CONSERVATIVIDADE: Asserções aritméticas podem ser expressas na reformulação Fieldiana da teoria Newtoniana da gravitação (Shapiro):

1. Escolha-se uma região do espaço-tempo para representar o número 1;
2. Os outros números podem ser representados através de cópias adjacentes deste intervalo de pontos espaciotemporais;
3. Uma frase de Gödel é assim formulável na linguagem da teoria nominalista;
4. Esta frase não é demonstrável na teoria nominalista;
5. Mas esta frase é demonstrável na teoria que resulta de acrescentar a teoria dos conjuntos à teoria nominalista;
6. Temos assim uma frase acerca do mundo empírico que é demonstrável somente quando se acrescenta uma teoria matemática à teoria nominalista.

6.2. Respostas Fieldianas

- *Resposta Fieldiana 1*:
  1. Argumentavelmente, as teorias físicas vigentes não utilizam todos os recursos da teoria de conjuntos;
  2. Assim, a não-conservatividade da teoria que resulta de acrescentar a teoria dos conjuntos à reconstrução nominalista da teoria Newtoniana da gravitação não implica a falsidade da tese da CONSERVATIVIDADE.

- *Resposta Fieldiana 2*:
  1. A reconstrução nominalista da teoria Newtoniana da gravitação é feita numa linguagem de segunda ordem;
  2. Mas a teoria de conjuntos é conservativa em relação à teoria nominalista quando a noção de consequência lógica empregue é a noção de consequência (semântica) da lógica de segunda ordem;
  3. A teoria dos conjuntos é útil na medida em que permite descobrir que a frase de Gödel é de facto uma consequência da teoria nominalista
     - A utilidade da matemática, e em particular da teoria dos conjuntos, advém de sabermos que o seu uso preserva verdade entre frases da teoria nominalista;
  4. Mas, na medida em que a teoria dos conjuntos é conservativa, esta é dispensável das nossas teorias científicas.

- *Questão*: Como objectariam a estas respostas de Field?