Seminário #1: Introdução à Filosofia da Matemática

Conteúdo

1. Estrutura da parte de Filosofia da Matemática

1. Apresentação: Porquê Filosofia da Matemática?
2. Informação Essencial
   (a) Questões tratadas:
      i. Qual a natureza das entidades matemáticas e discurso matemático?
      ii. Qual a justificação do conhecimento matemático?
      iii. Qual a explicação para a aplicabilidade da matemática na compreensão de fenómenos empíricos?

   (b) Importância da filosofia da matemática para outras áreas do conhecimento (em filosofia e não só):
      - *Filosofia da Matemática e Filosofia Matemática*: Uma abordagem comum em filosofia da matemática consiste em recorrer a ferramentas lógicas, e matemáticas, para clarificar, explicar e prever os fenómenos em questão.

        Esta abordagem é agora comum nas mais variadas áreas de filosofia (por exemplo, ética, metaética, metafísica, epistemologia, filosofia da mente, estética, filosofia da lógica, filosofia da ciência, etc.)

        A abordagem deu origem a um modo distinto de fazer filosofia, ao qual se tem chamado de *filosofia matemática*;
      - *Matemática*: O trabalho em filosofia da matemática, principalmente o desenvolvido na primeira metade do século XX, deu origem a novos ramos de matemática (e.g., teoria dos conjuntos, teoria dos modelos, teoria da recursão), novos resultados em matemática (e.g., teoremas da

incompletude da aritmética) e a uma nova forma de fazer matemática grandemente baseada na lógica de primeira ordem e na teoria dos conjuntos (veja-se por exemplo o trabalho do grupo Bourbaki);

(c) Objectivos:
  i. (★★★) Escrever de modo claro, cuidado e argumentativo;
  ii. (★★★) Explicar o Logicismo, Finitismo, Intuicionismo, Estruturalismo e Nominalismo de Field;
  iii. (★★★) Determinar de que modo estas teorias respondem às questões (a)-(c);
  iv. (★★★) Avaliar os méritos e problemas destas teorias;
  v. (★★) Propor soluções para os problemas (i)-(iii);
  vi. (★) Conhecimento de resultados matemáticos de relevância para as teorias logicista, finitista, intuicionista, estruturalista e nominalista.

(d) Tipicamente, uma aula contém:
  - Apresentação do tópico da aula;
  - Apresentação de um resultado matemático relevante;
  - Discussão de questões relacionadas com o tópico;
  - Trabalho individual ou em pequenos grupos;
  - Pausa de 5 a 10 minutos, tipicamente após a primeira hora.

(e) Avaliação
  i. Um ensaio, 1500 palavras
    - **Importante**: Têm que começar já a pensar na questão para o ensaio.
  ii. Uma análise de um argumento (em pares, caso assim o desejem).

3. Literatura de apoio:
   - Livro principal: Shapiro, S. (2000)/(2015), *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics/Filosofia da Matemática*;
   - Leituras de apoio adicionais encontram-se listadas no programa da cadeira;
     - Vejam especialmente as leituras sugeridas para cada aula. Estas encontram-se listadas no calendário (no final do programa da cadeira);
     - Tipicamente, as aulas não pressupõem uma leitura prévia do material;
     - Ainda assim, ler o material previamente ajuda;
   - Textos base para os ensaios encontram-se sugeridos nos capítulos do livro do Shapiro correspondentes aos tópicos da cadeira (encontram também sugestões no livro Linnebo (2017), *Philosophy of Mathematics*)

2. Breve Introdução à Filosofia da Matemática

2.1. A Posição Canónica em Filosofia da Matemática

Posição canónica: A posição canónica em filosofia da matemática (muito similar à posição que era advogada por Platão) advoga as seguintes teses:

1. Realismo acerca de valores de verdade;
2. Realismo acerca do discurso;
3. Necessitismo acerca de valores de verdade;
4. Racionalismo;
5. Sintetismo;
6. Realismo acerca de objectos;
7. Necessitismo acerca de objectos;
8. Abstracta.

2.1.1. Realismo acerca de valores de verdade

Realismo acerca de valores de verdade:

1. Há proposições matemáticas (não trivialmente) verdadeiras e proposições matemáticas (não trivialmente) falsas;
2. a verdade ou falsidade das proposições matemáticas depende de mentes.

- *Acerca de proposições*:
  - Os filósofos tipicamente chamam ao conteúdo de frases *proposições*;
  - Mais em geral, proposições são:
    1. o *conteúdo* de frases;
    2. o *conteúdo* de crenças (e outras atitudes proposicionais – e.g., *desejo*) e objecto de conhecimento ;
    3. (capazes de ser) *verdadeiras* ou *falsas*.

- *Exemplo acerca de proposições*:
  1. Conteúdo de frases: A frase o 'Benfica vai ser campeão' tem como seu conteúdo a proposição que o Benfica vai ser campeão;
  2. Conteúdo de crenças: Eu acredito na proposição que o Benfica vai ser campeão – que o Benfica vai ser campeão é o conteúdo da minha crença;
  3. Objecto de conhecimento: Eu sei que o Benfica vai ser campeão – tenho conhecimento da proposição que o Benfica vai ser campeão;
  4. Valor de verdade: A proposição que o Benfica vai ser campeão é verdadeira.

- *Anti-realismo acerca de valores de verdade*: As seguintes são posições anti-realistas acerca de valores de verdade:

Idealismo acerca valores de verdade:
1. Há proposições matemáticas (não trivialmente) verdadeiras e proposições matemáticas (não trivialmente) falsas;
2. A verdade ou falsidade das proposições matemáticas depende de mentes.

Nominalismo acerca de valores de verdade:
1. As proposições matemáticas verdadeiras são todas trivialmente verdadeiras e as proposições matemáticas falsas são todas trivialmente falsas; ou
2. As proposicões da matemática não possuem valores de verdade;
3. ou as frases da matemática não têm significado.

2.1.2. Realismo acerca do discurso

Realismo acerca do discurso: As verdades matemáticas são *acerca de objectos e relações matemáticas* (números, funçoes, congruências, etc.);

Anti-Realismo acerca do discurso: As verdades matemáticas não são *acerca de objectos e relações matemáticas* (números, funçoes, congruências, etc.);
- Ao invés, as proposições da matemática são acerca de outro tipo de coisas (e.g., numerais e outros símbolos), ou acerca de coisa alguma.

2.1.3. Necessitismo acerca de valores de verdade

Necessitismo acerca de valores de verdade: As verdades matemáticas são *necessárias*;

Definição (Modos de Proposições)**.**
1. Uma proposição é *necessária* se e somente se é verdadeira independentemente das circunstâncias.
2. Uma proposição é *impossível* se e somente se é falsa independentemente das circunstâncias;
3. Uma proposição é *contingente* se e somente se é our falso ou verdadeiro, dependendo das circunstâncias.

- *Necessidade e mundos possíveis*:
  - Os filósofos por vezes dizem que uma proposição é:
    - *necessária* se e somente se este é verdadeira *em todos* os mundos possíveis;
    - *impossível* se e somente se é falsa *em todos* os mundos possíveis;
    - *contingente* se e somente se é verdadeira *em alguns* mundos possíveis e falsa *em alguns* mundos possíveis;

- *Exemplos*:

1. *Está a chover ou não está a chover*: proposição necessária;
2. *Não é o caso que está a chover ou não está a chover*: proposjao impossível;
3. *Está a chover*: proposição contingente.

- *Quiz Time!*: Vão a `www.kahoot.it` e coloquem o código que vos irei dar (3 questões).

2.1.4. Racionalismo

Racionalismo: As verdades matemáticas são *justificáveis* e *conhecíveis a priori*;

Definição (Justificação)**.** Uma crença numa proposição é justificada se e somente se a evidência do indivíduo na qual a crença se baseia suporta adequadamente (ou em grau suficiente) a verdade da proposição (por exemplo, se a evidência do indivíduo na qual a crença se baseia assegura com fiabilidade a verdade da proposição).

- *Acerca de justificação*: Ter uma crença *justificada* numa proposição é uma condição necessária para conhecer-se a (verdade da) proposição.

- *Quiz Time!* (3 Questões)

Definição (Justificação A Priori e A Posteriori)**.** A *a prioricidade* e *a posteriocidade* são primariamente propriedades da justificação de crenças:

1. Uma crença está justificada *a priori* se e somente se a evidência do agente na qual a crença se baseia suporta a crença e é "independente da experiência" (a evidência não consiste em experiências ou observações);
2. Uma crença está justificada *a posteriori* se e somente se a evidência do agente na qual a crença se baseia suporta a crença e é "dependente da experiência" (a evidência consiste em experiências ou observações).

Definição (Conhecimento A Priori e A Posteriori)**.**

1. O conhecimento de uma proposição é a priori se e somente se a crença constitui conhecimento e está justificada a priori;
2. O conhecimento de uma proposição é a posteriori se e somente se a crença constitui conhecimento e está justificada a posteriori;

Definição (Conhecível e Justificável A Priori e A Posteriori)**.**

1. Uma proposição é justificável a priori se e somente se é possível ter uma crença justificada a priori na proposiçao;
2. Uma proposição é conhecível a priori se e somente se é possível ter uma crença justificada a priori na proposiçao e essa crença constitui conhecimento.

- *Empirismo*: Ao racionalismo opõe-se a seguinte posição:

Empirismo: As verdades matemáticas são *justificáveis* e *conhecíveis* somente *a posteriori*.

- *Quiz Time!* (3 Questões)

2.1.5. Sintetismo

Sintetismo: As verdades matemáticas são *sintéticas*;

Definição (Analítico e Sintético)**.** A *analiticidade* e *sinteticidade* são primariamente propriedades de frases:

1. Uma frase é analítica se e somente se é verdadeira, ou falsa, em virtude do seu significado;
2. Uma frase é sintética se e somente se a sua verdade ou falsidade dependem de mais do que o seu significado.

- *Quiz Time!* (3 Questões)

2.1.6. Realismo acerca de objectos

Realismo acerca de objectos *Existem* coisas como números e outras entidades matemáticas e a sua existência é independente de mentes;

- *Anti-realismo acerca de objectos*: As seguintes são posições anti-realistas acerca de objectos:

Idealismo acerca de objectos: Existem objectos matemáticos, mas a sua existência depende de mentes.

Nominalismo/Nihilismo: Não existem objectos matemáticos.

2.1.7. Necessitismo acerca de objectos

Necessitismo acerca de objectos: As entidades matemáticas *existem necessariamente*;

2.1.8. ABSTRACTA

ABSTRACTA: As entidades matemáticas são entidades abstractas.

Definição (*Concreta* e *Abstracta*).
1. Um objecto é *abstracto* se e só se não tem localização espaço-temporal e não tem eficácia causal;
2. Um objecto é *concreto* se e somente se não é abstracto.

- *Concretismo*: A ABSTRACTA opõe-se a seguinte posição:

CONCRETISMO/NOMINALISMO ACERCA DE OBJECTOS: Os objectos matemáticos são objectos concretos.

- *Quiz Time!* (3 Questões)

- *Revisitando a posição canónica*:

POSIÇÃO CANÓNICA:
1. REALISMO ACERCA DE VALORES DE VERDADE;
2. REALISMO ACERCA DO DISCURSO;
3. NECESSITISMO ACERCA DE VALORES DE VERDADE;
4. RACIONALISMO;
5. SINTETISMO;
6. REALISMO ACERCA DE OBJECTOS;
7. NECESSITISMO ACERCA DE OBJECTOS;
8. ABSTRACTA.

2.2. Problema de Benacerraf

- *O Problema de Benacerraf*: Assumindo-se a POSIÇÃO CANÓNICA, qual a explicação para o facto de as crenças que temos acerca de entidades matemáticas serem capazes de reflectir os factos acerca dessas entidades, de tal modo a que temos conhecimento desses factos?

> "De que modo são as práticas e mecanismos através dos quais chegamos às nossas crenças matemáticas conducentes a que façamos descobertas acerca da realidade que é descrita pela matemática." (Linnebo, 2017, p. 13)

- *Dificuldade em responder ao problema de Benacerraf*: Como se consegue conhecer factos acerca de entidades que não existem no espaço-tempo e não possuem eficácia causal? Como se justifica o nosso conhecimento desse factos através dos procedimentos matemáticos?

2.3. Problema da Aplicabilidade

- *O Problema da Aplicabilidade*: Assumindo-se a POSIÇÃO CANÓNICA, qual a explicação para a aplicabilidade da matemática na explicações de fenómenos não matemáticos (por exemplo, como se explica a aplicabilidade da matemática nas teorias e explicações fornecidas pelas ciências).

  > "De que modo são as práticas e mecanismos através dos quais chegamos às nossas crenças matemáticas conducentes a que façamos descobertas acerca da realidade que é descrita pela matemática." (Linnebo, 2017, p. 13)

- *Dificuldade em responder ao problema da aplicabilidade*: Como podem factos necessários, conhecíveis a priori, acerca de entidades necessárias, não espacialmente localizadas e sem eficácia causal explicar factos contingentes, conhecíveis somente em virtude de experiências, acerca de entidades contingentes, espacialmente localizadas e com eficácia causal?