Seminário #10: Estruturalismo

Conteúdo

---

1. Preâmbulo

■ *Lembrete*: Têm que pensar em ideias concretas para o ensaio.

■ *O que vimos até agora?*

1. Logicismo de Frege e NeoFregeanismo

(*) Análise de argumentos

2. Finitismo e o Programa de Hilbert
3. Intuicionismo:
   - Dedução natural para a lógica intuicionista;
   - Intuicionismo de Brouwer;
   - Teoria dos modelos para lógica intuicionista;
   - Intuicionismo de Brouwer e lógica intuicionista;
   - Potencialismo estrito e lógica intuicionista.

■ *Para hoje*:

1. Reducionismo Conjuntista e o que números não poderiam ser;
2. Isomorfismo, Categoricidade e Estrutura;

3. ESTRUTURALISMO: Eliminativista e Não-Eliminativista, Ante Rem e Modal;
4. Objecções ao ESTRUTURALISMO.

- *Questão*: É a matemática a ciência dos padrões?

---

2. O que Números Não Poderiam Ser

2.1. Reducionismo Conjuntista

REDUCIONISMO CONJUNTISTA: Conjunção das seguintes teses:

1. As teorias matemáticas consistem em nada mais, nada menos, que teoria dos conjuntos "aplicada". Isto é:
   (a) Os primitivos de toda e qualquer teoria matemática são nada mais nada menos que noções definiíveis em teoria dos conjuntos;
   (b) Todas as verdades de qualquer teoria matemática são nada mais nada menos que verdades de teoria dos conjuntos, dadas as definições em termos de noções da teoria dos conjuntos;
2. As entidades matemáticas nada mais são que conjuntos puros.

Definição (Conjunto Puro)**.** Um conjunto é puro se e somente se todos os seus elementos são conjuntos puros.

2.2. Uma Redução da Aritmética à Teoria dos Conjuntos

- *Uma redução da aritmética à teoria dos conjuntos*:
  - $\omega_Z =_{\text{df}}$ o mais pequeno conjunto S tal que: $\varnothing \in S$ e $\forall x(x \in S \Rightarrow \{x\} \in S)$;
  - Os elementos de ω_Z são os ordinais finitos de Zermelo;
  - Uma tradução dos primitivos da aritmética de Peano para ZFC:
    1. $(0)^Z = \varnothing$;
    2. $(S(\alpha))^Z = \{(\alpha)^Z\}$;
    3. $(N)^Z = \omega_Z$;
    4. $(V)^Z = v'$, para toda a variável V de segunda ordem;
    5. $(F\alpha)^Z = (\alpha)^Z \in (F)^Z$;
    6. $(\neg\varphi)^Z = \neg(\varphi)^Z$;
    7. $(\varphi \wedge \psi)^Z = (\varphi)^Z \wedge (\psi)^Z$;
    8. $(v)^Z = v$, para toda a variável v de primeira ordem;
    9. $(\forall\tau\varphi)^Z = \forall(v)^Z(\varphi)^Z$, para toda a variável τ de primeira ou segunda ordem.
  - Dada a tradução Z, os teoremas da aritmética de Peano são todos eles teoremas de ZFC.

- *Exemplo*: Tradução de '$\forall x(N(x) \to N(S(x))$':

$$\begin{aligned}(\forall x(N(x) \to N(S(x))))^Z &= \forall x((N(x) \to N(S(x)))^Z)\\ &= \forall x((N(x))^Z \to (N(S(x)))^Z)\\ &= \forall x((x)^Z \in (N)^Z \to (S(x))^Z \in (N)^Z)\\ &= \forall x(x \in \omega_Z \to (S(x))^Z \in (N)^Z)\\ &= \forall x(x \in \omega_Z \to \{x\} \in \omega_Z)\end{aligned}$$

- *O que são os números naturais, de acordo com o* REDUCIONISMO CONJUNTISTA? Ideia:
  - $0 = \varnothing$;
  - $1 = \{0\} = \{\varnothing\}$;
  - $2 = \{1\} = \{\{\varnothing\}\}$;
  - $3 = \{2\} = \{\{\{\varnothing\}\}\}$;

    $\vdots$
  - $n + 1 = \{n\}$

2.3. Outra Redução da Aritmética à Teoria dos Conjuntos

- *Uma outra redução da aritmética à teoria dos conjuntos*:
  - $\omega_N =_{\text{df}}$ o mais pequeno conjunto S tal que: $\varnothing \in S$ e $\forall x(x \in S \Rightarrow x \cup \{x\} \in S)$;
  - Os elementos de ω_N são os ordinais finitos de von Neumann;
  - Uma outra tradução dos primitivos da aritmética de Peano para ZFC:
    1. $(0)^N = \varnothing$;
    2. $(S(\alpha))^N = (\alpha)^N \cup \{\alpha^N\}$;
    3. $(N)^N = \omega_N$;
    4. $(V)^N = v'$, para toda a variável V de segunda ordem;
    5. $(F\alpha)^N = (\alpha)^N \in (F)^N$;
    6. $(\neg\varphi)^N = \neg(\varphi)^N$;
    7. $(\varphi \wedge \psi)^N = (\varphi)^N \wedge (\psi)^N$;
    8. $(v)^N = v$, para toda a variável v de primeira ordem;
    9. $(\forall\tau\varphi)^N = \forall(\tau)^N(\varphi)^N$, para toda a variável τ de primeira ou segunda ordem.
  - Dada a tradução N, os teoremas da aritmética de Peano são todos eles teoremas de ZFC.

- *Exemplo*: Tradução de '$\forall x(N(x) \to N(S(x)))$':

$$\begin{aligned}(\forall x(N(x) \to N(S(x))))^N &= \forall x((N(x) \to N(S(x))))^N)\\ &= \forall x((N(x))^N \to (N(S(x)))^N)\\ &= \forall x((x)^N \in (N)^N \to (S(x))^N \in (N)^N)\\ &= \forall x(x \in \omega_N \to (S(x))^N \in (N)^N)\\ &= \forall x(x \in \omega_N \to x \cup \{x\} \in \omega_N)\end{aligned}$$

- *O que são os números naturais, de acordo com o* REDUCIONISMO CONJUNTISTA? Ideia:
  - $0 = \varnothing$;
  - $1 = 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\varnothing\}$;
  - $2 = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;
  - $3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$;

    $\vdots$
  - $n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

2.4. O que Números Não Poderiam Ser

- *"Embarrassment of riches"*:
  1. Temos não uma mas duas formas possíveis de reduzir a aritmética à matemática (de facto, há muitas mais reduções possíveis da aritmética à teoria dos conjuntos);
  2. Ambas as reduções têm consequências estranhas:
     (a) Na redução dada pela tradução Z, o sucessor de cada número contém exactamente esse número;
     (b) Na redução dada pela tradução Z, cada número contém todos os números que o precedem;
     (c) Mas é estranho pensar que o 2 literalmente contém o 1, ou que o 2 literalmente contém todos os elementos que o precedem;
  3. Nada parece decidir entre uma redução e a outra:
     - Porque razão é 2 idêntico a $\{\{\varnothing\}\}$ em vez de igual a $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$?
     - Que tipo de consideração decidiria entre uma redução e a outra?
  4. Mas o 2 não pode ser, simultaneamente, idêntico a $\{\{\varnothing\}\}$ e idêntico a $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

---

3. O que Números Talvez Sejam

3.1. Isomorfismo e Categoricidade

Definição (Isomorfismo entre Modelos)**.**
- Uma função f é um <u>isomorfismo</u> entre modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ de uma assinatura $\mathcal{L}$ se e somente se existe uma bijecção f entre $D_{\mathcal{M}}$ e $D_{\mathcal{N}}$ tal que:
  1. $f((c)^{\mathcal{M}}) = (c)^{\mathcal{N}}$, para toda a constante individual c de $\mathcal{L}$;
  2. $\langle o_1, \ldots, o_n \rangle \in (R)^{\mathcal{M}}$ sse $\langle f(o_1), \ldots, f(o_n) \rangle \in (R)^{\mathcal{N}}$, para todo o predicado n-ário R de $\mathcal{L}$;
  3. $f(g^{\mathcal{M}}(\langle o^1, \ldots, o^n \rangle)) = g^{\mathcal{N}}(\langle f(o^1), \ldots, f(o^n) \rangle)$, para todo o termo funcional n-ário f.
- Modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são <u>isomórficos</u>, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, sse há um isomorfismo entre $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$.

- *Exemplo*: São os modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ isomórficos?
  - $D_{\mathcal{M}} = \{1, 2, 3\}$;
  - $D_{\mathcal{N}} = \{4, 5, 6\}$;

- $(P)^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$;
- $(Q)^{\mathcal{N}} = \{4, 5\}$;
- $(Q)^{\mathcal{M}} = \{3\}$
- $(P)^{\mathcal{N}} = \{6\}$.

- *Isomorfismo e Estrutura*: Intuitivamente, se dois modelos são isomórficos, então eles têm exactamente a mesma "estrutura". O que mudam são as coisas que ocupam os "lugares" dessa "estrutura".

Definição (Categoricidade)**.** Uma teoria T é categórica se e somente, para todos os modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, se $\mathcal{M} \models T$ e $\mathcal{N} \models T$, então $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

- *Exemplo*: Considerem a seguinte teoria T:

$$T = \{\exists x \exists y(\forall z(z = x \vee z = y)), \exists x(Px \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg Px))\}.$$

É esta teoria categórica?

3.2. A "Estrutura" dos Naturais

Definição (Modelo simplesmente infinito)**.** Um modelo $\mathcal{M}$ é simplesmente infinito se e somente se $\mathcal{M} \models \mathbf{PA}_2$ (onde $\mathbf{PA}_2$ é a aritmética de Peano de segunda ordem).

Teorema 1 (Categoricidade da Aritmética (Zermelo 1988))**.** *Para todos os modelos $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são simplesmente infinitos, então $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

- *Categoricidade e Estrutura*:[1]
  - O Teorema da Categoricidade da Aritmética sugere que todos os modelos que satisfazem a aritmética de Peano de segunda ordem têm exactamente a mesma estrutura;
  - Assim, considerem os seguintes modelos:
    - Modelo $\mathcal{Z}$:
      1. $D_{\mathcal{Z}} = \omega_Z$;
      2. $(0)^{\mathcal{Z}} = \varnothing$;
      3. $(S)^{\mathcal{Z}}(o) = \{o\}$, para todo o elemento de $D_{\mathcal{Z}}$;
    - Modelo $\mathcal{N}$:
      1. $D_{\mathcal{N}} = \omega_N$;
      2. $(0)^{\mathcal{Z}} = \varnothing$;

[1] $\mathbf{PA}_2$ é ligeiramente diferente da teoria que foi apresentada no handout #3. Em vez de restringirmos os quantificadores a números naturais, os quantificadores de $\mathbf{PA}_2$ são irrestritos. E.g., o terceiro axioma diz simplesmente que $\forall x \forall y(S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$. Notem também que o resultado requer que a noção de satisfação por um modelo e atribuição de valores a variáveis seja estendida para fórmulas com quantificação de segunda ordem.

3. $(S)^{\mathcal{N}}(o) = o \cap \{o\}$, para todo o elemento de $D_{\mathcal{N}}$;

- ◦ À luz do Teorema da Categoricidade, podemos descrever a relação entre o elemento $\{\{\varnothing\}\}$ do modelo $\mathcal{Z}$ e o conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ do modelo $\mathcal{N}$ da seguinte forma:
  - Estes dois elementos ocupam o mesmo lugar nos seus respectivos modelos;
  - Em particular, ambos ocupam, nos seus respectivos modelos, o lugar de dois na estrutura dos números naturais.

---

4. Estruturalismo

> **Estruturalismo:** A matemática consiste no estudo de estruturas/propriedades estruturais de sistemas (modelos) de objectos.

- ■ Estruturalismo Eliminativista *vs.* Estruturalismo Não-Eliminativista:
  - ◦ Há várias posições caracterizadas como "estruturalistas" na literatura;
  - ◦ Uma grande divisão é entre posições eliminativistas e posições não-eliminativistas;
    - Estruturalistas eliminativistas:
      - Rejeitam a existência de estruturas (matemáticas);
      - Rejeitam a existência de entidades matemáticas;
      - Para os estruturalistas eliminativistas, a matemática procura determinar a verdade de frases gerais acerca de sistemas, que podem ou não ser satisfeitas por sistemas que actualmente existam;
    - Estruturalistas não-eliminativistas:
      - Defendem a existência de estruturas (matemáticas);
      - Equacionam objectos matemáticos com posições em estruturas.

4.1. Estruturalismo Ante Rem (não-eliminativista)

> **Estruturalismo ante rem** (Resnik, Parsons, Shapiro)**:**
> 1. A matemática consiste no estudo de estruturas (matemáticas);
> 2. Estruturas consistem num tipo de entidade "um em muitos";
>   - ■ Outros exemplos de entidades "um em muitos" incluem universais, propriedades e tipos;
> 3. Objectos matemáticos nada mais são que posições em estruturas;
> 4. Estruturas existem independentemente de existirem sistemas que as instanciem;
> 5. A natureza das posições de uma estrutura são determinadas pela natureza da estrutura. Em particular:
>   - ■ A natureza das posições de uma estrutura consiste na sua relação com as outras posições da estrutura.

- ■ *Acerca de estruturas e posições*:

- O ESTRUTURALISMO ANTE REM vê estruturas como análogas a grupos estruturados;
  - E.g.: o Conselho de Ministros, a a Assembleia da República, etc.
- Diferentes sistemas de objectos podem constituir estes grupos estruturados
  - E.g.: os membros do Conselho de Ministros podem mudar, de acordo com quem ganha as eleições. Mas isso não altera o Conselho de Ministros;
- Posições de estruturas são independentes de quem as ocupa:
  - E.g., os cargos do Conselho de Ministros são diferentes das pessoas que (temporariamente) ocupam esses) cargos.

- *Porquê o* ESTRUTURALISMO ANTE REM:
  1. *Aplicabilidade da matemática*:
     - a teoria dá conta de um modo relativamente directo do que está a acontecer no caso da tentativa de redução da aritmética à teoria dos conjuntos:
       - Diferentes sistemas, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$, exemplificam uma e a mesma estrutura – a estrutura dos naturais;
       - O conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ ocupa a posição de 2 no sistema $\mathcal{M}$ enquanto que o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ocupa a posição de dois no sistema $\mathcal{N}$.
     - Uma vez que a matemática é acerca de estruturas, não é surpreendente que a matemática seja aplicável ao mundo;
  2. *Se queres saber o que uma entidade matemática é, descobre o que ela "faz"*:
     - o ESTRUTURALISMO ANTE REM dá conta da intuição que é absurdo atribuir propriedades não estruturais a objectos matemáticos. E.g.:
       - É absurdo atribuir ao 1 a propriedade de ter o 0 como elemento;
       - É absurdo identificar o 2 dos naturais com o 2 dos reais;
     - Em geral, a ideia é que é absurdo atribuir tais propriedades a objectos matemáticos porque a estrutura em que eles se enquadram nada tem a dizer sobre se os objectos têm essas propriedades (ou porque o facto que objectos matemáticos são posições em estruturas imediatamente implica que é falso que esses objectos possuem as propriedades em causa).

4.2. Estruturalismo Modal (Eliminativista)

ESTRUTURALISMO MODAL (Hellman)**:**

1. Não há estruturas matemáticas, nem objectos matemáticos;
2. Os teoremas de cada teoria matemática são verdades acerca das entidades e sistemas, quaisquer que estes sejam, que possivelmente satisfazem os axiomas da teoria.

- *Exemplo*: o conteúdo dos teoremas da teoria T
  - Axiomas de T:
    1. $N0$;
    2. $\forall x(Nx \rightarrow NS(x))$;

- ○ Considere-se também o seguinte teorema φ de $\mathbf{PA}_2$: $N(S(0))$;
- ○ Faça-se a conjunção dos axiomas de T:
  - $N0 \wedge \forall x(Nx \rightarrow NS(x))$;
- ○ Coloque-se esta conjunção como antecedente e φ como consequente de uma condicional:
  - $N0 \wedge \forall x(Nx \rightarrow NS(x)) \rightarrow NS(0)$
- ○ Substitua-se 'N' por uma variável (fresca) de segunda-ordem, 0 por uma variável (fresca) de primeira ordem e S por uma variável funcional (fresca):
  - $(Y0 \wedge \forall x(Yx \rightarrow YS(x))) \rightarrow YS(0)$;
  - $(Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow YS(x))) \rightarrow YS(z)$;
  - $(Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow Yf(x))) \rightarrow Yf(z)$;
- ○ Quantifique-se universalmente o resultado:
  - $\forall Y((Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow Yf(x))) \rightarrow Yf(z))$;
  - $\forall z \forall Y((Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow Yf(x))) \rightarrow Yf(z))$;
  - $\forall f \forall z \forall Y((Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow Yf(x))) \rightarrow Yf(z))$;
- ○ Finalmente, 'necessite-se' a fórmula que se obteve:

  ($\star$) $\Box \forall f \forall z \forall Y((Yz \wedge \forall x(Yx \rightarrow Yf(x))) \rightarrow Yf(z))$.
- ○ De acordo com o ESTRUTURALISMO MODAL, ($\star$) é o que é de facto asseverado pelo teorema φde T. Esta frase não é acerca de objectos nem outras entidades específicas.

■ *Porquê invocar modalidade?*

- ○ Sem modalidade, a verdade dos axiomas e teoremas da matemática dependeria da existência de sistemas de objectos que os satisfizessem;
  - Se não existe nenhum sistema de objectos que satisfaça os axiomas da teoria, esta é trivialmente verdadeira;
- ○ Mas estruturalistas modais não estão comprometidos com a existência de sistemas de objectos que satisfaçam os axiomas:
  - Os objectos em tais sistemas seriam objectos matemáticos e os estruturalistas modais não estão comprometidos com a existência de objectos matemáticos;
  - Estruturalistas modais estão somente comprometidos com a possibilidade de existência de tais objectos.

■ *Porquê o* ESTRUTURALISMO MODAL:

1. *Evita compromissos com abstracta*;
2. *Dá conta da aplicabilidade da matemática*, uma vez que teorias matemáticas são acerca de propriedades estruturais de sistemas de objectos;
3. *Preserva realismo acerca de valores de verdade*;
4. Dá conta, de modo deflacionário, da ideia que a matemática consiste no estudo de estruturas.

5. Objecções ao Estruturalismo

5.1. Objecção ao Estruturalismo Modal

- *Eliminação de abstracta?*
  - De modo a que as teorias matemáticas não sejam vacuamente verdadeiras, tem que ser possível que haja entidades que satisfazem o antecedente de cada teorema modalizado;
    - Por exemplo, de modo a que

      $$\Box\forall f\forall z\forall Y((Yz \wedge \forall x(Yx \to Yf(x))) \to Yf(z))$$

      não seja vacuamente verdadeira o seguinte tem que ser o caso:

      $$\Diamond\exists f\exists z\exists Y(Yz \wedge \forall x(Yx \to Yf(x)))$$

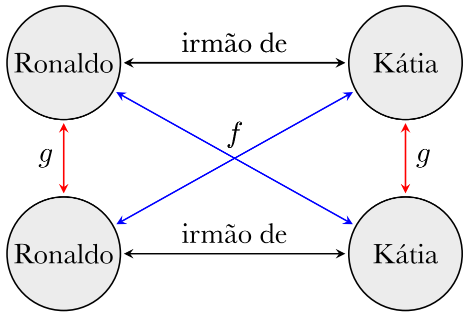
    - Isso requer que possivelmente haja entidades que satisfazem $(Yz \wedge \forall x(Yx \to Yf(x)))$.
  - No caso de teorias infinitárias, como a aritmética de Peano e a teoria dos conjuntos, para que os seus teoremas não sejam vacuamente verdadeiros tem que ser possível que haja sistemas de objectos infinitos que satisfaçam os axiomas da teoria;
  - À partida, tais entidades são entidades matemáticas – números, conjuntos, ou algo similar;
  - Mas o consenso acerca de entidades matemáticas é que se é possível que estas existam, então é necessário que estas existam;
  - Logo, porque não falar logo acerca destas entidades, e das suas propriedades, como tipicamente se faz em matemática?

5.2. Objecções ao Estruturalismo Ante Rem

- *Propriedades não estruturais*:
  - Entidades matemáticas parecem ter propriedades para além daquelas que têm em virtude de serem posições em estruturas particulares;
    - Exemplo: o 7 ...
      1. ... é uma entidade abstracta;
      2. ... é o número preferido do Joaquim;
      3. ... é o número do Cristiano Ronaldo;
      4. ...
  - Desafio para o estruturalismo ante rem:
    - Quais das propriedades das entidades matemáticas são puramente estruturais?

- *Indiscernibilidade*: Quando ocupam dois objectos de dois sistemas de objectos a mesma posição na estrutura comum a esses dois sistemas de objectos?
  - Sistemas de objectos instanciam a mesma estrutura se e somente se são isomórficos;

- ○ Isto sugere que objectos ocupam a mesma posição numa estrutura quando à um isomorfismo entre esses dois objectos.
- ○ Problema:



  - Ronaldo e Kátia ocupam a mesma posição;
  - Ronaldo e Ronaldo ocupam a mesma posição;
  - Logo, há só uma posição?

- ■ *Existência de estruturas*: De acordo com o ESTRUTURALISMO ANTE REM, uma teoria matemática é verdadeira somente se há alguma estrutura que seja especificada pelos axiomas da teoria e cujas posições são aquilo de que os axiomas falam.
  - ○ *Questão*: Como sabemos se há alguma estrutura que é especificada pelos axiomas da teoria?
  - ○ *Proposta*: uma estrutura é especificada pelos axiomas de uma teoria se e somente se esses axiomas são consistentes;
  - ○ *Problema para a proposta*: como compreender consistência?
    - Consistência sintáctica implica que a linguagem da teoria é (interpretada como sendo) de primeira ordem. Se a linguagem for de segunda ordem, então a teoria pode ser sintacticamente consistente e ainda assim não ter modelos;
      - – Mas resultados como a Categoricidade da Aritmética colhem somente se a linguagem da teoria for de segunda ordem;
      - – Sem tais resultados não estamos justificados a acreditar que teorias como a aritmética de Peano determinam uma única estrutura;
    - Isto sugere que a noção de consistência adequada é semântica (existência de pelo menos um modelo da teoria);
    - Mas, se a consistência em causa for semântica, então para determinar que uma teoria é consistente precisamos usar teoria dos conjuntos;
    - Mas como sabemos que os axiomas da teoria dos conjuntos especificam uma estrutura?
      - – A solução parece ser tomar os axiomas de teoria de conjuntos como sendo axiomas categóricos, acerca de certos objectos (conjuntos), e não acerca de estruturas e posições nessas estruturas.

6. Desafio

- *Indiscernibilidade*: Conseguem oferecer uma resposta, a favor do ESTRUTURALISMO ANTE REM, ao problema da indiscernibilidade?
  (esta pergunta é uma das perguntas possíveis sobre as quais escrever o ensaio final)